# ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

#### Долгих Константин Александрович

# Построение модели горячих пятен космических лучей предельно высоких энергий с учётом межгалактических магнитных полей

1.3.3 — теоретическая физика

### ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

> Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Рубцов Григорий Игоревич

## Содержание

Bı	веде	ние	4
1	Каустикоподобные структуры в потоке КЛПВЭ после распространения в турбулентных межгалактических магнитных по-		
			•
	лях		20
	1.1	Углы отклонения КЛПВЭ в турбулентном МГМП	20
	1.2	Плотность потока КЛПВЭ на сфере вокруг источника	25
	1.3	Численное моделирование плотности потока КЛПВЭ	29
<b>2</b>	Изо	ображения источников космических лучей	36
	2.1	Моделирование изображений источников космических лучей	36
	2.2	Регистрируемые наблюдателем потоки КЛПВЭ	39
	2.3	Регистрируемые наблюдателем изображения источников КЛПВЭ	44
3	Изо	ображения источников КЛПВЭ в режиме фокусировки	48
	3.1	Приближение некоррелированных траекторий	52
	3.2	Смещение изображений источников в турбулентном МГМП	57
	3.3	Интерпретация избытка в области Центавра А как потока от ис-	
		точников Центавр А и М83	58
4	Зак	ключение	63
5	Спі	исок сокращений и условных обозначений	67
$\mathbf{C}_{1}$	писо	к литературы	68
$\Pi_{1}^{2}$	рилс	ожение	80
${f A}$	Прі	иложение 1. Веб-сервер для компоновки и отображения изоб-	-
	рах	кений источников КЛПВЭ	80

В Приложение 2. Отклонения частиц и размер изображения источника в турбулентном магнитном поле

#### Введение

#### Актуальность темы исследования

Самыми энергичными частицами, известными во Вселенной, являются космические лучи предельно высоких энергий (КЛПВЭ). Это элементарные частицы и ядра, которые достигают Земли из пока неизвестных источников и обладают энергией до нескольких сотен ЭэВ. В данной работе КЛПВЭ будут называться космические лучи с энергиями частиц E > 1 ЭэВ.

КЛПВЭ встречаются очень редко: при самых высоких энергиях за последние десятилетия было обнаружено всего несколько тысяч таких событий с помощью детекторов, охватывающих площади от сотен до тысяч квадратных километров. Двумя крупнейшими детекторами являются обсерватория Пьера Оже (Pierre Auger) [1], расположенная в Аргентине, и обсерватория (Telescope Array, TA) [2] в США, штате Юта. Обсерватория работает с 2004 года и занимает площадь около 3000 км². ТА занимает площадь около 700 км² и работает с 2008 года [3]. Также в настоящее время строится расширение установки ТАх4, плановая площадь которого составляет 2800 км² [4], из которых готовы к работе около 1700 км².

Известно, что фотоны и нейтрино составляют незначительную часть от общего потока космических лучей [5–9], и космические лучи предельно высоких энергий (КЛПВЭ) являются заряженными частицами, и они неизбежно отклоняются в галактических и межгалактических магнитных полях (МГМП). Ожидаемое большое количество источников космических лучей во Вселенной вместе с большими отклонениями космических лучей от положения источников не позволяют нам заниматься астрономией, за исключением самых высоких энергий  $E > 6 \cdot 10^{19}$  эВ, где спектр имеет обрезание из-за взаимодействия с реликто-

вым излучением (РИ). Это так называемое обрезание ГЗК было предсказано Грейзеном, Зацепиным и Кузьминым в 1966 году [10,11]. В обеих оригинальных статьях [10] и [11] приводятся расчёты фотопроизводства пионов первичными протонами и в то же время указывается на эффект фоторазрушения, который имеет место в случае первичных ядер при почти одинаковой энергии, см. [12] для исторического обзора.

Ограничение в спектре космических лучей было обнаружено 40 лет спустя в ходе эксперимента High Resolution Fly's Eye (HiRes) в 2007 году [13] и вскоре после этого было подтверждено обсерваторией Пьера Оже (Оже) в 2008 году [14]. Позднее, в 2013 году, это ограничение было подтверждено результатами исследования Telescope Array (TA) [15]. Недавние измерения обсерватории Пьера Оже показывают, что наблюдаемое подавление спектра может быть результатом сочетания воздействия максимально возможной энергии ускорения тяжёлых ядер в источниках и эффекта ГЗК [16]. В некоторых моделях (см., например, [17]) в спектре космических лучей предельно высоких энергий преобладают локальные источники. В последнем случае максимальная энергия ускорения определяет максимальную энергию космических лучей. Существование эффекта ГЗК гарантирует, что космические лучи с энергиями  $E > 6 \cdot 10^{19}\,\mathrm{эB}$ происходят из локальной Вселенной со значительным вкладом источников, расположенных в близлежащих крупномасштабных структурах (LSS) на расстоянии от Млечного пути R < 200 Мпк. По последним данным плотность источников КЛПВЭ может быть ограничена снизу как  $\rho > 10^{-4} \mathrm{Mnk}^{-3}$  (Рис. 1) [18].

Поскольку крупномасштабная структура Вселенной на этих расстояниях значительно неоднородна, это дает надежду увидеть отдельные источники КЛП-ВЭ. Астрономия с использованием КЛПВЭ при самых высоких энергиях  $E > 6 \cdot 10^{19}$  эВ была одной из главных мотиваций для проведения экспериментов Оже и ТА.

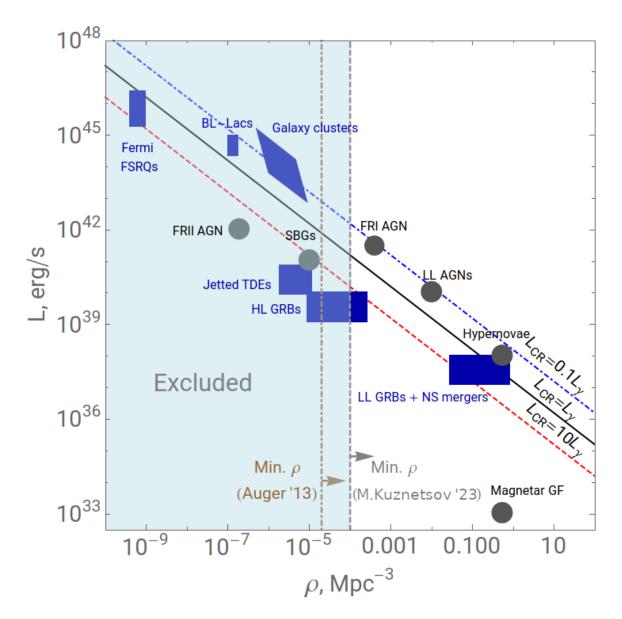


Рис. 1: Зависимость эффективной яркости источников КЛПВЭ от их плотности. Черная сплошная линия показывает наилучшее соответствие общей плотности светимости КЛПВЭ  $L_{CR} = 5 \cdot 10^{44}$  эрг Мпк $^{-3}$ г $^{-1}$  (см. [19]). Вертикальные линии обозначают ограничения на концентрацию источников КЛПВЭ коллаборацией Оже [20] в приближении 30° отклонения от источников в крупномасштабной структуре Вселенной и М.Кузнецовым [18]. Иллюстрация взята из работы М.Кузнецова [18].

Для протонов космических лучей отклонение в магнитном поле галактики  $B_{\rm Gal} \sim$  мк $\Gamma$  составляет всего несколько градусов при  $E > 6 \cdot 10^{19}$  эВ в зависимости от направления. Помимо ГМП, на распространение КЛПВЭ также может влиять межгалактическое магнитное поле (МГМП), при условии, что его напряжённость близка к текущим верхним пределам, составляющим примерно  $B \sim 0.1-1$  н $\Gamma$ с. Эти верхние пределы, полученные из измерения вращения Фарадея [21] внегалактических источников, справедливы для объёмно-заполняющего магнитного поля, находящегося в войдах крупномасштабной структуры Вселенной (LSS) [22, 23]. Отдельные авторы сообщают и о ещё более строгих ограничениях около  $B \sim 1.5 \cdot 10^{-6}$  н $\Gamma$ с [24]. В результате они не накладывают прямых ограничений на магнитное поле в местной Вселенной, где оно может быть сильнее. Это могло бы естественно произойти, если Млечный Путь находится в филаменте крупномасштабной структуры [25], или если локальное магнитное поле было усилено обратной связью от, например, Совета Гигантов (CoG), группы близких крупных галактик [26, 27].

В то же время даже самые сильные из возможных межгалактических магнитных полей (МГМП) с интенсивностью порядка  $B \leq 1$  nG снова неэффективны для отклонения направления протонов КЛПВЭ от точечных источников. Таким образом, можно ожидать, что в данных КЛПВЭ будут видны точечные или слегка протяженные источники протонов с энергией  $E > 6 \cdot 10^{19}$  эВ. Однако даже при большой экспозиции Оже и ТА не обнаружили никаких признаков точечных источников. Это наблюдение согласуется с утверждением Оже о том, что большинство КЛПВЭ с  $E > 6 \cdot 10^{19}$  эВ являются промежуточными и тяжёлыми ядрами. В случае тяжёлых ядер магнитное поле Галактики нарушает и даже стирает изображения источников космических лучей предельно высоких энергий [28–31].

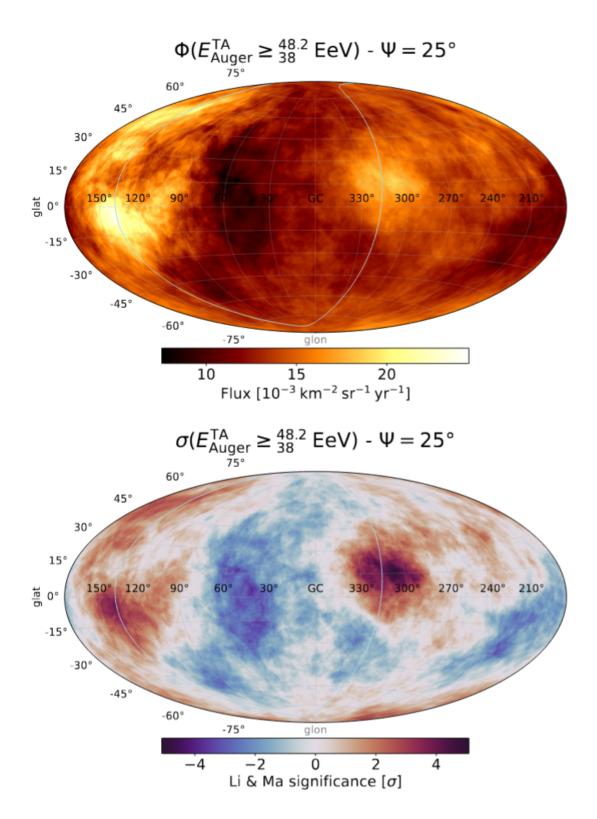


Рис. 2: Карта потока (наверху) и карта значимости (внизу) КЛПВЭ в галактических координатах. Горячее пятно в правой части выглядит менее ярко, но имеет большую значимость за счёт более длительного наблюдения и обычно ассоциируется с радиогалактикой Центавр А. Иллюстрация взята из доклада коллаборации Оже на конференции ICRC2023 [3].

На самых больших угловых масштабах Оже обнаружил диполь в направлениях прихода КЛПВЭ, значимость которого превысила  $5\sigma$  для энергий E > 8 EeV [32,33]. Его наличие было подтверждено с помощью объединённых данных Оже и ТА [34–36]. Кроме того, на промежуточных угловых масштабах Оже и ТА наблюдают несколько областей размером примерно 20-25 градусов [37], в направлении которых поток космических лучей значительно выше среднего. Такие области мы будем называть горячими пятнами (англ. hotspot). Наиболее значительный избыток потока КЛПВЭ наблюдается в направлении радиогалактики Центавр А, обнаруженный Оже с уровнем значимости  $4\sigma$  при энергиях E > 40 EeV [38,39]. Горячее пятно ТА, расположенное вблизи области Большой Медведицы, имеет уровень значимости  $3.4\sigma$  сигма при аналогичных энергиях (Рис. 2) [40]. Кроме того, в данных ТА есть признаки дополнительного горячего пятна вблизи сверхскопления Персея-Рыб [41,42]. Эти горячие пятна могут быть изображениями близлежащих точечных источников, размазанные как галактическими, так и межгалактическими магнитными полями.

В предыдущих исследованиях изучалось влияние межгалактических магнитных полей на траектории предельно высоких космических лучей. В одном из таких исследований [43] изучался избыток КЛПВЭ от галактики Центавр А и его потенциальная связь с местным межгалактическим магнитным полем. Это исследование показывает, что при наличии протонов в составе напряжённость межгалактического магнитного поля должна составлять не менее 20 нГ. Это значение противоречит существующим наблюдательным ограничениям [22, 44, 45].

Распространение космических лучей в турбулентном магнитном поле в диффузионном режиме уже изучалось ранее [46–48]. Однако распространение космических лучей сверхвысокой энергии в режиме малоуглового рассеяния привлекало меньше внимания. Этот режим обычно считается тривиальным, и в

отсутствие регулярного поля ожидается, что космические лучи просто сформируют размытое изображение источника, если он находится на расстоянии, намного превышающем длину когерентности  $D \gg \lambda_C$ . Среднее распределение КЛПВЭ по их источникам в этом случае было получено и описано в работах Диего Харари с соавторами [49–51].

Нетривиальные эффекты линзирования при распространении КЛПВЭ в магнитном поле Галактики были обнаружены в работах [50, 51]. В частности, в работе [51] эти эффекты были изучены для случая изначально параллельных космических лучей, проходящих через турбулентное магнитное поле Галактики. Аналогичные эффекты линзирования для магнитного поля в скоплении галактик были изучены в работе [52].

Актуальность диссертационного исследования связана с астрономией заряженных частиц, для развития которой принципиально важно решение задач, поставленных в настоящей диссертации.

#### Цели и задачи диссертации

Целью данного диссертационного исследования является изучение влияния турбулентного межгалактического магнитного поля с колмогоровским спектром на распространение космических лучей ультравысоких энергий в режиме малого угла рассеяния, количественный и качественный анализ формирования каустикоподобных структур в пространственном распределении КЛПВЭ и разработка методов интерпретации наблюдаемых данных по анизотропии КЛПВЭ в данных обсерваторий Пьера Оже и Telescope Array.

Основные задачи исследования:

• Численное моделирование распространения КЛПВЭ в МГМП с колмогоровским спектром турбулентности с использованием кодов CRbeam [53] и

#### CRPropa [54];

- Исследование зависимости потока КЛПВЭ от положения наблюдателя на сфере, в центре которой находится источник;
- Разработка алгоритма прицеливания для эффективного моделирования попадания определения направлений испускания частиц источником для попадания в область наблюдателя;
- Анализ систематического смещения изображений источников КЛПВЭ в МГМП и его взаимодействия с галактическим магнитным полем (ГМП);
- Исследование диффузии на промежуточных масштабах между приближением постоянного магнитного поля и изотропной диффузии.
- Применение результатов к интерпретации горячего пятна в направлении Центавра A и проверка гипотез о возможных источниках этого избытка: М83, Центавра A.

#### Научная новизна диссертации

Все основные результаты, выдвигаемые на защиту, являются новыми. Так, впервые проведено детальное моделирование двумерного распределения КЛП-ВЭ на сфере вокруг источника с обнаружением нетривиальных каустикоподобных структур [55, 56], эти структуры были названы магнитными узлами, филаментами и войдами. Впервые проведены количественные оценки усиления и ослабления потока в магнитных узлах и войдах в зависимости от расстояния и энергии. Показано, что в широком диапазоне параметров магнитных полей наиболее вероятным является ослабление наблюдаемого потока в 10 и более раз, в то время как усиление потока в 10 раз имеет вероятность порядка 10% [57]. Также были впервые обнаружены эффекты смещения изображений источников в МГМП, сопоставимого по величине с угловым размером изображения. В данной работе предлагается согласованная модель формирования горячего пятна

Центавр А с учётом совместного влияния МГМП и ГМП в модели Дженсон-Фаррар 2012 (JF12) [58] [59]. Возможность того, что М83 является источником горячего пятна рассматривалась ранее [27, 60–62]. В диссертации впервые систематически исследована зависимость данной интерпретации от величины и корреляционной длины внегалактического магнитного поля.

Для достижения этих результатов были разработаны новые алгоритмы прицеливания, ускоряющие вычисления более чем в 50 раз. Разработана программа для ЭВМ, позволяющая анализировать результаты распространения КЛПВЭ и изображения, наблюдаемые источником на основе предвычисленной базы данных симуляции в различных условиях.

#### Теоретическая и практическая значимость диссертации

Все результаты, полученные в диссертации имеют теоретическое значение и показывают, что обнаружен новый режим, который должен учитываться в исследованиях, проводимых в данной области при учёте межгалактического магнитного поля. Многие исследователи учитывают межгалактическое магнитное поле исключительно как размазывание изображения источника в соответствии с диффузионной теорией по распределению фон Мизеса—Фишера, однако при некоторых параметрах эффекты линзирования приводят к сильным отклонениям от этого приближения. Это позволит улучшить ограничения на параметры межгалактического магнитного поля и количество источников космических лучей на расстояниях до 50 Мпк. Улучшения программного кода и алгоритма прицеливания позволяют получать больше информации об изображении источника космических лучей и рассматривать больше возможных моделей и интерактивно взаимодействовать с полученными результатами, тратя на это во много раз меньше ресурсов, чем ранее.

Результаты диссертации уже сейчас применяется в работах по исследованию

космических лучей. В частности результат о смещении положении источника на небе использован в работе Т. Бистер [63] для исследования возможных параметров МГМП, совместных с различными интерпретациями наблюдаемого избытка космических лучей в области Центавра А. Этот же результат оказался важен для интерпретации корреляций КЛПВЭ, наблюдаемых Оже, с положениями галактик с активным звёздообразованием [64]. Перераспределение потока космических лучей с вероятным наблюдением значительного избытка было отмечено в репортерском докладе Т. Фуджии на 38-й международной конференции по космическим лучам ICRC2023 в Нагое [65].

#### Методология диссертационного исследования

В данной диссертационной работе используются как численные, так и аналитические методы, успешно применяемые для различных задач теоретической физики и астрофизики. В ходе работы для определенных вычислений применялось такое программное обеспечение CRbeam<sup>1</sup> [53], CRPropa 3<sup>2</sup> [54] и HealPy и HEALPix<sup>3</sup> [66]. Для ускорения вычислений использовалась технология распараллеливания программ ОрепМР. Все указанные программные пакеты уже много лет применяются в астрофизике, а полученные результаты проверялись аналитически, если такое возможно. Для большинства задач диссертационного исследования были написаны собственные программные коды, в том числе и собственный механизм прицеливания, позволяющий оптимизировать вычисления на основе предыдущих похожих симуляций.

#### Положения, выносимые на защиту

1. При малых углах отклонения в турбулентном магнитном поле существует режим, при котором космические лучи, испущенные источником, обра-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>https://github.com/okolo/mcray

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>https://crpropa.github.io/

<sup>3</sup>http://healpix.sf.net

- зуют на сфере нетривиальные каустикоподобные структуры: магнитные узлы, магнитные войды, магнитные филаменты.
- 2. В каустикоподобном режиме имеет место перераспределение потока космических лучей, причём с вероятностью 55% поток на наблюдателе ослабляется в 10 и более раз, а усиление потока хотя бы в 2 раза наблюдается в 10% случаев.
- 3. Изображения источников качественно зависят от того, в какой структуре: магнитный войд, узел или филамент находится наблюдатель.
- 4. Центр изображений источников в большинстве случаев не совпадает с направлением на сам источник как следует из диффузионной теории.
- 5. Вероятность, что источником горячего пятна Центавра A является радиогалактика Центавр A, низкая и, в частности, при величине межгалактического магнитного поля B=3 нГ и корреляционной длине  $L_{\rm c}=0.3$  Мпк составляет примерно 0.5% в предположении модели галактического магнитного поля Дженсон-Фаррар.
- 6. М83 может являться источником горячего пятна Центавра A при условии  $L_{\rm c} \leq 0.05~{
  m Mnk}$  в предположении модели галактического магнитного поля Дженсон-Фаррар.

#### Достоверность и обоснованность результатов

Результаты диссертации были опубликованы в рецензируемых научных журналах, а также доложены на научных конференциях (в том числе международных) и семинарах. Достоверность результатов обеспечивается перепроверкой результатов разными подходами. Численное моделирование частично проверялось с помощью CRPropa, если это возможно. Там, где это возможно, было проведено сравнение промежуточных результатов с работами других авторов и

продемонстрировано их хорошее согласие.

#### Апробация результатов

Основные результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях и семинарах:

- 1. 38-я Международная конференция по космическим лучам (ICRC-2023), Нагоя, Япония, 26 июля - 3 августа 2023.
- 2. Международная конференция КВАРКИ-2024, Переславль-Залесский, Россия, 19 — 24 мая 2024.
- 3. Первое рабочее совещание «Машинное обучение в ТА-2024», Тайбей, Тайвань, 21 26 октября 2024.
- 4. Сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН, посвященная 70летию В.А. Рубакова, Москва, Россия, 17 – 21 февраля 2025.
- 5. 15-е Зацепинские чтения, Москва, Россия, 6 июня 2025.

Результаты также были представлены 28 апреля 2025 г. на семинаре отдела теоретической физики Института ядерных исследований Российской академии наук.

#### Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК:

- 1. K. Dolgikh, A. Korochkin, G. Rubtsov, D. Semikoz, I. Tkachev. Caustic-Like Structures in UHECR Flux after Propagation in Turbulent Intergalactic Magnetic Fields // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2023.
  - Vol. 136. P. 704–710. DOI: 10.1134/S1063776123060031

- K.A. Dolgikh, A. Korochkin, G. Rubtsov, D. Semikoz and I. Tkachev. Caustic-like Structures in UHECR Flux after Propagation in Turbulent Intergalactic Magnetic Fields and the caused distortions of the image of a source // Proceedings of the 38th International Cosmic Ray Conference (ICRC-2023). 2023. P. 452. DOI: 10.22323/1.444.0452
- 3. Арбузова Е.В., Долгих К.А., Долгов А.Д., Калашев О.Е., Корочкин А.А., Панасенко Л.А., Поздняков Н.А., Рубцов Г.И., Руденко А.С., Ткачев И.И. Открытие новых окон в раннюю Вселенную с помощью многоканальной астрономии (Мини-обзор) // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 2024. Vol. 119. N. 7-8. P. 481-491. DOI: 10.31857/S1234567824070024
- K. Dolgikh, A. Korochkin, G. Rubtsov, D. Semikoz, I. Tkachev. Images of the Ultra-High Energy Cosmic Rays from Point Sources // Advances in Space Research. — 2024. — Vol. 74. — Iss. 10. — P. 5295–5301.
   DOI: 10.1016/j.asr.2024.07.081
- K. Dolgikh, A. Korochkin, G. Rubtsov, D. Semikoz, I. Tkachev. Displacement of ultra-high-energy cosmic ray source images by the intergalactic magnetic field: the cases of Cen A and M83 // International Journal of Modern Physics A. 2025. P. 2540012. DOI: 10.1142/S0217751X25400123

Также зарегистрирована программа для ЭВМ: «Веб-сервер для компоновки и отображения изображений источников космических лучей после линзирования межгалактическим и (опционально) галактическим магнитным полем» (свидетельство №2025667031 от 02.07.2025 г.).

#### Личный вклад автора

Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором или при его непосредственном участии.

В частности был создан новый модуль программного кода CRbeam, а именно были добавлены следующие функции: возможность выбора направления испускания космических лучей, координат источника, возможность добавления сферического наблюдателя с произвольными координатами и размерами, возможность записи траектории частиц, возможность записи и загрузки ранее сохранённого магнитного поля в табличном формате с линейной интерполяцией, а также фиксация начального состояния генератора случайного магнитного поля для воспроизводимости результатов.

Автором лично выполнено моделирование распространения КЛПВЭ в МГ-МП, а также визуализация результатов моделирования. Для анализа и визуализации большинства результатов были реализованы специальные программные коды. Автором разработан алгоритм прицеливания для определения направлений испускания частиц, зарегистрированных наблюдателем. Автором выполнен анализ систематического смещения изображений источников КЛПВЭ в МГ-МП и ГМП, исследован новый режим диффузии на промежуточных масштабах между приближением постоянного магнитного поля и изотропной диффузии. Автором выполнена интерпретация горячего пятна в направлении Центавра А и проверены гипотезы о возможном происхождении данного избытка.

#### Структура, объём и краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и одного приложения. Общий объём работы 88 страниц, содержит 24 рисунка. Список литературы включает 93 наименования.

В первой главе рассматриваются общие свойства отклонения космических лучей в турбулентном магнитном поле. Проверяется, что симуляции согласуются с известной диффузионной теорией. Обнаруживается каустикоподобный

режим, вводятся понятия магнитного войда, магнитного филамента и магнитного узла, а также обсуждаются и проверяются механизмы его возникновения и как такой режим сказывается на потоке космических лучей для наблюдателя.

Вторая глава посвящена более пристальному исследованию эффектов, вызванных каустикоподобным режимом, для наблюдателя. При численном моделировании обнаружилось, что в некоторых случаях для получения результата нужно много времени, поэтому был разработан способ ускорения симулирования за счёт прицеливания на наблюдателя на основе предыдущих симуляций. Далее более подробно рассматривается изменение потока КЛПВЭ, проводятся численные оценки вероятности увеличения и уменьшения потоков и, наконец, строятся непосредственно изображения источников, как их видит наблюдатель на Земле с учётом межгалактического магнитного поля, а также показывается, что учёт галактического магнитного поля позволяет добиться пятна, похожее на горячее пятно в наблюдаемых данных.

Далее, в **третьей главе** обсуждаются особенности приближений, в которых выведена диффузионная теория, и объясняется, почему эти приближения нереалистичны. Диффузионная теория предполагает распространение космических лучей полностью независимо друг от друга, но в реальности у них общее турбулентное магнитное поле. Это различие между теорией и реальностью приводит к ненулевому смещению изображения источника от направления на него. В конце главы это знание применяется для предложения вариантов объяснения горячего пятна в наблюдаемых данных как космические лучи от радиогалактики Центавра А и М83.

В конце следует заключение содержит краткую формулировку результатов исследований, представленных в данной диссертации, а также благодарности и список сокращений и условных обозначений.

Приложение содержит описание программы для ЭВМ для визуализации посчитанных заранее симуляций и вывод выражений для углов отклонения частиц и размера изображения источника в турбулентном магнитном поле.

# Каустикоподобные структуры в потоке КЛП ВЭ после распространения в турбулентных межгалактических магнитных полях

Здесь будет рассмотрена следующая задача: пусть у нас есть точечный источник космических лучей предельно высоких энергий, который находится в турбулентном магнитном поле с колмогоровским спектром [67] и который испускает частицы изотропно во всех направлениях. Зададимся следующим вопросом: каково будет распределение космических лучей на воображаемой сфере, которая окружает источник КЛПВЭ?

Похожая постановка уже рассматривалась ранее в литературе, что позволяет проверить получаемые результаты, но рассматривались только углы отклонения как функция расстояния от источника.

#### 1.1 Углы отклонения КЛПВЭ в турбулентном МГМП

Известная теория позволяет выделить в отклонениях космических лучей в турбулентном поле с длиной когерентности  $\lambda_C$  два режима. При  $D < \lambda_C$  можно приближённо считать магнитное поле постоянным и отклонение происходит поперёк основного направления магнитного поля в данной области. В результате отклонение растет почти линейно  $\theta \propto (D/D_0)^{\alpha}$  с показателем степени  $\alpha$  примерно равным 1. В результате симуляций можно наблюдать  $\alpha \approx 0.9$ –1. Для  $D \gtrsim 5\lambda_C$  отклонения происходят в диффузионном режиме, и типичное значение показателя степени соответствует  $\alpha = 0.5$ . Наконец, в промежуточном режиме  $\lambda_C < D < 5\lambda_C$  показатель степени  $\alpha$  плавно меняется между указанными значениями, однако точного теоретического описания для такого режима нет.

Следовательно, при  $D\gg\lambda_C$  и малых углах отклонения мы численно ожи-

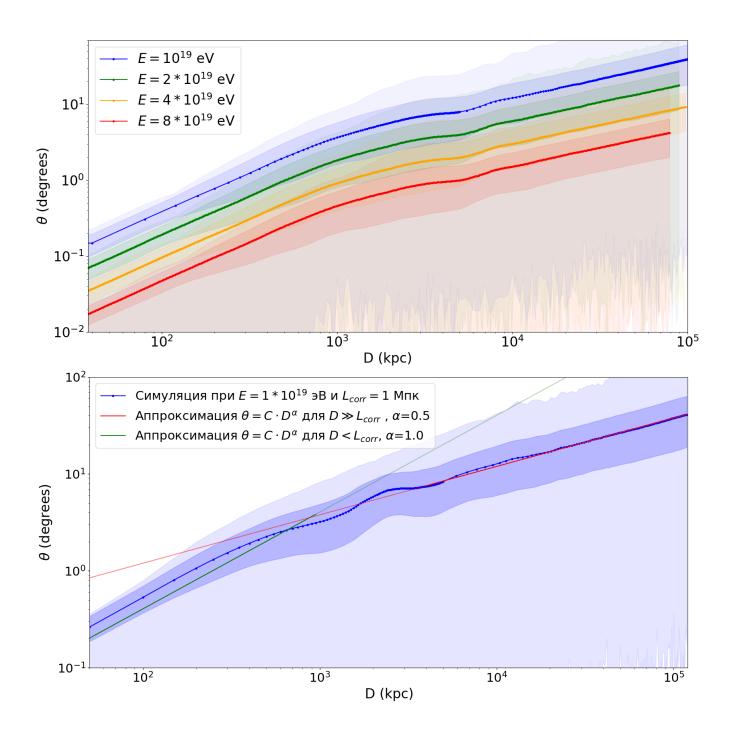


Рис. 3: Верхняя панель: средний угол отклонения протонов КЛПВЭ от начального направления в зависимости от расстояния от источника для корреляционной длины  $\lambda_C=1$  Мпк и магнитного поля B=1 н $\Gamma$  и нескольких энергий КЛПВЭ E=10,20,40,80 ЭэВ. Нижняя панель: сравнение зависимости в симуляции с предсказанием теории. Полупрозрачное заполнение обозначает минимальное-максимальное и стандартное отклонения углов отклонения.

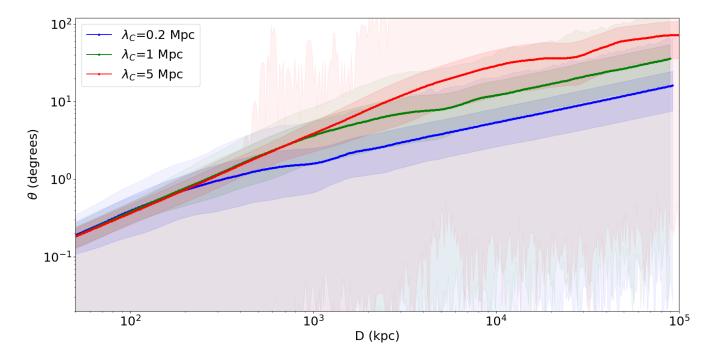


Рис. 4: Средний угол отклонения протонов КЛПВЭ от начального направления в зависимости от расстояния от источника для энергии E=10 ЭэВ и магнитного поля B=1 н $\Gamma$  и нескольких корреляционных длин  $\lambda_C=0.2,1,5$  Мпк. Полупрозрачное заполнение обозначает минимальное-максимальное и стандартное отклонения углов отклонения.

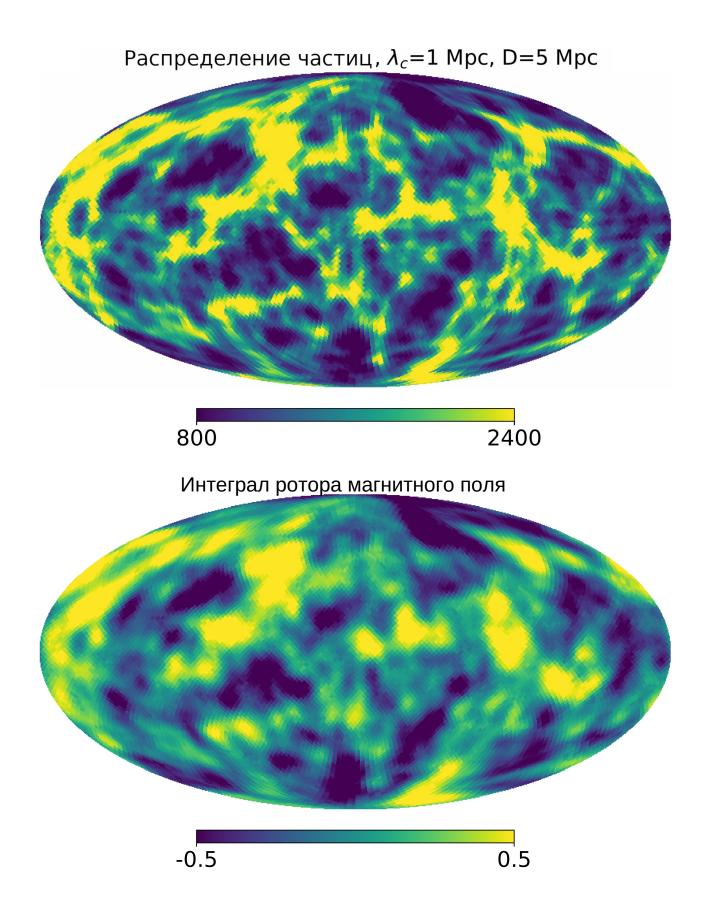


Рис. 5: Верхняя панель: распределение частиц по сфере радиусом 5 Мпк. Нижняя панель: интеграл ротора магнитного поля.

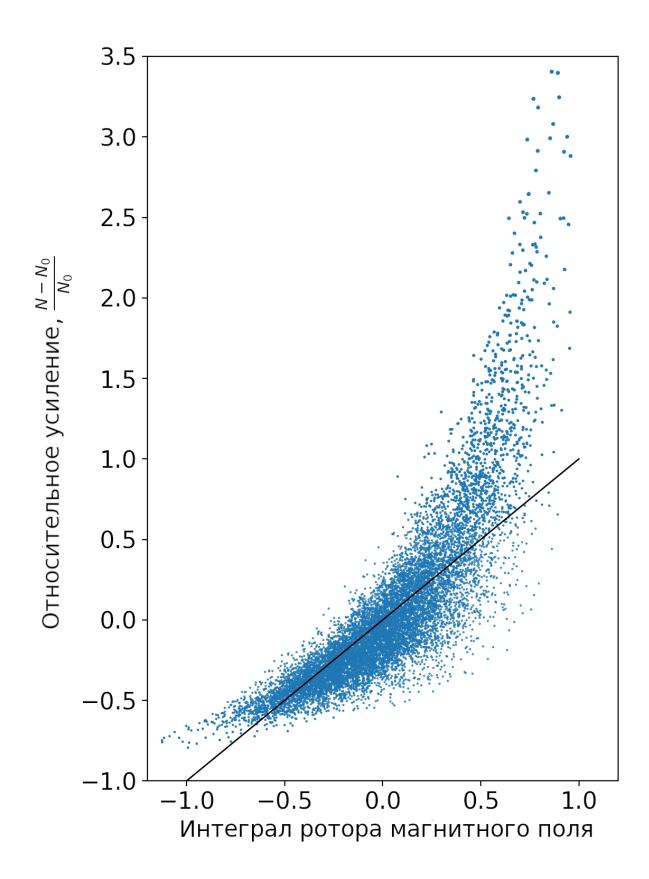


Рис. 6: Относительное увеличение числа частиц в пикселе как функция интеграла от ротора магнитного поля в направлении этого пикселя.

даем [68-70]

$$\theta \sim 4^{\circ} Z \frac{B}{\text{nG}} \frac{10 \text{ EeV}}{E} \sqrt{\frac{D}{\text{Mpc}}} \sqrt{\frac{\lambda_C}{\text{Mpc}}}$$
 (1)

где Z — атомный номер первичной частицы.

Для проверки согласия между этой формулой и корректности кода CRbeam [53, 71] были проведены симуляции. Полученная зависимость угла отклонения протона от расстояния в двух других режимах показана на Рис. 3 для  $\lambda_C=1$  Мпк, B=1 нГс и нескольких энергий КЛПВЭ. Для энергии E=10 ЭэВ проведены линии для проверки степени роста угла отклонения. Как и ожидалось, увеличение энергии уменьшает угол рассеяния. Средний угол отклонения на сфере обратно пропорционален энергии частицы на всех расстояниях до источника, включая промежуточный режим  $D\sim\lambda_C$ .

Аналогично, зависимость от длины корреляции  $\lambda_C$  показана на Рис. 4 для E=10 ЭэВ и B=1 нГс. Синяя, зеленая и красная линии показывают среднее отклонение для  $\lambda_C=0.2$  Мпк,  $\lambda_C=1$  Мпк и  $\lambda_C=5$  Мпк соответственно. Для больших расстояний  $D\gg\lambda_C$  отклонения подчиняются уравнению 1.

Соотношения для средних отклонений космических лучей, представленные в этом разделе, хорошо известны [68–70]. Однако усреднение может скрывать важные свойства распространения КЛПВЭ на заданном расстоянии от источника. В следующем разделе мы обсудим двумерное распределение потока КЛПВЭ на сфере вокруг источника и его зависимость от параметров турбулентного магнитного поля.

## 1.2 Плотность потока КЛПВЭ на сфере вокруг источника

Угловое распределение космических лучей вокруг исходного направления от источника, усредненное по азимутальному углу, исследовалось в работе [49]. Распространение изначально параллельных космических лучей в Галактике как

в регулярных, так и в турбулентных полях изучалось в [50,51].

Однако двумерные срезы распределения плотности космических лучей, распространяющихся от источника, никогда не изучались. В этом разделе мы исследуем зависимость двумерного распределения космических лучей на сфере вокруг источника от их энергии E, расстояния от источника D, а также от длины когерентности турбулентного магнитного поля  $\lambda_C$ . Поскольку напряжённость поля B вырождена с энергией, мы явно изучаем зависимость только от трёх указанных параметров.

Мы начнем с упрощенной модели источника, изотропно испускающего протоны во всех направлениях. Весь объём вокруг источника заполнен однородным турбулентным магнитным полем. Предположим также, что параметры магнитного поля и энергия частиц выбраны так, что отклонения после прохождения расстояния в несколько длин корреляции малы, но не пренебрежимо малы. В этой модели можно было бы ожидать, что распределение точек прибытия КЛП-ВЭ на сфере радиуса  $D > \lambda_C$  останется изотропным, поскольку отклонения частиц, изначально направленных в разные стороны, статистически независимы в случайном магнитном поле. Однако, как мы покажем ниже, это верно только в том случае, если радиус сферы значительно превышает длину корреляции. С другой стороны, если радиус сферы составляет порядка нескольких длин корреляции, распределение частиц на сфере становится существенно анизотропным на промежуточных угловых масштабах.

Физическую причину возникновения неоднородностей при распространении в турбулентном поле можно понять аналитически. В [51] показано, что в случае изначально параллельного пучка протонов неоднородности в распределении частиц вызваны флуктуациями ротора магнитного поля вдоль траекторий соседних частиц. Опираясь на формализм, разработанный в работе [51] в диссертации выведена модифицированная формула для усиления потока для случая расходящегося пучка частиц.

Рассмотрим две частицы, смещенные на векторы  $\Delta \vec{x}_i,\,i=1,2$  относительно

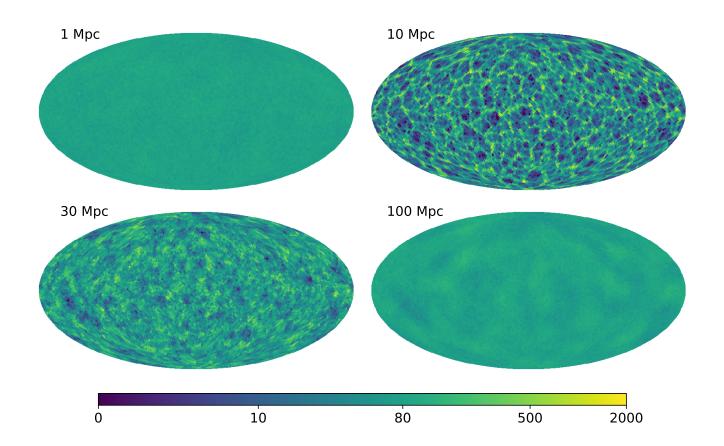


Рис. 7: Распределение космических лучей по сфере вокруг источника. Можно видеть, что анизотропия среднего масштаба сначала увеличивается, а затем размывается. Разные панели представляют разные радиусы сферы: 1 Мпк, 10 Мпк, 30 Мпк и 100 Мпк соответственно. Напряжённость магнитного поля B=1 н $\Gamma$ , длина корреляции  $\lambda_C=0.3$  Мпк, энергия протона E=10 ЭэВ. Карты неба построены в логарифмическом масштабе, а среднее число частиц на пиксель равно 80.

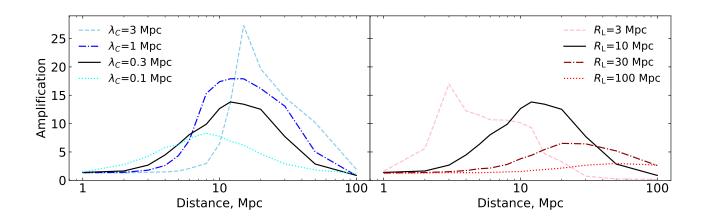


Рис. 8: Изменение потока с увеличением расстояния, усредненная по пяти самым ярким точкам на сфере. Левая панель: Увеличение потока по сравнению со средним значением потока на сфере в зависимости от расстояния до источника для фиксированного ларморовского радиуса  $R_L=10$  Мпк для нескольких длин когерентности  $\lambda_C=0.1,0.3,1,3$  Мпк. Правая панель: тот же коэффициент усиления при фиксированной длине когерентности  $\lambda_C=0,3$  Мпк для нескольких ларморовских радиусов  $R_L=3,10,30,100$  Мпк.

некой опорной траектории  $\vec{x_0}$ . Если расстояние между частицами меньше длины корреляции, эволюция вектора смещения  $\Delta \vec{x_i}$  следует Уравнению 4.1 из [72]:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Delta \vec{x}_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{Zec}{E} \left( \frac{\mathrm{d}\vec{x}_0}{\mathrm{d}t} \times \Delta \vec{B}_i(\vec{x}_0) + \frac{\mathrm{d}\Delta \vec{x}_i}{\mathrm{d}t} \times \vec{B}(\vec{x}_0) \right)$$
(2)

что является прямым следствием уравнения Лоренца. Здесь Ze- заряд частицы, c- скорость света, а  $\Delta \vec{B}_i(\vec{x}_0) \equiv \vec{B}(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}_i) - \vec{B}(\vec{x}_0)$ . Для расчёта изменения потока рассмотрим две частицы, смещенные относительно опорной в перпендикулярных направлениях  $\Delta y$  и  $\Delta z$ . Изменение потока обратно пропорционально изменению площади  $A \propto \Delta \vec{x}_1 \times \Delta \vec{x}_2$ , стягиваемой этими векторами смещения. Для изначально параллельного пучка частиц площадь между частицами оказывается линейно зависящей от ротора магнитного поля как следует из Уравнению 4.2 из [72]:

$$A(D) = A_0 \left( 1 - \frac{Ze}{E} \int_0^D (D - s) \left( \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} \right) \right)$$
 (3)

где s — параметр вдоль траектории.

В случае расходящегося пучка уравнение (3) следует модифицировать из-за иной геометрии пучка, что определяет другие начальные условия. Мы использовали эти начальные условия и вывели уравнение для расходящегося пучка:

$$A(D) = A_0 \left( 1 - \frac{Ze}{E} \int_0^D s \left( 1 - \frac{s}{D} \right) (\operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s}) \right)$$
 (4)

Следует отметить, что уравнения справедливы только для малого усиления  $(A(D)-A_0)/A_0\ll 1$  и малых отклонений частиц.

#### 1.3 Численное моделирование плотности потока КЛПВЭ

Уравнение 4 дает прямое предсказание для усиления потока, которое можно проверить численно. Действительно, если  $N_0$  — среднее число частиц, прошедших через данный пиксель, то число частиц N, фактически попавших в данный пиксель, соответствует усилению потока. Переписывая уравнение 4 в терминах числа частиц, мы приходим к соотношению, которое можно проверить непосредственно в численных симуляциях:

$$\frac{N - N_0}{N_0} = \frac{1}{R_L} \left[ \frac{\int_0^D s \left( 1 - \frac{s}{D} \right) \left( \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} \right)}{B} \right], \tag{5}$$

где  $R_L$  — ларморовский радиус.

Мы используем публично доступные коды CRbeam [53,71] и CRPropa [54,73] для распространения космических лучей. Все взаимодействия и космологическое расширение Вселенной отключены. Частицы испускались изотропно и распространялись до достижения сферы заданного радиуса D. Для каждой частицы сохраняются её начальное направление, конечное направление и конечное положение на сфере. Полученные выходные данные обрабатываются с помощью пакета healpy [66,74].

Использование двух кодов позволяет моделировать турбулентное магнитное поле двумя разными способами. В CRbeam магнитное поле генерируется как сумма плоских волн со случайными фазами и направлениями [67], и его точное значение пересчитывается на лету перед каждым следующим шагом при распространении частицы. В CRPropa, напротив, поле предварительно рассчитывается на сетке, и его значение задается интерполяцией между узлами сетки. В обоих кодах мы генерируем магнитное поле с колмогоровским спектром и минимальным масштабом в 100 раз меньше максимального.

Во всех наших симуляциях CRbeam и CRPropa дали согласующиеся результаты. Учитывая тот факт, что генерация магнитных полей и распространение частиц в этих кодах осуществляются совершенно разными способами, это повышает достоверность результатов.

Для первого теста мы установили напряжённость магнитного поля B=1 нГс,  $\lambda_C=1$  Мпк и энергию протонов E=10 ЭэВ. Радиус конечной сферы был выбран равным D=5 Мпк. Результаты показаны на рисунках 5 и 6. Верхняя панель рисунка 5 показывает количество частиц в каждом пикселе карты неба healpy. Ожидаемое среднее число частиц  $N_0$  в каждом пикселе равно 1600, а цветовая шкала настроена на диапазон 800 - 2400 частиц, что соответствует относительному отклонению 0.5 от среднего. Нижняя панель показывает расчёт интеграла от ротора магнитного поля, т.е. значение пикселя соответствует правой части уравнения 4, вычисленному вдоль радиуса сферы, направленного к центру данного пикселя. Цветовая шкала также настроена на диапазон -0.5 - 0.5, что позволяет проводить попиксельное сравнение графиков. Видно, что положения флуктуаций плотности частиц совпадают с флуктуациями интеграла правой части уравнения 4.

Это также четко видно на Рис. 6, где относительное усиление числа частиц в пикселе показано как функция интеграла 4, вычисленного в направлении этого пикселя. Одна точка на графике представляет один пиксель healpy, а черная прямая линия соответствует теоретическому предсказанию уравнения 4. Вбли-

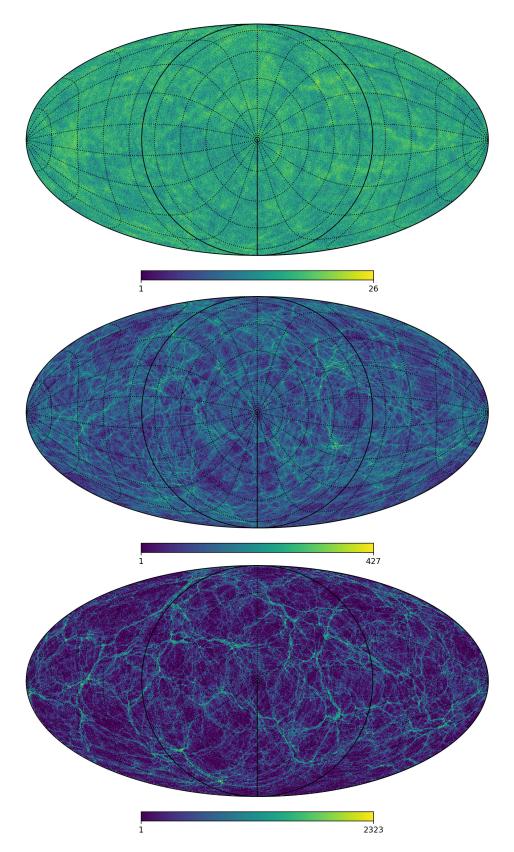


Рис. 9: Распределение КЛПВЭ на сфере радиусом 10 Мпк. Магнитное поле было отключено после 1,3,10 корреляционных длин для панелей сверху вниз, соответственно. Мы видим, что глобальная структура создается после прохождения первых 2-3 длин корреляции, затем она просто усиливается и становится контрастнее.

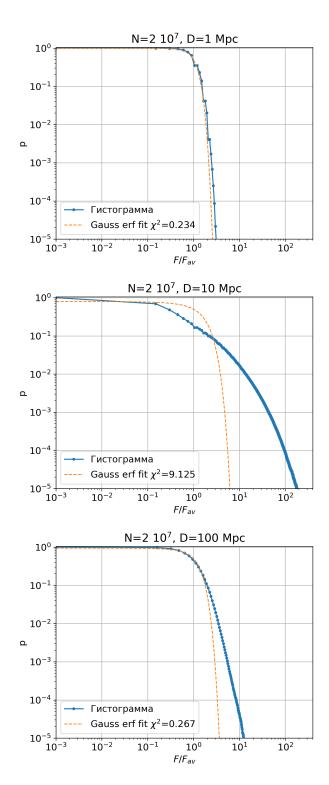


Рис. 10: Совокупная вероятность прибытия с потоком выше заданного значения в единицах среднего потока на сфере для наблюдателя, находящегося на расстоянии 1 Мпк (верхняя панель), 10 Мпк (средняя панель) и 100 Мпк (нижняя панель) от источника. На расстоянии, близком к ларморовскому радиусу, распределение сильно отличается от гауссового.

зи нуля точки следуют теоретическому линейному закону, однако в области больших значений интеграла усиление становится значительно сильнее.

На Рис. 7 представлена эволюция анизотропий промежуточного масштаба в распределении космических лучей на сфере в зависимости от расстояния до источника для ларморовского радиуса  $R_L = 10$  Мпк (при B = 1 нГс и E = 10 ЭэВ) и длины когерентности  $\lambda_C = 0.3$  Мпк. Левая верхняя панель показывает почти изотропное распределение для D = 1 Мпк от источника. На расстоянии 10 Мпк (правая верхняя панель) анизотропия наиболее сильна и четка, затем к 100 Мпк она затухает (см. нижние панели).

На Рис. 8 мы показываем, как поток, усредненный по пяти самым ярким пятнам на сфере, изменяется в зависимости от расстояния до источника при изменении двух параметров: ларморовского радиуса  $R_L$  и длины когерентности  $\lambda_C$ . На левой панели мы фиксируем ларморовский радиус  $R_L=10$  Мпк и изучаем зависимость усиления от расстояния для нескольких длин когерентности  $\lambda_C=0.1,0.3,1.3$  Мпк. Видно, что с увеличением длины когерентности максимум усиления достигается на большем расстоянии от источника, но варьируется в пределах 0.8 и 1.5  $R_L$ . Для правой панели Рис. 8 длина когерентности фиксирована  $\lambda_C=0.3$  Мпк, и изучается зависимость усиления от расстояния для нескольких ларморовских радиусов  $R_L=3,10,30,100$  Мпк. Во всех случаях усиление потока как функция расстояния возрастает до максимума на расстоянии от источника около 1-2 ларморовских радиусов  $R_L$ , а затем падает до среднего значения после примерно 10  $R_L$ .

На Рис. 9 мы показываем карту неба с плотностью КЛПВЭ на фиксированном радиусе сферы вокруг источника. На этом рисунке показан пример КЛПВЭ с E=10 ЭэВ, распространяющегося в турбулентном магнитном поле с напряжённостью B=1 нГс и масштабом когерентности  $\lambda_C=1$  Мпк. При таком поле и энергии космических лучей мы ожидаем, что максимальная анизотропия в распределении КЛПВЭ будет достигнута на 10 длинах корреляции, т.е. на расстоянии D=10 Мпк. Это расстояние до источника соответствует нижней пане-

ли. Шкала под рисунком показывает соответствие цвета плотности космических лучей в структурах. Можно выделить три типа структур: узлы с наибольшей плотностью, нити и пустоты с наименьшей плотностью. Отметим, что типичный размер домена магнитного поля с  $\lambda_C=1$  Мпк имеет угловой масштаб 6-10 градусов на этой карте и соответствует мелким деталям. Однако наиболее заметными и хорошо видимыми являются структуры промежуточного масштаба с типичным размером около 60 градусов. Чтобы понять угловой масштаб этих структур, мы показали на Рис. 9 плотность КЛПВЭ на D=10 Мпк, но когда магнитное поле обнулялось вне сфер радиусом 1 и 3 Мпк, см. верхнюю и среднюю панели соответственно. Видно, что большая часть глобальной структуры, наблюдаемой на расстоянии 10 Мпк, формируется при прохождении первых 3 длин корреляции от источника, её физический размер соответствовал длине корреляции в то время. В дальнейшем структура в основном лишь усиливается.

Ясно, что наблюдатель находится только в одной заданной точке на сфере. Случайным образом меняя его местоположение, мы вычисляем кумулятивную вероятность наблюдения потока с интенсивностью выше заданного значения, что показано на Рис. 10. Ось х нормирована на среднюю плотность на сфере. Мы построили кумулятивную вероятность на расстоянии 1, 10 и 100 Мпк от источника, от верхней панели к нижней соответственно, для  $\lambda_C=1$  Мпк, B=1 нГс и E=10 ЭэВ. Как на малых, так и на больших расстояниях распределение вероятностей похоже на гауссово. Однако на средней панели оно сильно отличается от гауссова. Вероятность получить поток ниже среднего составляет 80%. На этом расстоянии от источника начальный поток, вероятно, уменьшится, например, в 10 раз с вероятностью около 20%. Вероятность усиления на порядок составляет всего 2%.

Наконец, мы проверили, что появление каустикоподобных структур не зависит от конкретных параметров спектра магнитного поля. Сначала мы убедились, что наши результаты устойчивы к изменению отношения максимального и минимального масштабов турбулентности. Мы уменьшили размер наимень-

шей волны на порядок и убедились, что результаты не изменились. Во-вторых, мы заменили турбулентное магнитное поле с колмогоровским спектром на поле, состоящее из ячеек размером, равным длине когерентности. В каждой ячейке поле однородно с напряжённостью B, но направление случайным образом меняется между ячейками. Повторяя моделирование в таком магнитном поле, мы увидели, что каустики возникают и в этом случае.

### 2 Изображения источников космических лучей

# 2.1 Моделирование изображений источников космических лучей

Для получения изображений и спектров источников КЛПВЭ мы опираемся на численное моделирование распространения КЛПВЭ. Наша процедура моделирования обычно состоит из двух шагов. На первом шаге мы распространяем КЛПВЭ в турбулентных межгалактических магнитных полях, отслеживая их пути до достижения границы нашей Галактики. На втором шаге мы рассматриваем влияние галактического магнитного поля и строим изображения в положении Земли.

Для межгалактического распространения мы используем 3D Монте-Карло код CRbeam<sup>4</sup> [53], который позволяет учитывать отклонения КЛПВЭ в магнитных полях и взаимодействия с реликтовым излучением (РИ) и межгалактическим фоновым излучением. Общая настройка этих моделирований такая же, как в предыдущей главе. А именно, мы рассматриваем источник КЛПВЭ, окруженный однородным турбулентным магнитным полем с фиксированной напряжённостью и длиной корреляции. Основное отличие заключается в том, что источник испускает КЛПВЭ не изотропно, а в форме направленного конуса с заданным углом раствора и направлением оси (таким образом, изотропный источник является частным случаем с углом раствора равным  $\pi$ ). Во всех моделированиях мы сохраняем плоский профиль конуса. Другая важная модификация заключается в том, что мы фиксируем частицы, когда они попадают на малую сферическую область наблюдения, представляющую нашу галактику. Радиус наблюдателя выбирался равным 100, 200 или 1000 кпк, последний для случаев магнитных пустот. Как только частица попадает в область наблюдения, мы записываем её энергию, импульс и положение на сфере. Впоследствии

<sup>4</sup>https://github.com/okolo/mcray

мы используем эту информацию для восстановления изображения источника.

CRbeam представляет турбулентное магнитное поле со спектром Колмогорова как сумму плоских волн со случайными направлениями и фазами, следуя методу [67]. Плотность числа волн равномерна в логарифмической шкале по волновому числу. Мы фиксируем количество волн равным 463, причём самая большая волна в 100 раз больше самой маленькой. Меньшее количество волн может привести к нежелательному эффекту, когда волна с наибольшей длиной волны доминирует в отклонении КЛПВЭ. С другой стороны, большее количество волн увеличивает время расчёта. В предыдущей главе мы проверили, что существование каустикоподобных структур в пространственном распределении КЛПВЭ не зависит ни от метода генерации турбулентного магнитного поля, ни от его спектра. Поэтому мы считаем, что наши результаты устойчивы к техническим параметрам генераторов магнитного поля, таким как количество мод и минимальный масштаб турбулентности. Мы сохраняем одно и то же начальное значение генератора псевдослучайных чисел (seed) для генерации магнитного поля во всех моделированиях в рамках статьи и используем OpenMP для ускорения многопроцессорных вычислений.

Напряжённость магнитного поля была установлена B=1 нГс, а длина корреляции  $\lambda_{\rm c}=1$  Мпк. Магнитное поле с такой  $\lambda_{\rm c}$  может быть получено в результате эволюции первичного МГМП с изначально инвариантным степенному спектру, как было показано в [75]. В большинстве моделирований мы распространяем заряженные частицы с жёсткостью R=10 ЭВ. Поскольку все рассматриваемые источники находятся на расстояниях менее 100 Мпк, а в большинстве случаев на расстояниях порядка 20-30 Мпк, мы пренебрегаем взаимодействиями КЛПВЭ с фоновыми полями.

Хотя расстояния достаточно малы, чтобы пренебречь взаимодействиями, они велики по сравнению с размером области наблюдения. Учитывая тот факт, что сфера наблюдателя имеет радиус в десятки и сотни килопарсек, а заряженные частицы испытывают значительные отклонения в МГМП с  $B \propto 1$  нГс,

возникает проблема нацеливания на область наблюдения. На практике это означает, что большинство моделируемых частиц пролетят мимо области наблюдения, что увеличивает количество вычислительного времени, потраченного впустую. Это связано как с уменьшением углового размера области наблюдения с расстоянием от источника, так и с тем, что статистически чаще область наблюдения оказывается в областях пространства, где поток космических лучей от источника ниже, чем ожидается по стандартному закону обратных квадратов (см.первую главу). Это обуславливает необходимость алгоритма нацеливания, который мог бы уменьшить количество промахов.

Эта проблема уже изучалась ранее. Например, в [76] для увеличения вероятности попадания в область наблюдения начальные направления импульса частиц выбираются из распределения фон Мизеса-Фишера с параметрами, корректируемыми по мере увеличения числа зарегистрированных частиц. Здесь мы разрабатываем новый алгоритм нацеливания для оптимизации производительности.

Наш алгоритм итеративный, и на каждом последующем шаге он в значительной степени опирается на результаты, полученные на предыдущем. Суть алгоритма заключается в том, что если мы знаем начальные направления, которые привели к попаданиям с расстояния до области наблюдения  $D_{\rm i}$ , то мы предполагаем, что успешные начальные направления для немного большего расстояния  $D_{\rm i+1}$  будут близки к старым.

Шаг і алгоритма работает следующим образом. Расстояние до области наблюдения устанавливается равным  $D_{\rm i}$ , и частицы испускаются в конусе с углом раствора  $\alpha_{\rm i}$  и направлением оси  $\theta_{\rm i}$ ,  $\phi_{\rm i}$ . Частицы испускаются равномерно внутри конуса, и моделирование останавливается, как только количество частиц, попавших в цель, достигает некоторого предопределенного значения, которое мы устанавливаем  $N_{\rm hit} \approx 100$ . После этого параметры конуса пересчитываются для использования на следующей итерации. Новое направление оси конуса соответствует среднему начальному направлению захваченных частиц, а новый угол раствора устанавливается равным трём максимальным углам между начальным направлением захваченных частиц и новой осью конуса. Масштабный коэффициент угла раствора конуса и шаг увеличения расстояния (который устанавливался как доля ларморовского радиуса частицы) определялись эмпирически и не имеют строгого математического обоснования. В конечном итоге алгоритм завершается, когда  $D_{\rm i}$  достигает желаемого расстояния до источника.

Все результаты, представленные в этой главе (см. Раздел 2.2), были получены с использованием этого алгоритма, что значительно сократило время вычислений. Коэффициент ускорения по сравнению с изотропным источником можно приблизительно оценить как отношение полного телесного угла к телесному углу конечного конуса  $4\pi/2\pi(1-\cos(\theta))$ . Для большинства наших моделирований это соотношение составляет порядка 100.

Наконец, мы учитываем отклонения в галактическом магнитном поле и получаем изображения источников, видимые наблюдателем в положении Земли внутри Галактики. Мы используем галактические магнитные линзы, предоставляемые СRPгора3 [54, 73], что позволяет эффективно использовать обратные моделирования для учёта галактических отклонений в прямых моделированиях КЛПВЭ. В частности, мы применяем линзу, рассчитанную для модели JF12 галактического магнитного поля ('JF12full') [73] с включенными когерентной и турбулентной компонентами [77, 78]. Турбулентная компонента предполагалась со спектром Колмогорова с длиной корреляции 60 пк и напряжённостью, следующей модели турбулентного поля JF12 [78].

#### 2.2 Регистрируемые наблюдателем потоки КЛПВЭ

В предыдущей главе мы показали, что в режиме малого угла рассеяния КЛП-ВЭ от точечного источника образуют каустическую структуру на расстоянии, равном десяткам длин когерентности от источника. Эта структура состоит из областей с плотностью КЛПВЭ выше или ниже средней изотропной. Из-за фор-

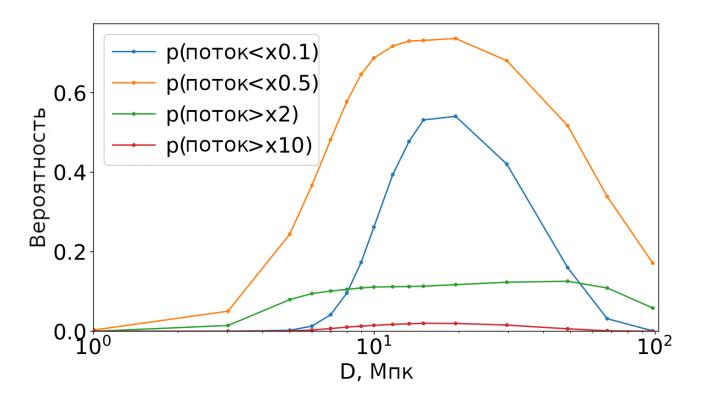


Рис. 11: Вероятность нахождения наблюдателя в области с потоком выше или ниже среднего в зависимости от расстояния до источника для частиц с жёсткостью  $R=10~\mathrm{ЭB}.$ 

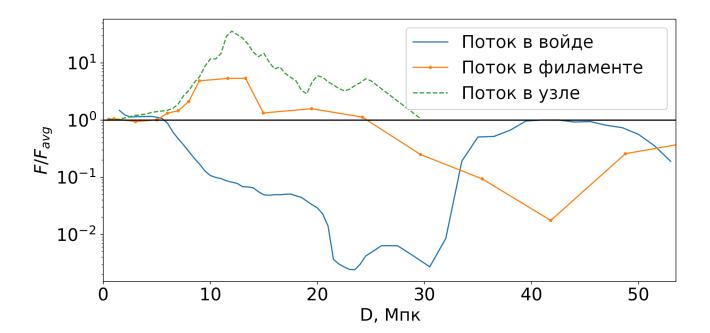


Рис. 12: Пример относительного избытка и дефицита потока в зависимости от расстояния до источника для частиц с жёсткостью R=10 ЭВ. Для этого рисунка мы определяем магнитную пустоту, филамент и узел на расстоянии 10 Мпк.

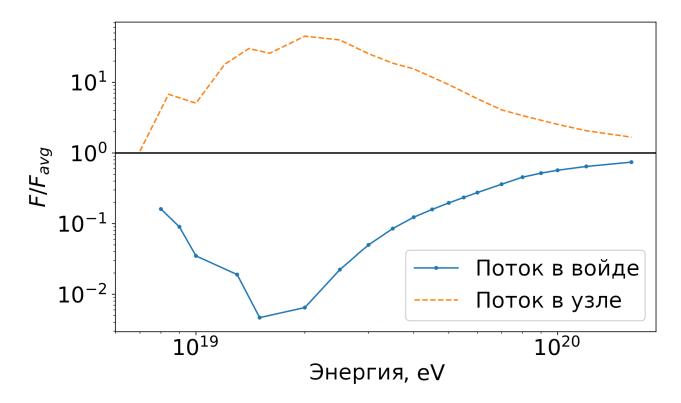


Рис. 13: Энергетический спектр протонов источника, видимый наблюдателем, расположенным в узле на расстоянии  $D=20~{
m Mnk}$  и в пустоте на  $D=30~{
m Mnk}$ . Каждый спектральный бин нормирован на средний поток при той же энергии.

мы этих областей на сфере вокруг источника мы назвали их магнитными узлами, филаментами и пустотами. Типичный поток в узлах в 10 раз больше, чем в среднем, в филаментах как минимум в 2 раза больше, а в магнитных пустотах как минимум в два раза меньше. Под средним мы подразумеваем ожидаемый поток от источника, предполагая, что он следует закону обратных квадратов.

Мы изучили распространение протонов КЛПВЭ с энергиями  $E > 10^{19}$  эВ в турбулентном межгалактическом магнитном поле с напряжённостью B = 1 нГс и длиной когерентности  $\lambda_{\rm c} = 1$  Мпк. Для таких параметров магнитного поля нетривиальная структура КЛПВЭ существует на всех расстояниях в ближних крупномасштабных структурах (LSS) до 100 Мпк, откуда большая часть КЛПВЭ наивысших энергий приходит в детекторы Земли.

Сначала мы исследуем свойства наблюдаемого сигнала в зависимости от энергии КЛПВЭ и расстояния до источника. На Рис. 11 показана вероятность того, что на заданном расстоянии от источника поток КЛПВЭ отличается от среднего в 2 или 10 раз. Видно, что наиболее вероятно, что поток от данного источника будет ниже среднего. Для 10 % источников он как минимум в два раза выше, а в 75% случаев он в 2 раза ниже. Только в нескольких процентах случаев (расположенных в магнитных узлах относительно наблюдателя) поток может быть усилен в 10 раз и более  $F/F_{\rm av} > 10$ . С другой стороны, в 55 % случаев поток может быть уменьшен в 10 раз  $F/F_{\rm av} < 10$  в магнитных пустотах. Это означает, что для большинства источников поток КЛПВЭ останется прежним или будет снижен, в то время как только для небольшой доли источников он будет значительно увеличен, давая возможность наблюдать «горячее пятно» в спектре КЛПВЭ. Средний поток через сферу остается одинаковым на всех расстояниях. Частицы не взаимодействуют при распространении в магнитном поле.

На Рис. 12 показан пример потоков частиц R=10 ЭВ относительно среднего в направлениях на магнитный узел, пустоту и филамент в зависимости от расстояния от источника. Для этого рисунка магнитный узел, пустота и фи-

ламент определены на расстоянии 10 Мпк, см. Рис. 9 ранее. Черная сплошная линия обозначает средний поток  $F = F_{\rm av}$ . Видно, что в примере на Рис. 12 филамент и узел имеют максимальный поток на расстоянии 12 Мпк от источника и исчезают на расстоянии 25-30 Мпк. Более того, филамент превращается в пустоту между 30 Мпк и 50 Мпк от источника.

Наконец, мы построили энергетический спектр источника для наблюдателя, расположенного в узле и в пустоте, см. Рис. 13. Видно, что наблюдаемый поток значительно отклоняется от среднего при энергиях около 10-30 ЭэВ. Эти отклонения исчезают как при низких, так и при высоких энергиях. При наивысших энергиях ~ 100 ЭэВ отклонения становятся слишком малы, чтобы создавать достаточно сильные вариации потока. С другой стороны, в низкоэнергетической части спектра распространение КЛПВЭ становится диффузным, что также размывает филаментарную структуру.

### 2.3 Регистрируемые наблюдателем изображения источников КЛПВЭ

Хотя область наблюдения довольно мала, её ненулевой размер может вызвать искажение изображения источника. Эффект более выражен для источников, расположенных ближе к наблюдателю. Частицы, попадающие на противоположные края области наблюдения, будут иметь слегка различающиеся направления прихода, если смотреть из центра сферы, что не связано с магнитным полем. Мы учитываем этот эффект и компенсируем его, чтобы исключить из наблюдаемой картины. Для этого к направлению прихода частиц, попавших в область наблюдения, добавляется небольшая поправка:  $\vec{p}_{end} \rightarrow \vec{p}_{end} - \frac{\vec{r}_{end}}{|\vec{r}_{end} - \vec{r}_{source}|}$ , где  $\vec{r}_{end}$  - конечные координаты частицы (область наблюдения будет в координатах (0,0,0)),  $\vec{r}_{source}$  - координаты источника.

Мы изучили два случая расположения наблюдателя на Рис.14: наблюдатель в филаменте и наблюдатель в узле. Относительно наблюдателя это выглядит

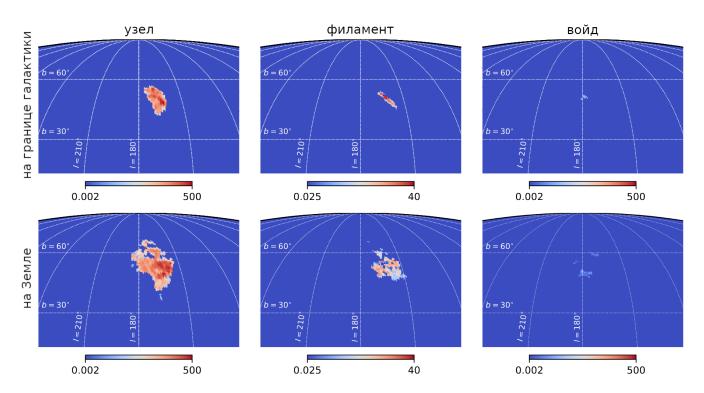


Рис. 14: Изображения источников, видимые наблюдателем, расположенным в узле и филаменте, рассчитанные на краю Галактики и после прохождения ГМП. Цвет кодирует количество попаданий в данный пиксель. В обоих случаях собственная светимость источника подобрана так, чтобы общее число событий от источника, наблюдаемых на Земле, соответствовало кумулятивному числу событий ТА, попадающих внутрь круга горячего пятна радиусом 25° (44 события для 15-летних данных ТА SD [79]). Синий цвет соответствует уровню фона, который для наглядности показан равномерным.

как две разные среды межгалактического магнитного поля. Мы не рассматривали наиболее вероятный случай магнитной пустоты (это около ~ 70%, см. Рис.11), так как в этом случае поток чрезвычайно мал и труден для обнаружения. Случай узла дает яркое размытое пятно, но этот случай наименее вероятен. Таким образом, если у нас есть много источников КЛПВЭ вокруг нас на расстоянии десятков Мпк, мы видим лишь немногие из них. Относительно большинства источников мы окажемся в пустотах. Источники на больших расстояниях (более 100 Мпк) дают изотропный вклад, который уменьшается с расстоянием и создает однородный фон.

На верхних правых панелях Рис.14 можно увидеть изображения источников на краю нашей Галактики, т.е. до прохождения через галактическое магнитное поле. Когда наблюдатель расположен в магнитном филаменте (верхняя правая панель), изображение очень вытянуто. Эта форма изображения не случайна и является отличительной особенностью положения наблюдателя. Направление, вдоль которого вытянуто изображение, всегда перпендикулярно магнитному филаменту, что является результатом фокусировки частиц. Чтобы поток в филаменте был усилен, магнитное поле должно искривлять траектории КЛП-ВЭ в направлении, перпендикулярном самому филаменту. Следовательно, для наблюдателя в филаменте частицы будут приходить с направлений, перпендикулярных филаменту. Напротив, в случае наблюдателя в магнитном узле изображение более симметрично.

После прохождения галактического магнитного поля могут образовываться размытые пятна, как на нижних панелях Рис.14. Более конкретно, положения источников на небе были выбраны таким образом, чтобы соответствовать направлению горячего пятна ТА до линзирования ГМП. Количественное предсказание, безусловно, будет зависеть от конкретной используемой модели ГМП, но общая картина останется прежней. Неопределённость отклонений КЛПВЭ в ГМП недавно анализировалась в [58] (в частности, см. Рис. 18 в [58]).

Чтобы проанализировать размер пятна, мы повторили анализ, проведенный

коллаборацией Telescope Array для поиска горячего пятна [40], с набором событий, случайно сгенерированных с использованием плотности, видимой наблюдателем, расположенным в узле и филаменте, как показано на нижних панелях Рис.14. Мы обнаружили, что максимальная статистика Ли-Ма в обоих случаях соответствует радиусу передискретизации 15 градусов, что того же порядка величины, что и размеры известных горячих пятен в данных по КЛПВЭ. Наблюдение горячего пятна согласуется с обсуждаемым сценарием. В то же время, согласно последнему сценарию, некоторые источники попадают в пустоту, что требует повышенной общей плотности источников.

Мы провели анализ для частиц с жёсткостью 10-20 ЭВ. Поскольку КЛПВЭ при наивысших энергиях, согласно данным Оже, могут состоять в основном из промежуточных ядер, распространение частиц таких жёсткостей соответствовало бы распространению ядер с энергиями в Z раз большими в тех же магнитных полях. В частности, КЛПВЭ с E > 57 ЭэВ соответствовали бы ядрам СNО (углерод, азот, кислород). Как было показано, например, в [80], ядра СNО требуемых энергий могут достигать нас с расстояний до 70 Мпк.

# 3 Изображения источников КЛПВЭ в режиме фокусировки

Хотя распространение КЛПВЭ в целом определяется полной трёхмерной структурой МГМП, мы работаем здесь в приближении, когда КЛПВЭ выходят из своих областей источников в области со сравнительно слабым (по сравнению с магнитным полем вокруг источников) турбулентным МГМП с амплитудой  $B \sim 1$  нГс, которое мы для простоты предполагаем полностью однородным между наблюдателем и источником.

Чтобы построить изображения источников КЛПВЭ, какими они появляются после распространения через МГМП, мы выполнили серию численных симуляций. Для 3D-моделирования распространения КЛПВЭ использовался общедоступный Монте-Карло код CRbeam <sup>5</sup> [53]. МГМП предполагалось пространственно однородным с колмогоровским спектром  $P_B(k)$  в диапазоне длин волн от  $L_{\text{max}}$  до  $L_{\text{min}} = L_{\text{max}}/100$ :

$$P_B(k) = \begin{cases} 0 & k < k_{\min} \\ A \left(\frac{k_{\min}}{k}\right)^m & k_{\min} \le k \le k_{\max} \\ 0 & k_{\max} < k \end{cases}$$
 (6)

где  $k_{\min} = 2\pi/L_{\max}$ ,  $k_{\max} = 2\pi/L_{\min}$ , а A - константа нормировки, определяемая условием, что среднеквадратичное (RMS) значение магнитного поля равно B. Показатель степени был зафиксирован на m = 11/3, как для колмогоровской турбулентности. Оно генерировалось по методу [67], с числом мод порядка  $10^3$ , распределённых логарифмически по длине волны. Результирующее магнитное поле бездивергентно. Конкретная случайная реализация МГМП определяется начальным значением генератора псевдослучайных чисел (seed).

Для согласованности с предыдущими исследованиями мы представляем наши результаты в терминах корреляционной длины МГМП  $L_{\rm c}$ . Мы определяем

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>https://github.com/okolo/mcray

 $L_{\rm c}$  следуя [51] как

$$L_{\rm c} = \frac{1}{2} L_{\rm max} \frac{n-1}{n} \frac{1 - (L_{\rm min}/L_{\rm max})^n}{1 - (L_{\rm min}/L_{\rm max})^{n-1}}.$$
 (7)

В случае колмогоровской турбулентности, рассматриваемом в этой статье, где n=5/3, это дает  $L_{\rm c}\approx L_{\rm max}/5$  при  $L_{\rm min}\ll L_{\rm max}.$ 

Мы предположили, что источник испускает КЛПВЭ равномерно внутри конуса с заданным углом раствора и направлением оси, указывающим на наблюдателя. Угол раствора выбирался достаточно большим, чтобы гарантировать независимость результатов от его конкретного значения. Потери энергии КЛП-ВЭ не учитывались, поскольку во всех симуляциях расстояние между источником и наблюдателем не превышает  $D=10~{
m Mnk}$ . Жёсткость была фиксирована  $R=10~{\rm ЭВ}.~{\rm Для}$  ускорения вычислений мы использовали идею метода прицеливания КЛПВЭ, разработанного в предыдущей главе [57], вместе с ОрепМР для многопроцессорной обработки. Этот метод позволяет подобрать параметры конуса излучения (угол раствора и направление) на основе предыдущих моделирований в той же реализации МГМП. Для дальнейшего ускорения расчётов мы использовали многопроцессорную обработку с OpenMP, которая позволяет использовать несколько ядер процессора на одной материнской плате. Мы рассматриваем только стационарные источники, предполагая, что период активности источника намного превышает временную задержку КЛПВЭ в МГМП и  $\Gamma M \Pi$ .

Каждая симуляция останавливается, когда N=1000 частиц попадают на сферического наблюдателя, радиус которого был установлен  $R_{\rm obs}=100$  кпк. Значение N было выбрано для обеспечения достаточной статистики событий. Прежде чем полученный набор событий может быть использован для дальнейшего анализа, необходимо применить поправку для учёта конечного размера наблюдателя. Детали этой поправки были описаны в предыдущей главе [57], но её суть можно проиллюстрировать на случае прямолинейного распространения фотонов. После поправки изображение источника фотонов на наблюдателе

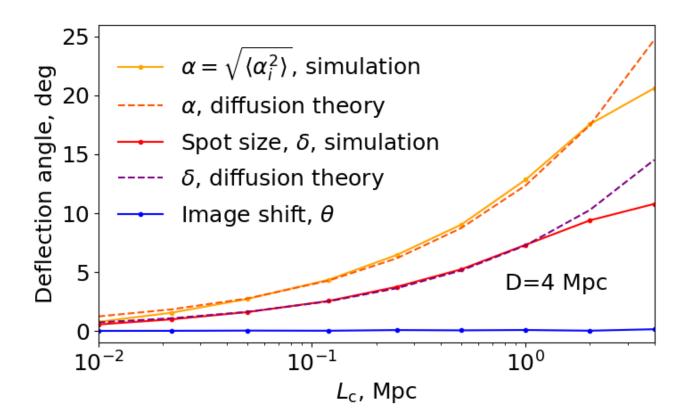


Рис. 15: Угол отклонения частиц  $\alpha$ , размер изображения  $\delta$  и смещение изображения  $\theta$  как функция корреляционной длины МГМП для случая некоррелированных траекторий (каждая частица распространялась в своей собственной реализации МГМП, подробности см. в Разд.3.1). Сплошные линии представляют среднеквадратичные (RMS) значения, полученные из численного моделирования с использованием уравнения (11). Пунктирные линии показывают аналитические ожидания, основанные на (12). Напряжённость МГМП была фиксирована B=1.5 нГс, а расстояние до источника установлено D=4 Мпк.

конечного размера должно выглядеть точечным.

Учитывая набор обнаруженных событий, испущенных с начальными импульсами  $\mathbf{p}_{i0}$ , изображение источника на наблюдателе определяется их конечными импульсами,  $\mathbf{p}_{i}$ , где индекс i обозначает отдельные частицы. Для последующих расчётов полезно ввести безразмерные единичные векторы, представляющие направления импульсов,  $\mathbf{n}_{i0} = \mathbf{p}_{i0}/p_{i0}$  и  $\mathbf{n}_{i} = \mathbf{p}_{i}/p_{i}$ , и единичный вектор  $\mathbf{s}$ , направленный от источника к наблюдателю. Среднее конечное направление частиц,  $\mathbf{n}_{\text{avg}}$ , тогда задается как

$$\mathbf{n}_{\text{avg}} = \frac{\langle \mathbf{n}_i \rangle}{|\langle \mathbf{n}_i \rangle|},\tag{8}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по набору событий  $\langle \mathbf{n}_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i$ . Угол отклонения  $\alpha_i$  частицы определяется как

$$\cos \alpha_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i0},\tag{9}$$

в то время как угол  $\delta_i$  между конечным направлением частицы и средним конечным направлением задается как

$$\cos \delta_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{\text{avg}}. \tag{10}$$

Усредняя по набору обнаруженных частиц, мы приходим (см. В) к следующим трём углам

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_{\rm rms} = \sqrt{\langle \alpha_i^2 \rangle} \\ \delta = \delta_{\rm rms} = \sqrt{\langle \delta_i^2 \rangle} \\ \theta = \arccos(\mathbf{n}_{\rm avg} \cdot \mathbf{s}) \end{cases}$$
(11)

каждый из которых имеет ясный физический смысл. Угол  $\alpha$  соответствует среднеквадратичному углу отклонения частицы от её начального направления,  $\delta$  представляет угловой размер изображения источника, как его видит наблюдатель, а  $\theta$  соответствует среднему смещению всего изображения от истинного направления на источник. Ниже мы численно вычисляем эти углы, используя уравнения (11) для различных конфигураций магнитного поля.

#### 3.1 Приближение некоррелированных траекторий

Мы начинаем с простейшего случая некоррелированных траекторий. В этом приближении каждая траектория КЛПВЭ рассматривается как полностью независимая от других. Технически мы реализуем это, пересчитывая МГМП с новым начальным значением seed для каждой частицы, сохраняя фиксированными положения источника и наблюдателя. Для частиц, испущенных точечным источником, это приближение не совсем реалистично, так как частицы, изначально близко направленные, распространяются через почти одно и то же магнитное поле на коротких расстояниях от источника. Однако оно становится справедливым на больших расстояниях от источника, где частицы забывают свои начальные условия. Более того, в этом приближении углы  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\theta$  могут быть вычислены аналитически, что полезно для проверки численных результатов.

Классические аналитические результаты для случая некоррелированных траекторий были получены в [68–70]. Воспроизводя их для спектра магнитного поля, описанного выше, и предполагая, что расстояние распространения намного больше максимального масштаба МГМП  $D\gg L_{\rm max}$ , мы получаем

мального масштаоа МГ МП 
$$D \gg L_{\rm max}$$
, мы получаем 
$$\begin{cases} \alpha = 3.74^{\circ} \cdot Z \left[ \frac{B}{1 \, {\rm nG}} \right] \left[ \frac{E}{10^{19} \, {\rm eV}} \right]^{-1} \left[ \frac{D}{10 \, {\rm Mpc}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{L_{\rm max}}{500 \, {\rm kpc}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \delta = \alpha / \sqrt{3} \\ \theta = 0. \end{cases}$$
 (12)

Заметим, что в то время как выражение для  $\alpha$  зависит от предполагаемого спектра магнитного поля, соотношение между размером изображения  $\delta$  и  $\alpha$  является общим и выполняется для любого магнитного поля в режиме  $D\gg L_{\rm max}{}^6$ . Отсутствие смещения изображения ( $\theta=0$ ) также является общим результатом и следует из наличия осевой симметрии. Для удобства чтения в Приложении мы

 $<sup>^6</sup>$ Режим  $D\gg L_{\rm max}$  может практически не существовать, например, для магнитного поля с масштабноинвариантным спектром, где для любого расстояния D значительная плотность энергии магнитного поля будет содержаться в модах с длинами волн L>D.

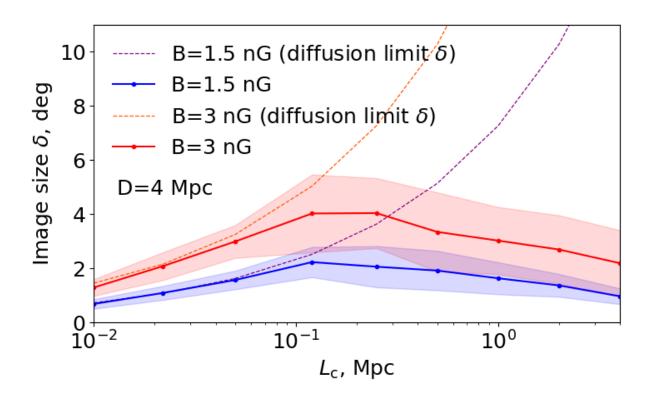


Рис. 16: Угловой размер  $\delta$  изображения источника КЛПВЭ как функция корреляционной длины МГМП для реалистичного случая, когда частицы испускаются в одну и ту же реализацию МГМП (подробности см. в Разд. 3.2). Сплошные линии указывают средний размер изображения, а затененные области - его стандартное отклонение. И среднее, и стандартное отклонение были рассчитаны по 30 различным реализациям МГМП. Для сравнения пунктирные линии показывают аналитическое ожидание для случая некоррелированных траекторий, основанное на (12). Расстояние до источника было установлено D=4 Мпк.

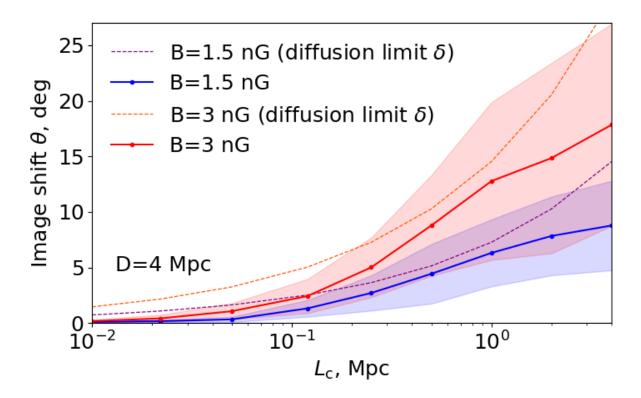


Рис. 17: То же, что и Рис. 16, но здесь сплошные линии и затененные области представляют среднее и стандартное отклонение смещения изображения  $\theta$ . Пунктирные линии такие же, как на Рис. 16, и показывают аналитическое ожидание размера изображения  $\delta$  для некоррелированных траекторий, основанное на (12).

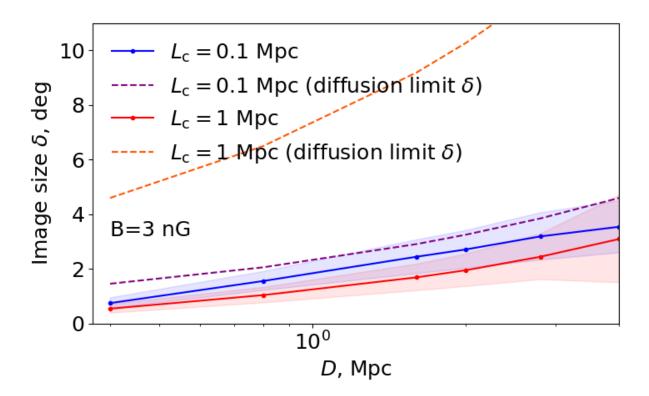


Рис. 18: Угловой размер  $\delta$  изображения источника КЛПВЭ как функция расстояния до источника для реалистичного случая, когда частицы испускаются в одну и ту же реализацию МГМП (подробности см. в Разд. 3.2). Разные цвета соответствуют разным корреляционным длинам МГМП. Напряжённость МГМП была фиксирована B=3 нГс. Как и на Рис. 16, сплошные линии и затененные области представляют среднее и стандартное отклонение размеров изображений, а пунктирная линия соответствует (12).

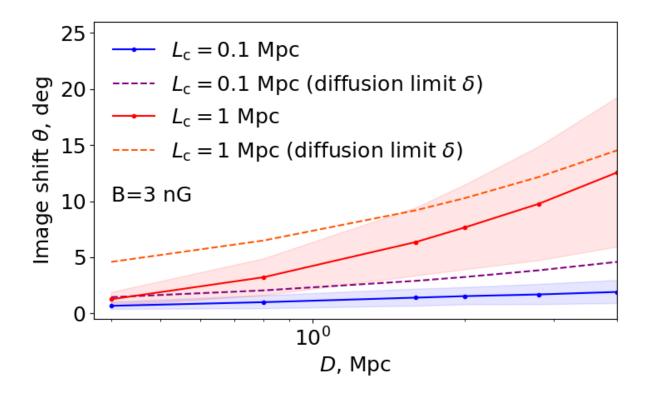


Рис. 19: То же, что и Рис. 18, но здесь сплошные и пунктирные линии указывают среднее и стандартное отклонение смещения изображения  $\theta$ .

повторно выводим выражения для  $\alpha$  и  $\delta$  для магнитного поля с произвольным спектром, следуя [68–70].

Сравнение теоретических предсказаний из (12) и результатов, полученных из численного моделирования с использованием уравнений(11), показано на Рис. 15. Видно, что как угол отклонения частиц  $\alpha$ , так и размер изображения  $\delta$ , рассчитанные численно, близко соответствуют теоретическим кривым для  $L_{\rm c} \lesssim D/5$ , когда режим случайного блуждания полностью развит. Кроме того, смещение изображения в целом равно нулю ( $\theta=0$ ), как и ожидалось. Полное согласие между теорией и численным моделированием подтверждает корректность алгоритма построения изображения, что позволяет нам использовать его для более реалистичного случая коррелированных траекторий, обсуждаемого в следующем разделе.

## 3.2 Смещение изображений источников в турбулентном ${\rm M}\Gamma {\rm M}\Pi$

В этом разделе мы повторяем моделирование из предыдущего раздела с той лишь разницей, что все частицы теперь распространяются через одну и ту же реализацию магнитного поля. Как показано ниже, это приводит к ненулевому углу  $\theta$ , определенному в уравнении (11), и вызывает смещение всего изображения источника. С другой стороны, это вводит зависимость результатов от конкретного положения источника и наблюдателя в данной реализации МГ-МП. Для исследования этого эффекта мы выполнили 30 симуляций, каждая со своей реализацией МГМП.

Результаты моделирования для источника на расстоянии D=4 Мпк представлены на Рис. 16 и 17. На Рис. 16 показана зависимость размера изображения  $\delta$  от длины корреляции МГМП  $L_{\rm c}$ . Размер изображения приближается к теоретическому предсказанию для некоррелированных траекторий, заданному уравнением (12), только для малых длин корреляции,  $L_{\rm c}\lesssim 0.1$  Мпк. Этот режим соответствует распространению частиц примерно через  $D/L_{\rm c}\gtrsim 100$  магнитных доменов. В отличие от этого, при больших длинах корреляции ( $L_{\rm c}>0.1$  Мпк) размер изображения остается малым и даже уменьшается с ростом  $L_{\rm c}$ . Это можно сравнить со случаем некоррелированных траекторий (см. Рис. 15), где размер изображения начинает следовать теоретическому предсказанию после прохождения всего  $\sim 5$  магнитных доменов.

С другой стороны, как видно на Рис. 16, существует ненулевое смещение всего изображения источника. При малых длинах корреляции смещение стремится к нулю, но быстро увеличивается с ростом  $L_{\rm c}$ . Примечательно, что когда длина корреляции находится в диапазоне  $\sim 0.1–1$  Мпк, смещение изображения, усредненное по 30 реализациям, приближается к ожидаемому значению для размера изображения в случае некоррелированных траекторий. Аналогичное поведение наблюдается на Рис. 18 и 19, которые показывают размер изображения  $\delta$  и

смещение изображения  $\theta$  в зависимости от расстояния до источника. Размер изображения меньше, чем в случае некоррелированных траекторий, в то время как смещение изображения значительно.

Эта зависимость размера и смещения изображения от длины корреляции и расстояния до источника объясняется тем, что частицы распространяются через одну и ту же реализацию магнитного поля. Вблизи источника частицы, испущенные в сходных начальных направлениях, проходят почти через одно и то же магнитное поле, испытывая одинаковое отклонение. Это приводит к смещению всего изображения при сохранении его малого размера. В то же время, средний угол смещения следует ожидаемому значению размера изображения. Только на большом расстоянии, когда частицы проходят через ~ 100 магнитных доменов и «забывают» свои начальные условия, восстанавливается приближение некоррелированных траекторий.

Может возникнуть вопрос, как тогда достигается высокое согласие с известной диффузионной теорией в первой главе (Рис. 3 и 4). Объяснение заключается в том, что для этих симуляций источник испускал космические лучи изотропно во все стороны и за счёт разных направлений получилась имитация разных реализаций МГМП, что и дало согласие.

# 3.3 Интерпретация избытка в области Центавра A как потока от источников Центавр A и M83

В качестве конкретного применения эффекта смещения изображений источников КЛПВЭ, вызванного МГМП, мы рассматриваем интерпретацию горячего пятна КЛПВЭ в области Центавра A, наблюдаемого при энергиях  $E > 4 \cdot 10^{19}$  эВ [38, 39]. Это наиболее значимая анизотропия на промежуточных угловых масштабах, обнаруженная обсерваторией Оже. Область Центавра A, как определено в анализе Оже, содержит источники, принадлежащие к двум потенциально важным классам ускорителей КЛПВЭ. Во-первых, она включает ближайшую

радиогалактику Центавра A (Cen A) [81]. Во-вторых, в ней находятся две галактики со вспышкой звёздообразования: NGC 4945 и M83. Без учёта отклонений в ГМП (Галактическом Магнитном Поле) два последних источника (NGC 4945 и M83) вносят наибольший вклад в корреляции направлений прихода событий Оже с галактиками со вспышкой звёздообразования [61]. С другой стороны, результаты численного моделирования указывают, что Центавр А может быть источником значительной доли наблюдаемого потока КЛПВЭ [60,82,83].

Как показано в [62, 84, 85], учёт отклонений в ГМП может значительно усложнить картину, смещая видимые положения потенциальных источников. Например, в модели ГМП JF12 [77,78] изображение Центавра А смещено примерно на  $20^{\circ}$  от положения наблюдаемого избытка. Далее мы возвращаемся к проблеме происхождения избытка в области Центавра А, теперь также учитывая возможное дополнительное отклонение, вызванное МГМП. Мы принимаем модель JF12 в качестве эталонной модели ГМП, однако наши выводы не зависят от конкретного выбора модели ГМП. Аналогичные результаты могут быть получены с использованием более новых моделей UF23 и KST24. Мотивированные измерениями массового состава КЛПВЭ обсерваторией Оже [86], которые предполагают, что поток при самых высоких энергиях доминируется частицами в узком диапазоне жёсткостей, мы рассматриваем моноэнергетические частицы с жёсткостью 10 ЭВ. Однако мы отмечаем, что интерпретация дипольной анизотропии, наблюдаемой Оже, включает более низкие значения жёсткости [87, 88]. Мы проверили, что наши результаты устойчивы к небольшим изменениям жёсткости. Повторив моделирование для частиц с  $R=5~\mathrm{9B}$ и R=7 ЭВ, мы подтвердили, что результирующие изображения аналогичны полученным для R = 10 ЭВ.

Сначала мы построили изображения М83 и Центавра А, какими они появились бы на Земле, учитывая только отклонения в ГМП. Для этого мы использовали метод галактического магнитного линзирования, реализованный в СRPropa3 [54, 73], который обеспечивает эффективное прямое прослеживание

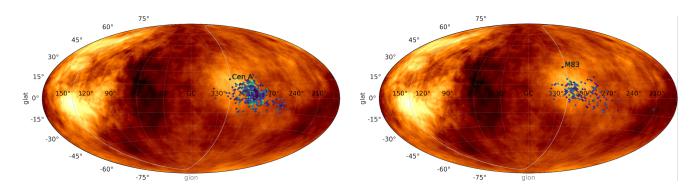


Рис. 20: Модельное предсказание направлений прихода ядер углерода с E=60 ЭэВ после распространения в МГМП с напряжённостью 1.5 нГс и длиной когерентности  $\lambda_c=0.05$  Мпк и после распространения в ГМП в модели ЈГ12. Направления прихода событий наложены на полную карту потока КЛПВЭ, измеренную Обсерваторией Пьера Оже и Телескопной решеткой (Telescope Array) [35], горячие пятна ТА и Оже обозначены яркими областями. Для левого рисунка Центавр А является источником наблюдаемых КЛПВЭ. Для правого рисунка М83 является источником наблюдаемых КЛПВЭ. Горячие пятна ТА ярче, чем пятно Центавра А от Оже, в то время как последнее имеет более высокую статистическую значимость, чем первые, из-за большего воздействия Оже.

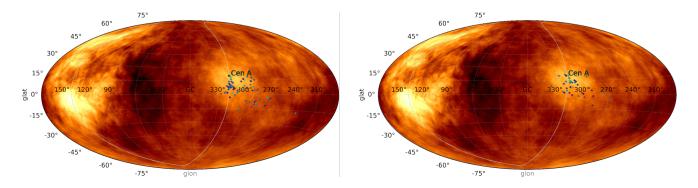


Рис. 21: Направления прихода ядер углерода с E=60 ЭэВ из Центавра А. Левый рисунок: МГМП 1.5 нГс и  $\lambda_c=3.35$  Мпк с ГМП и специальным подбором случайной реализации МГМП. Правый рисунок: МГМП 3 нГс и  $\lambda_c=0.3$  Мпк с ГМП. В обоих случаях была выбрана конкретная реализация МГМП, в которой смещение изображения, индуцированное ГМП, компенсируется смещением в МГМП таким образом, что результирующее изображение остается центрированным на наблюдаемом горячем пятне.

траекторий КЛПВЭ, используя предварительно рассчитанные магнитные линзы методом обратного прослеживания для модели ГМП JF12. Эти линзы включают регулярную и турбулентную компоненты модели JF12 [77,78].

Изображение Центавра A, наблюдаемое на Земле, показано на левой панели Puc. 20. В модели JF12 регулярная компонента ГМП смещает частицы с жёсткостью 10 ЭВ (что соответствует ядрам углерода при энергиях  $E \gtrsim 4 \cdot 10^{19}$  эВ) примерно на 20° от положения избытка в сторону галактической плоскости и меньших галактических долгот. Турбулентная компонента вызывает дополнительное угловое размытие вокруг центра изображения. В отличие от этого, изображение M83 идеально совпадает с положением области избытка, как показано на правой панели Puc. 20.

Важно отметить, что структура ГМП в направлении избытка Центавра А остается слабо ограниченной, и между различными моделями ГМП существуют значительные различия, как обсуждается в [89, 90]. Таким образом, учитывая текущие неопределённости в моделировании ГМП, нельзя сделать однозначного вывода относительно М83 как источника наблюдаемого избытка. Кроме

того, МГМП с относительно большой длиной корреляции  $L_{\rm c} \gtrsim 0.1$  Мпк вносит дополнительную неопределённость. Это иллюстрируется на Рис. 21, который показывает изображения Центавра А после учёта отклонений как в ГМП, так и в МГМП. Как видно из рисунка, результирующие изображения Центавра А перекрываются с положением наблюдаемого избытка.

Это совпадение достигается выбором конкретной реализации МГМП, в которой изображение Центавра А сначала отклоняется в сторону положения М83, а затем дополнительно смещается ГМП, чтобы совпасть с местоположением наблюдаемого избытка. Таким образом, совместный эффект МГМП и ГМП все еще позволяет Центавра А быть источником горячего пятна в данных.

Поскольку предложенная идея основывается на взаимном сокращении смещений, индуцированных ГМП и МГМП, полезно оценить вероятность того, что это произойдёт случайно для данной модели ГМП. Угловое расстояние между М83 и центром Центавром А составляет приблизительно 12°. Согласно нашим моделированиям, вероятность смещения изображения, превышающего  $10^\circ$ , составляет около 13% для МГМП с B=3 нГс и  $L_{\rm c}=0.3$  Мпк. Дополнительная степень свободы обеспечивается вращением МГМП вокруг прямой линии, соединяющей наблюдателя и источник, и вероятность того, что смещение произойдёт в требуемом направлении, составляет приблизительно  $15^\circ/360^\circ \approx 4\%$ , где  $15^\circ$  — это приблизительно половина размера избытка Центавра А. Таким образом, общая вероятность для случая, показанного на правой панели Рис. 21, произойти случайно, составляет примерно 0.5%.

### 4 Заключение

В настоящей диссертационной работе изучено распространение КЛПВЭ в турбулентном межгалактическом магнитном поле в режиме малого угла рассеяния. Обнаружено, что даже если КЛПВЭ испускаются источником изотропно, они распределяются анизотропно на расстоянии порядка ларморовского радиуса и снова изотропно на расстоянии в 10 раз большем. В анизотропной области космические лучи фокусируются в нитевидную, каустикоподобную структуру на сфере. Угловое расположение этих областей определяется структурой магнитного поля на нескольких длинах когерентности от источника.

Для малых отклонений распределение космических лучей на сфере может быть описано аналитически и поток космических лучей прямо пропорционально интегралу от ротора магнитного поля вдоль направления от источника до наблюдателя. Симуляции и сравнение карт неба вокруг источника показывают, что такой аналитический вывод хорошо описывает отклонение космических лучей в линейном режиме, но не подходит для сильных отклонений. Относительный размер усиленных областей зависит от длины когерентности магнитного поля. Это анизотропное распределение может влиять на спектр КЛПВЭ на расстояниях от источника, сравнимых с ларморовским радиусом. Кроме того, это также может приводить к формированию горячих пятен в распределении космических лучей по небу у наблюдателя, а также влиять на соотношение между количеством наблюдаемых горячих пятен и плотностью источников КЛП-ВЭ [55].

Также исследовано влияние межгалактических и галактических магнитных полей на изображения близлежащих источников в данных по КЛПВЭ. В частности, была исследована возможность объяснения горячих пятен в данных по КЛПВЭ вкладом близлежащих источников. Здесь мы изучили зависимость профиля плотности от расстояния до источника и от энергии для фиксирован-

ных свойств магнитного поля с напряжённостью 1 нГс и длиной когерентности 1 Мпк. Мы обнаружили, что для большого диапазона расстояний и энергий КЛПВЭ каустикоподобная структура остается схожей на небе. Это означает, что для заданного положения галактики (например, Млечный Путь) в этой структуре мы получаем усиление (или ослабление) исходного потока источника.

Окончательные изображения источников в случае каустикоподобного режима после распространения качественно и количественно зависят от положения наблюдателя и, если наблюдатель находится в магнитном узле, то источник выглядит как размытое пятно, при нахождении в филаменте источник приобретает вытянутую форму, а после применения галактического магнитного поля изображения источника могут достигать размера в 25°. Структуры магнитного узла, и филамента могут создавать конечные горячие пятна в изображении КЛПВЭ, если же наблюдатель находится в магнитном войде, то вклад данного источника в наблюдаемый поток КЛПВЭ сильно снижен.

Для заданного класса источников КЛПВЭ можно ожидать, что большинство близлежащих источников расположены в магнитных пустотах, и мы видим лишь немногие источники, расположенные в филаментах. С малой вероятностью можно увидеть даже более яркое усиление потока источника в узле.

Таким образом, в этой работе показано, как могут формироваться горячие пятна в данных по КЛПВЭ. В том числе были получены примеры изображений источников в направлении горячего пятна ТА. Показано, что после распространения в галактическом и межгалактическом магнитных полях изображение источника может выглядеть как наблюдаемое пятно в данных по КЛПВЭ. Мы провели анализ для частиц 10 ЭВ, что соответствовало бы ядрам СNО для энергий горячего пятна в данных ТА и Оже E > 57 ЭэВ. Расположение источника на расстоянии нескольких десятков Мпк все ещё возможно для ядер CNO таких энергий [57].

И наконец было исследовано распространение КЛПВЭ в режиме фокусировки в турбулентном межгалактическом магнитном поле (МГМП) от их источников до Млечного Пути. В этом режиме КЛПВЭ первоначально отклоняются сходными структурами магнитного поля при прохождении первых нескольких длин когерентности турбулентного МГМП. В результате, на расстоянии примерно в десять длин когерентности от источника, КЛПВЭ имеют тенденцию фокусироваться в области повышенной плотности на большей части небесной сферы. Эти области повышенной плотности следуют локальной структуре  $\vec{B}$  в начальных ячейках турбулентного поля. Следовательно, стандартное предположение упрощенной теории диффузии о том, что каждая частица распространяется через независимую реализацию МГМП, становится несправедливым.

Наиболее важный результат заключается в том, что в режиме фокусировки, на расстоянии от источника менее ста длин когерентности магнитного поля  $(D < 100L_C)$ , нарушается стандартное ожидание теории диффузии, согласно которому распределение космических лучей обладает вращательной симметрией с центром, совпадающим с положением источника. Вопреки предсказаниям теории диффузии, наблюдаемые изображения источников КЛПВЭ оказываются как меньше ожидаемых, так и могут быть значительно смещены относительно фактических положений источников.

Режим фокусировки, в котором нарушается стандартное ожидание теории диффузии, также использовался для поиска возможного источника избытка космических лучей — горячего пятна вблизи Центавр А. Был учтён вклад как МГМП, так и ГМП в отклонение КЛПВЭ. Предположим, что МГМП является турбулентным с напряжённостью  $B \sim 1$  нГс и длиной корреляции  $L_{\rm c} < 5$  Мпк. Мы объединили моделирование распространения КЛПВЭ в МГМП с распространением в Галактике Млечный Путь, для которой использовали модель JF12 [77,78].

В ходе такой симуляции были получены три основных результата. Во-первых, в согласии с результатами [84, 85, 91] в модели JF12 ядра углерода КЛПВЭ с

энергиями E = 60 ЭэВ, пришедшие от Центавра A, отклоняются в сторону галактической плоскости, в результате чего распределение направлений их прихода на Земле не согласуется с наблюдаемым избытком вблизи Центавра А. Во-вторых, если вместо Центавра А рассматривать галактику М83 как источник тех же КЛПВЭ, распространение через ГМП отклоняет частицы в сторону наблюдаемого положения избытка Центавра А. В-третьих, когда МГМП имеет длину корреляции, сравнимую с расстоянием до источника или меньшую на порядок величины, возникает режим фокусировки. В этом режиме Центавра А всё ещё может быть истинным источником КЛПВЭ при некоторых реализациях МГМП, наблюдаемых в его окрестности: а именно, КЛПВЭ сначала отклоняются МГМП в направление положения вблизи М83, а затем перенаправляются ГМП обратно в сторону Центавра А. Если корреляционная длина на порядок меньше расстояния до Центавра А, то вероятность такого исхода мала и при магнитном поле 3 нГ и корреляционной длине 0.3 Мпк составляет примерно 0.5%. Этот сценарий подчёркивает критическую роль как ГМП, так и МГМП в интерпретации наблюдаемых направлений прихода КЛПВЭ и идентификации их источников [59].

### Благодарности

Автор выражает особую благодарность Рубцову Григорию Игоревичу за многолетнее руководство, интересные и актуальные задачи, а также за оказанную поддержку и внимание на всех этапах исследования.

Автор выражает благодарность Д.В. Семикозу, А.А. Корочкину, И.И. Ткачёву, П.Г. Тинякову, А.С. Дмитриеву, М.Ю. Кузнецову, И.В. Харуку, А.В. Ядвичук и всем сотрудникам ИЯИ РАН за совместную работу, полезные дискуссии и создание творческой и доброжелательной атмосферы.

### 5 Список сокращений и условных обозначений

КЛПВЭ – космические лучи предельно высоких энергий

 $\mathbf{P}\mathbf{M}$  – реликтовое излучение

 $\Gamma M\Pi$  — галактическое магнитное поле

 $\mathbf{M}\Gamma\mathbf{M}\Pi$  – межгалактическое магнитное поле

 $\mathbf{LSS}$  — крупномасштабная структура Вселенной

**TA** – Telescope Array (обсерватория)

**RMS** – среднеквадратичный

**Cen A** – радиогалактика Центавр А

### Список литературы

- [1] The pierre auger cosmic ray observatory // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2015. Vol. 798. P. 172—213. Access mode: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900215008086.
- [2] The surface detector array of the telescope array experiment / T. Abu-Zayyad, R. Aida, M. Allen et al. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2012. Vol. 689. P. 87–97. Access mode: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900212005931.
- [3] Update on the searches for anisotropies in UHECR arrival directions with the Pierre Auger Observatory and the Telescope Array / Adila Abdul Halim, Pedro Abreu, Marco Aglietta et al. // PoS. -2023. Vol. ICRC2023. P. 521.
- [4] Kido E. Current status of the tax4 surface detectors // EPJ Web of Conferences. -2023.-04.-Vol. 283.-P. 06003.
- [5] Abdul Halim A. et al. Search for photons above 1018 eV by simultaneously measuring the atmospheric depth and the muon content of air showers at the Pierre Auger Observatory // Phys. Rev. D. -2024. Vol. 110, no. 6. P. 062005. -2406.07439.
- [6] Abreu P. et al. Search for Photons above  $10^{19}$  eV with the Surface Detector of the Pierre Auger Observatory // JCAP. 2023. Vol. 05. P. 021. 2209.05926.
- [7] Abbasi R. U. et al. Constraints on the diffuse photon flux with energies above  $10^{18}$  eV using the surface detector of the Telescope Array experiment // Astropart. Phys. -2019. Vol. 110. P. 8-14. 1811.03920.

- [8] Aab A. et al. Probing the origin of ultra-high-energy cosmic rays with neutrinos in the EeV energy range using the Pierre Auger Observatory // JCAP.  $2019.-\text{Vol.}\ 10.-\text{P.}\ 022.-1906.07422.$
- [9] Alvarez-Muñiz J. Searches for UHE neutrinos and upward-going showers at the Pierre Auger Observatory // PoS. -2025. Vol. UHECR2024. P. 025.
- [10] Greisen K. End to the cosmic ray spectrum? // Phys. Rev. Lett. 1966. Vol. 16. P. 748-750.
- [11] Zatsepin G. T., Kuzmin V. A. Upper limit of the spectrum of cosmic rays // JETP Lett. 1966. Vol. 4. P. 78–80. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.4,114(1966)].
- [12] Kampert K.-H., Watson A. A., Watson A. A. Extensive Air Showers and Ultra High-Energy Cosmic Rays: A Historical Review // Eur. Phys. J. H. 2012. Vol. 37. P. 359–412. 1207.4827.
- [13] Abbasi R. U. et al. First observation of the Greisen-Zatsepin-Kuzmin suppression // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 101101. astroph/0703099.
- [14] Abraham J. et al. Observation of the suppression of the flux of cosmic rays above  $4 \times 10^{19} \text{eV}$  // Phys. Rev. Lett. -2008. -Vol. 101. -P. 061101. -0806.4302.
- [15] Abu-Zayyad T. et al. The Cosmic Ray Energy Spectrum Observed with the Surface Detector of the Telescope Array Experiment // Astrophys. J. Lett. 2013. Vol. 768. P. L1. 1205.5067.
- [16] Aab A. et al. Features of the Energy Spectrum of Cosmic Rays above  $2.5 \times 10^{18}$  eV Using the Pierre Auger Observatory // Phys. Rev. Lett. 2020. Vol. 125, no. 12. P. 121106. 2008.06488.

- [17] Eichmann B., Kachelrieß M., Oikonomou F. Explaining the UHECR spectrum, composition and large-scale anisotropies with radio galaxies // JCAP. 2022.- Vol. 07, no. 07. P. 006. 2202.11942.
- [18] Kuznetsov M. Y. A nearby source of ultra-high energy cosmic rays // JCAP. 2024. Vol. 04. P. 042. 2311.14628.
- [19] Aab A. et al. Combined fit of spectrum and composition data as measured by the Pierre Auger Observatory // JCAP. 2017. Vol. 04. P. 038. [Erratum: JCAP 03, E02 (2018)]. 1612.07155.
- [20] Abreu P. et al. Bounds on the density of sources of ultra-high energy cosmic rays from the Pierre Auger Observatory // JCAP. 2013. Vol. 05. P. 009. 1305.1576.
- [21] Magnetic fields and faraday rotation in clusters of galaxies / M. Murgia, F. Govoni, L. Feretti et al. // Astronomy & Astrophysics. 2004. Aug. Vol. 424, no. 2. P. 429–446. Access mode: http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20040191.
- [22] Pshirkov M. S., Tinyakov P. G., Urban F. R. New limits on extragalactic magnetic fields from rotation measures // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 116, no. 19. P. 191302. 1504.06546.
- [23] Revision of upper bound on volume-filling intergalactic magnetic fields with LOFAR / A. Neronov, F. Vazza, S. Mtchedlidze, E. Carretti // arXiv e-prints.  $2024.-\mathrm{Dec.}-\mathrm{P.~arXiv:}2412.14825.-2412.14825.$
- [24] Webar M. S., Abed Y., Horns D. Discovery of femto gauss intergalactic magnetic fields towards mkn 501.-2025.-2509.11996.
- [25] Discovery of magnetic fields along stacked cosmic filaments as revealed by radio

- and X-ray emission / T. Vernstrom, G. Heald, F. Vazza et al. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. -2021. Aug. Vol. 505, no. 3. P. 4178-4196. 2101.09331.
- [26] McCall M. L. A Council of Giants // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. -2014. May. Vol. 440, no. 1. P. 405–426. 1403.3667.
- [27] Taylor A. M., Matthews J. H., Bell A. R. UHECR echoes from the Council of Giants // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. -2023. Vol. 524, no. 1. P. 631–642. -2302.06489.
- [28] Ultrahigh Energy Nuclei in the Galactic Magnetic Field / G. Giacinti, M. Kachelriess, D. V. Semikoz, G. Sigl // JCAP. — 2010. — Vol. 08. — P. 036. — 1006.5416.
- [29] Ultrahigh Energy Nuclei in the Turbulent Galactic Magnetic Field / G. Giacinti, M. Kachelriess, D. V. Semikoz, G. Sigl // Astropart. Phys. — 2011. — Vol. 35. — P. 192–200. — 1104.1141.
- [30] Farrar G. R. The Galactic Magnetic Field and Ultrahigh-Energy Cosmic Ray Deflections // Comptes Rendus Physique. — 2014. — Vol. 15. — P. 339–348. — 1405.3680.
- [31] di Matteo A., Tinyakov P. How isotropic can the UHECR flux be? // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. -2018. Vol. 476, no. 1. P. 715–723. 1706.02534.
- [32] Observation of a large-scale anisotropy in the arrival directions of cosmic rays above 8  $\times$  10<sup>18</sup> eV / Pierre Auger Collaboration, A. Aab, P. Abreu et al. // Science. 2017. Sep. Vol. 357, no. 6357. P. 1266–1270. 1709.07321.
- [33] Large-scale Cosmic-ray Anisotropies with 19 yr of Data from the Pierre Auger Observatory / A. Abdul Halim, P. Abreu, M. Aglietta et al. // Astrophys.J.— 2024.—Nov.—Vol. 976, no. 1.—P. 48.—2408.05292.

- [34] The UHECR dipole and quadrupole in the latest data from the original Auger and TA surface detectors / P. Tinyakov, J. Kim, M. Kuznetsov et al. // 37th International Cosmic Ray Conference. 2022. Mar. P. 375. 2111.14593.
- [35] Abdul Halim A. et al. Update on the searches for anisotropies in UHECR arrival directions with the Pierre Auger Observatory and the Telescope Array // PoS. -2023. Vol. ICRC2023. P. 521.
- [36] Abdul Halim A. et al. Update on full-sky searches for large- and medium-scale anisotropies in the UHECR flux using the Pierre Auger Observatory and the Telescope Array // PoS. -2025. Vol. UHECR2024. P. 009.
- [37] Arrival directions of cosmic rays above 32 eev from phase one of the pierre auger observatory / P. Abreu, M. Aglietta, J. M. Albury et al. // The Astrophysical Journal. 2022. aug. Vol. 935, no. 2. P. 170. Access mode: https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac7d4e.
- [38] Abreu P. et al. Arrival Directions of Cosmic Rays above 32 EeV from Phase One of the Pierre Auger Observatory // Astrophys. J. -2022. Vol. 935, no. 2. P. 170. -2206.13492.
- [39] Abdul Halim A. et al. An update on the arrival direction studies made with data from the Pierre Auger Observatory // PoS. 2023. Vol. ICRC2023. P. 252.
- [40] Abbasi R. U. et al. Indications of Intermediate-Scale Anisotropy of Cosmic Rays with Energy Greater Than 57 EeV in the Northern Sky Measured with the Surface Detector of the Telescope Array Experiment // Astrophys. J. Lett. 2014. Vol. 790. P. L21. 1404.5890.
- [41] Indications of a Cosmic Ray Source in the Perseus-Pisces Supercluster / Telescope Array Collaboration, R. U. Abbasi, T. Abu-Zayyad et al. // arXiv e-prints. -2021. -Oct. -P. arXiv:2110.14827. -2110.14827.

- [42] Telescope Array Surface Detector Medium-scale Anisotropy Analyses / Jihyun Kim, Dmitri Ivanov, Kazumasa Kawata et al. // PoS. 2025. Vol. UHECR2024. P. 097.
- [43] The Centaurus A ultrahigh-energy cosmic-ray excess and the local extragalactic magnetic field / Hasan Yüksel, Todor Stanev, Matthew D. Kistler, Philipp P. Kronberg // Astrophys. J. 2012. sep. Vol. 758, no. 1. P. 16. Access mode: https://doi.org/10.1088/0004-637x/758/1/16.
- [44] Katz H. et al. Introducing SPHINX-MHD: the impact of primordial magnetic fields on the first galaxies, reionization, and the global 21-cm signal // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. -2021. Vol. 507, no. 1. P. 1254–1282. 2101.11624.
- [45] Jedamzik K., Saveliev A. Stringent Limit on Primordial Magnetic Fields from the Cosmic Microwave Background Radiation // Phys. Rev. Lett. 2019. Vol. 123, no. 2.—P. 021301.—1804.06115.
- [46] Casse F., Lemoine M., Pelletier G. Transport of cosmic rays in chaotic magnetic fields // Phys. Rev. D. -2002. Vol. 65. P. 023002. astro-ph/0109223.
- [47] Giacinti G., Kachelriess M., Semikoz D. V. Filamentary Diffusion of Cosmic Rays on Small Scales // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108. P. 261101. 1204.1271.
- [48] Giacinti G., Kachelriess M., Semikoz D. V. Reconciling cosmic ray diffusion with Galactic magnetic field models // JCAP. -2018.- Vol. 07.-P. 051.-1710.08205.
- [49] Harari D., Mollerach S., Roulet E. Angular distribution of cosmic rays from an individual source in a turbulent magnetic field // Phys. Rev. D. -2016. Vol. 93, no. 6. P. 063002. -1512.08289.
- [50] Harari D., Mollerach S., Roulet E. Magnetic lensing of extremely high-energy

- cosmic rays in a galactic wind // JHEP. 2000. Vol. 10. P. 047. astroph/0005483.
- [51] Lensing of ultrahigh-energy cosmic rays in turbulent magnetic fields / Diego Harari, Silvia Mollerach, Esteban Roulet, Federico Sanchez // JHEP. 2002. Vol. 03. P. 045. astro-ph/0202362.
- [52] Dolag K., Kachelrieß M., Semikoz D. V. UHECR observations and lensing in the magnetic field of the Virgo cluster // JCAP. -2009. Vol. 01. P. 033. 0809.5055.
- [53] Modeling the propagation of very-high-energy  $\gamma$ -rays with the CRbeam code: Comparison with CRPropa and ELMAG codes / O. Kalashev, A. Korochkin, A. Neronov, D. Semikoz // Astron. Astrophys. 2023. Vol. 675. P. A132. 2201.03996.
- [54] Alves Batista R. et al. CRPropa 3.2 an advanced framework for high-energy particle propagation in extragalactic and galactic spaces // JCAP. 2022. Vol. 09. P. 035. 2208.00107.
- [55] Caustic-Like Structures in UHECR Flux after Propagation in Turbulent Intergalactic Magnetic Fields / K. Dolgikh, A. Korochkin, G. Rubtsov et al. // J. Exp. Theor. Phys. -2023. -Vol. 136, no. 6. -P. 704–710. -2212.01494.
- [56] Opening of new windows to the early universe by means of multi-messenger astronomy (brief review) / E. V. Arbuzova, K. A. Dolgikh, A. D. Dolgov et al. // JETP Lett. 2024. Vol. 119. P. 485. [Pisma v ZhETF 119, 481 (2024)]. Access mode: http://jetpletters.ru/ps/dx/10.31857/S1234567824070024.
- [57] Images of the ultra-high energy cosmic rays from point sources / Konstantin Dolgikh, Alexander Korochkin, Grigory Rubtsov et al. //

- Advances in Space Research. -2024. Vol. 74, no. 10. P. 5295–5301. Access mode: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117724008007.
- [58] Unger M., Farrar G. R. The Coherent Magnetic Field of the Milky Way // Accepted for publication in Astrophys.J. -2023.-11.-2311.12120.
- [59] Displacement of ultra-high-energy cosmic ray source images by the intergalactic magnetic field: the cases of cen a and m83 / K. Dolgikh, A. Korochkin, G. Rubtsov et al. // International Journal of Modern Physics A. -0. Vol. 0, no. ja. -P. 2540012. -https://doi.org/10.1142/S0217751X25400123.
- [60] Fornax A, Centaurus A, and other radio galaxies as sources of ultrahigh energy cosmic rays / James H. Matthews, Anthony R. Bell, Katherine M. Blundell, Anabella T. Araudo // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2018. Vol. 479, no. 1. P. L76–L80. 1805.01902.
- [61] Aab A. et al. An Indication of anisotropy in arrival directions of ultra-high-energy cosmic rays through comparison to the flux pattern of extragalactic gamma-ray sources // Astrophys. J. Lett. -2018. Vol. 853, no. 2. P. L29. 1801.06160.
- [62] What can be learnt from UHECR anisotropies observations II. Intermediate-scale anisotropies / Denis Allard, Julien Aublin, Bruny Baret, Etienne Parizot // Astron. Astrophys. — 2024. — Vol. 686. — P. A292. — 2305.17811.
- [63] Bister T. The source of the cosmic-ray excess in the Centaurus region constraints on possible candidates, mass composition and cosmic magnetic fields. -2025.-9.-2509.06594.
- [64] Constraining the Extragalactic Magnetic Field: Auger Data Meet UHECR

- Propagation Modeling / Ala'a AL-Zetoun, Arjen van Vliet, Andrew M. Taylor, Walter Winter. 2025.-6.-2506.16169.
- [65] Fujii T. Rapporteur Talk: CRI // PoS. 2024. Vol. ICRC2023. P. 031. 2401.08952.
- [66] HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere / K. M. Górski, E. Hivon, A. J. Banday et al. // Astrophys.J. 2005. Apr. Vol. 622. P. 759–771. arXiv:astro-ph/0409513.
- [67] Giacalone J., Jokipii J. R. The Transport of Cosmic Rays across a Turbulent Magnetic Field // Astrophys.J. -1999.- Jul. Vol. 520, no. 1. P. 204–214.
- [68] Intergalactic Propagation of UHE Cosmic Rays / Abraham Achterberg, Yves A. Gallant, Colin A. Norman, Donald B. Melrose // arXiv e-prints.— 1999.—Jul.—P. astro-ph/9907060.—astro-ph/9907060.
- [69] Tinyakov P. G., Tkachev I. I. Deflections of cosmic rays in a random component of the Galactic magnetic field // Astroparticle Physics. 2005. Sep. Vol. 24, no. 1-2. P. 32–43. astro-ph/0411669.
- [70] Caprini C., Gabici S. Gamma-ray observations of blazars and the intergalactic magnetic field spectrum // Phys. Rev. D. -2015. Jun. Vol. 91, no. 12. P. 123514. -1504.00383.
- [71] Berezinsky V., Kalashev O. High energy electromagnetic cascades in extragalactic space: physics and features // Phys. Rev. D. -2016. Vol. 94, no. 2.-P. 023007.-1603.03989.
- [72] Harari D., Mollerach S., Roulet E. The Toes of the ultrahigh-energy cosmic ray spectrum // JHEP. 1999. Vol. 08. P. 022. astro-ph/9906309.

- [73] CRPropa 3 a Public Astrophysical Simulation Framework for Propagating Extraterrestrial Ultra-High Energy Particles / Rafael Alves Batista, Andrej Dundovic, Martin Erdmann et al. // JCAP. 2016. Vol. 05. P. 038. 1603.07142.
- [74] healpy: equal area pixelization and spherical harmonics transforms for data on the sphere in python / Andrea Zonca, Leo Singer, Daniel Lenz et al. // Journal of Open Source Software. 2019. Mar. Vol. 4, no. 35. P. 1298. Access mode: https://doi.org/10.21105/joss.01298.
- [75] Evolution of Primordial Magnetic Fields during Large-scale Structure Formation / Salome Mtchedlidze, Paola Domínguez-Fernández, Xiaolong Du et al. // Astrophys. J. -2022. Vol. 929, no. 2. P. 127. 2109.13520.
- [76] Jasche J., van Vliet A., Rachen J. P. Targeting Earth: CRPropa learns to aim // PoS. -2020. Vol. ICRC2019. P. 447. 1911.05048.
- [77] Jansson R., Farrar G. R. A New Model of the Galactic Magnetic Field // Astrophys.J. -2012. Sep. Vol. 757, no. 1. P. 14. 1204.3662.
- [78] Jansson R., Farrar G. R. The Galactic Magnetic Field // The Astrophysical Journal Letters. -2012. Dec. Vol. 761, no. 1. P. L11. 1210.7820.
- [79] Anisotropies in the arrival direction distribution of ultra-high energy cosmic rays measured by the Telescope Array surface detector / Jihyun Kim, Dmitri Ivanov, Kazumasa Kawata et al. // PoS. 2023. Vol. ICRC2023. P. 244.
- [80] Neronov A., Semikoz D., Kalashev O. Limit on the intergalactic magnetic field from the ultrahigh-energy cosmic ray hotspot in the Perseus-Pisces region // Phys. Rev. D. -2023. Vol. 108, no. 10. P. 103008. 2112.08202.

- [81] Biteau J. Stellar mass and star formation rate within a billion light-years.— 2021.—Jul.—Access mode: https://doi.org/10.5281/zenodo.5118697.
- [82] Ultra-High-Energy Cosmic Rays from Radio Galaxies / Björn Eichmann, J. P. Rachen, L. Merten et al. // JCAP. — 2018. — Vol. 02. — P. 036. — 1701.06792.
- [83] Mollerach S., Roulet E. Anisotropies of ultrahigh-energy cosmic rays in a scenario with nearby sources // Phys. Rev. D. -2022. Vol. 105, no. 6. P. 063001. -2111.00560.
- [84] Galactic magnetic deflections and Centaurus A as a UHECR source / Glennys R. Farrar, Ronnie Jansson, Ilana J. Feain, B. M. Gaensler // JCAP. 2013.- Vol. 01.-P. 023.-1211.7086.
- [85] Keivani A., Farrar G. R., Sutherland M. Magnetic Deflections of Ultra-High Energy Cosmic Rays from Centaurus A // Astropart. Phys. 2014. Vol. 61. P. 47–55. 1406.5249.
- [86] Abdul Halim A. et al. Mass Composition from 3 EeV to 100 EeV using the Depth of the Maximum of Air-Shower Profiles Estimated with Deep Learning using Surface Detector Data of the Pierre Auger Observatory // PoS. -2023. Vol. ICRC2023. P. 278.
- [87] Rossoni S., Sigl G. Anisotropy signal of ultrahigh-energy cosmic rays from a structured magnetized universe // Phys. Rev. D. -2025. Vol. 112, no. 2. P. 023015. -2502.19324.
- [88] Bister T., Farrar G. R. Constraints on UHECR Sources and Extragalactic Magnetic Fields from Directional Anisotropies // Astrophys. J. -2024. Vol. 966, no. 1. P. 71. -2312.02645.
- [89] Korochkin A., Semikoz D., Tinyakov P. UHECR deflections in the Galactic

- magnetic field // arXiv e-prints. 2025. Jan. P. arXiv:2501.16158. 2501.16158.
- [90] Bister T., Farrar G. R., Unger M. The Large-scale Anisotropy and Flux (de)magnification of Ultrahigh-energy Cosmic Rays in the Galactic Magnetic Field // Astrophys. J. 2024. Vol. 975, no. 1. P. L21. 2408.00614.
- [91] Farrar G. R., Sutherland M. S. Deflections of UHECRs in the Galactic magnetic field // JCAP. -2019.- Vol. 05.-P. 004.-1711.02730.
- [92] Программа для ЭВМ: Веб-сервер для компоновки и отображения изображений источников космических лучей после линзирования межгалактическим и (опционально) галактическим магнитным полем (свидетельство N2025667031 от 02.07.2025 г.). 2025.
- [93] Segmentation fault with lens.transformModelVector https://github.com/CRPropa/CRPropa3/issues/448. 2023.

## А Приложение 1. Веб-сервер для компоновки и отображения изображений источников КЛП-ВЭ

Данное приложение содержит описание программы для ЭВМ [92], с помощью которой анализировались многие вычисленные заранее симуляции. Описаны технические требования, которые потребовалось учесть при её создания и выбранные решения.

Программа написана на языке Python 3 и позволяет создать веб-интерфейс для компоновки изображений источников космических лучей ультравысоких энергий, предвычисленных заранее с помощью других программ, и состоит из нескольких компонентов:

- 1. FileHelpers.py вспомогательный файл, считывающий готовые файлы симуляции.
- 2. gradioCRpropa.py вспомогательный веб-сервер, применяющий линзирование галактическим магнитным полем по предвычисленным линзам с помощью CRpropa3 [54], который запускается в отдельном программном окружении.
- 3. gradioApp.py основной веб-сервер, сохраняющий предвычисленные данные о видимых на наблюдателе космических лучах и демонстрирующий карты неба с помощью HealPix.

В первую очередь программа создавалась для отображения карт неба от источников космических лучей по ранее сделанным симуляциям. Позже был добавлен функционал для поиска возможных источников космических лучей в области горячего пятна Центавр А. Для анализа возможных источников избытка были заранее сделаны симуляции, где в качестве источника рассматривается

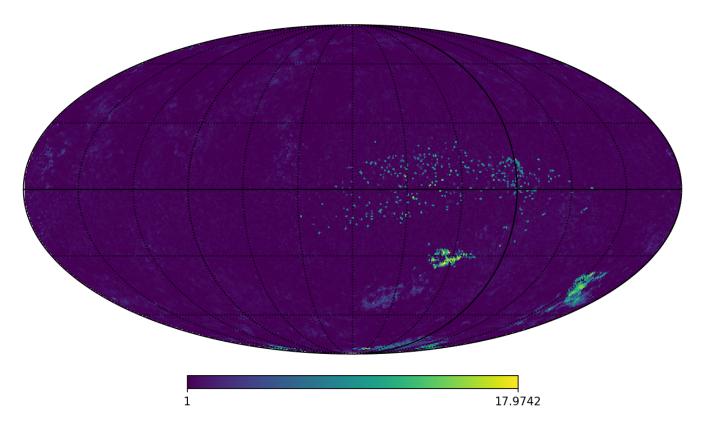


Рис. 22: Изображение, полученное компоновкой источников равной яркости на расстоянии до 100 Мпк, распределённых равномерно и случайно с концентрацией  $n=1.5\cdot 10^{-4}$  Мпк $^{-3}$  в МГМП B=1 нГ и корреляционной длиной  $L_c=1$  Мпк. Видно, что несмотря на большое количество источников на карте наблюдаются всего несколько ярких пятен. Поток КЛПВЭ от большинства источников почти не наблюдается.

радиогалактика Центавр A и галактика с активным звёздообразованием M83. В программе можно выбирать симуляцию по параметрам магнитного поля.

Следует описать про функционал отдельных файлов. FileHelpers.py содержит в себе ряд вспомогательных функций для преобразования данных из одних координат в другие и в массив данных для HealPy, а также класс CRbeamFile, конструктор которого принимает на вход путь до выходного файла CRbeam [53]. Этот класс позволяет удобным образом обращаться с данными симуляции. В случае сбоя симуляции предпринимается попытка удаления некорректных фрагментов и повторная загрузка. Этот файл используется и для некоторых других скриптов для обработки симуляций в данной работе.

gradioCRpropa.py предоставляет простой API-интерфейс на фреймворке Flask<sup>7</sup>, который считывает файл карты неба HealPy с диска, преобразует его к nside=64, если необходимо, применяет функцию линзирования предвычисленным галактическим магнитным полем (ГМП) по моделям Дженсон-Фаррар 2012 (JF12) без турбулентной или с турбулентной компонентой [77,78] и сохраняет получившуюся карту в новый файл. Необходимость в выделении данной функции в отдельный файл и отдельный сервис вызвана некорректной работой СВргора 3 на последних версиях NumPy. На эту проблему также указывали другие специалисты, использующие СВргора 3, но разработчики оставили эту проблему без внимания [93].

gradioApp.py запускает основной веб-сервер, который создаёт отображаемый пользователю интерфейс на фреймворке Gradio<sup>8</sup>. Изначально Gradio задумывался как простой способ развёртывания демонстраций для работы с нейросетями и другими моделями машинного обучения, но он также удобен для создания любых веб-приложений как обёрток над функциями в Python. Gradio даёт возможность запустить веб-сервер не только локально, но и пробросить порт на удалённый сервер с публичным ІР, обращаясь к сервису с любого устройства с выходом в Интернет. В качестве параметров командной строки следует передать директории с файлами симуляции. В веб-интерфейсе есть несколько вкладок: первая использовалась для получения изображений множества источников (Рис. 22-23). Вторая вкладка – некоторые статистические тесты для проверки распределения источников в пространстве и их свойств в общем. Третья вкладка (Рис. 24) создавалась для третьей главы и позволяет детально разобрать возможные сценарии образования горячего пятна Центавра А: для этой вкладки были заранее просимулированы разные варианты МГМП для Центавра А и галактики М83. Внутри вкладки можно менять параметры поля, а также вращать его вокруг оси «источник – наблюдатель» с помощью

 $<sup>^{7} \</sup>mathtt{https://flask.palletsprojects.com/en/stable/}$ 

<sup>8</sup>https://www.gradio.app/

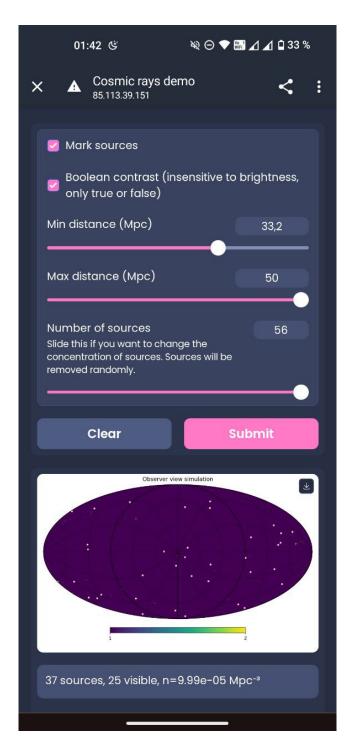


Рис. 23: Один из ранних скриншотов со смартфона Android. Используется публичный IP для демонстрации на семинаре. В данный момент сервис по публичному IP недоступен.

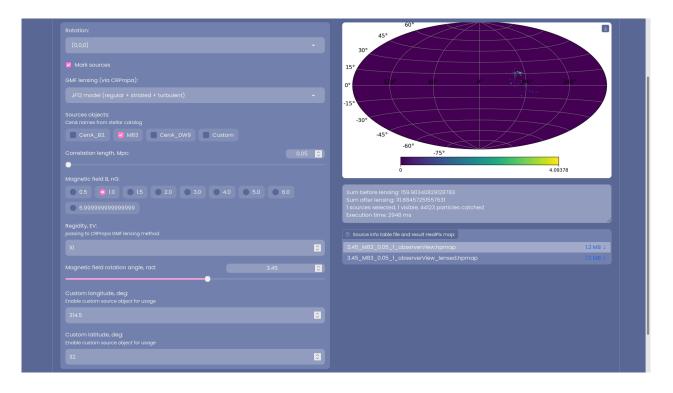


Рис. 24: Вкладка подбора параметров для восстановления горячего пятна Центавра А. В качестве источника выбрана галактика М83, а корреляционная длина минимальная.

матрицы 13, имитируя разные реализации МГМП. Это позволило относительно удобным способом подобрать параметры и получить карты неба, которые и вошли в третью главу.

$$M(\hat{\mathbf{v}}, \theta) = \begin{cases} \cos \theta + (1 - \cos \theta)x^2 & (1 - \cos \theta)xy - (\sin \theta)z & (1 - \cos \theta)xz + (\sin \theta)y \\ (1 - \cos \theta)yx + (\sin \theta)z & \cos \theta + (1 - \cos \theta)y^2 & (1 - \cos \theta)yz - (\sin \theta)x \\ (1 - \cos \theta)zx - (\sin \theta)y & (1 - \cos \theta)zy + (\sin \theta)x & \cos \theta + (1 - \cos \theta)z^2 \end{cases}$$
(13)

## В Приложение 2. Отклонения частиц и размер изображения источника в турбулентном магнитном поле

В этом Приложении выводятся аналитические выражения для среднеквадратичного угла отклонения частиц  $\alpha$  и углового размера изображения источника  $\delta$  после распространения в турбулентном магнитном поле. Уравнения получены в предположении, что угол отклонения мал  $\alpha \ll 1$  и что траектории частиц статистически независимы (т.е. приближение некоррелированных траекторий). Данный вывод следует подходу [69] и [70], хотя схожие результаты были раннее получены в [68] с использованием другого метода.

Однородное турбулентное магнитное поле B может быть охарактеризовано своей корреляционной функцией, определенной как  $\zeta_{ij}(\mathbf{x}) = \langle B_i(\mathbf{x_0})B_j(\mathbf{x_0} + \mathbf{x})\rangle$ . Чтобы выразить эту корреляционную функцию, мы вводим её представление в Фурье-пространстве и находим ее связь с коррелятором в реальном пространстве. Предположим, что

$$\begin{cases} B_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \, B_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \\ \langle B_i(\mathbf{k}) B_j^*(\mathbf{q}) \rangle = (2\pi)^3 \, \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \, P_B(k) \, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \end{cases}$$

где  $(\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j)$  требуется для выполнения условия  $\mathrm{div} \mathbf{B} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ , и  $P_B(k)$  — спектр мощности магнитного поля. Подставляя это в определение корреляционной функции, мы получаем

$$\zeta_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int d^3k \left(\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j\right) P_B(k) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$
 (14)

Нормировка  $P_{\rm B}(k)$  определяется требованием, чтобы среднеквадратичная напряжённость магнитного поля равнялась заданному значению  $B_0$ 

$$B_0^2 = \langle B_i(\mathbf{x}) B_i(\mathbf{x}) \rangle = \zeta_{ii}(0). \tag{15}$$

Используя  $\delta_{ii}=3$  и  $\hat{k}_i\hat{k}_i=1$ , мы приходим к условию нормировки:

$$B_0^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \, P_B(k). \tag{16}$$

Имея эти определения, среднеквадратичный угол отклонения частицы  $\alpha$  может быть выведен, начиная с уравнения движения Лоренца:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \tag{17}$$

Предполагая, что отклонение мало, мы аппроксимируем скорость как  $\mathbf{v} \approx c \cdot \hat{\mathbf{n}}$ . Далее, предполагая, что частица распространяется вдоль оси z, так что  $\hat{\mathbf{n}} = (0,0,1)$ , и рассматривая движение от z=0 до z=D, мы получаем

$$\langle \alpha^2 \rangle = \left(\frac{e}{E}\right)^2 \int_0^D dz_1 \int_0^D dz_2 \left[\delta_{kq} - \hat{n}_k \hat{n}_q\right] \langle B_k(z_1) B_q(z_2) \rangle$$
 (18)

где  $\langle \cdot \rangle$  обозначает усреднение по различным реализациям магнитного поля.

Подставляя Ур. (14) в эти уравнения и выполняя аналитические интегрирования, мы получаем наиболее общее выражение для угла отклонения <sup>9</sup>:

$$\langle \alpha^2 \rangle = D \left( \frac{e}{E} \right)^2 \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \ k P_B(k) \times \left( \frac{D^2 k^2 \operatorname{Si}(Dk) + Dk \cos(Dk) - \sin(Dk)}{D^2 k^2} \right). \tag{19}$$

Ур. (19) для среднеквадратичного угла отклонения  $\alpha$  справедливо для любого расстояния D и любого спектра мощности магнитного поля. Единственное предположение, сделанное до сих пор, заключается в том, что  $\alpha$  мало. В [70] этот интеграл был вычислен аналитически для ломаного степенного спектра в двух предельных случаях  $Dk_0 \ll 1$  и  $Dk_0 \gg 1$ , где  $k_0$  соответствует положению излома в спектре. Для более сложных спектров он может быть вычислен численно.

 $<sup>^{9}</sup>$ Заметим, что в [70] есть опечатка в знаках двух из трех членов; однако это не влияет на окончательные результаты.

Для спектра магнитного поля, заданного Ур. 6 и используемого в данной работе, интеграл в Ур. (19) также может быть вычислен аналитически в пределе, когда расстояние распространения много больше наибольшего масштаба поля, т.е.  $Dk_{\min}\gg 1$  или, что эквивалентно,  $D/L_{\max}\gg 1$ :

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{DL_{\text{max}}}{R_{\text{L}}^2} \left[ \frac{1}{4} \frac{(m-3)}{(m-2)} \frac{(1-R_k^{m-2})}{(1-R_k^{m-3})} \right].$$
 (20)

Здесь  $R_k = L_{\min}/L_{\max}$ — отношение минимального к максимальному масштабам спектра, и  $R_{\rm L} = E/eB$ — ларморовский радиус частицы. Предполагая достаточно широкий спектр с  $R_k \ll 1~(R_k=0.01~{\rm для}$  спектра в Ур. (6) и подставляя колмогоровский наклон m=11/3, получаем

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{DL_{\text{max}}}{10R_{\text{L}}^2} \left[ 1 + R_k^{2/3} \right] \tag{21}$$

в главном порядке по  $R_k$ . Для значений B, E, D и  $L_{\max}$ , подходящих для распространения КЛПВЭ, это выражение сводится к приведенному в Ур. 12.

Чтобы вычислить среднеквадратичный угловой размер источника  $\delta$ , начинают с Ур. (10). В приближении некоррелированных траекторий определение  $\delta$  в Ур. (10) эквивалентно:

$$\cos \delta = \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{22}$$

где  ${\bf r}$  — радиус-вектор частицы. Усредняя по различным реализациям магнитного поля и предполагая, как всегда, что  $\delta \ll 1$ , получаем в главном порядке:

$$\langle \delta^2 \rangle = \langle n_x^2 \rangle + \langle n_y^2 \rangle - 2 \left[ \frac{\langle r_x n_x \rangle}{D} + \frac{\langle r_y n_y \rangle}{D} \right] + \frac{\langle r_x^2 \rangle}{D^2} + \frac{\langle r_y^2 \rangle}{D^2}. \tag{23}$$

Заметим, что

$$\langle n_x^2 \rangle + \langle n_y^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle.$$
 (24)

Аналогично,

$$\langle r_x n_x \rangle + \langle r_y n_y \rangle =$$

$$= \int_0^D dz_1 \left[ \left( \frac{e}{E} \right)^2 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^D dz_3 \left[ \epsilon_{ijk} \hat{n}_j B_k(z_2) \epsilon_{ipq} \hat{n}_p B_q(z_3) \right] \right] (25)$$

Так что

$$\langle r_x n_x \rangle + \langle r_y n_y \rangle = \frac{D}{2} \langle \alpha^2 \rangle$$
 (26)

Наконец,

$$\langle r_x^2 \rangle + \langle r_y^2 \rangle = \frac{D^2}{3} \langle \alpha^2 \rangle$$
 (27)

Таким образом,

$$\langle \delta^2 \rangle = \frac{\langle \alpha^2 \rangle}{3} \tag{28}$$