

*На правах рукописи*

Маслов Василий Евгеньевич

Солитоны и осциллоны  
в скалярных теориях поля

1.3.3 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН).

**Научный руководитель:**

*Левков Дмитрий Геннадиевич*, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерных исследований Российской академии наук, отдел теоретической физики, старший научный сотрудник.

**Официальные оппоненты:**

*Шнир Яков Михайлович*, доктор физико-математических наук, профессор, Международная межправительственная организация Объединённый институт ядерных исследований (ОИЯИ), лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ведущий научный сотрудник.

*Годунов Сергей Иванович*, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН), отделение теоретической физики имени И.Е. Тамма, лаборатория квантовой теории поля, высококвалифицированный старший научный сотрудник.

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН), г. Москва.

Защита состоится \_\_\_\_\_ в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета 24.1.163.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института ядерных исследований Российской академии наук по адресу: 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЯИ РАН и на сайте по адресу: [www.inr.ru](http://www.inr.ru)

Автореферат разослан \_\_\_\_\_

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.1.163.01,  
кандидат физ.-мат. наук

Демидов Сергей Владимирович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность и степень разработанности темы исследования**

В теории поля хорошо известны солитоны [1, 2] и солитоноподобные решения<sup>1</sup> — классические полевые конфигурации с локализованной плотностью энергии. Их существование обычно обеспечивается наличием сохраняющегося заряда, не позволяющего им распастись. Заряд может иметь топологическую природу [3] либо являться следствием симметрии полевых уравнений; в этих двух случаях говорят о топологических и нетопологических солитонах соответственно.

Простейшие топологические солитоны существуют в одномерных скалярных теориях с вырожденными вакуумами. Примерами являются кинк в модели  $\varphi^4$  с нарушенной симметрией и солитон в модели синус–Гордона [1]. В обоих случаях существование и стабильность солитонов гарантирует топология: они интерполируют между разными вакуумами при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Большой прогресс в изучении солитонов связан с теорией интегрируемых систем. В таких системах число независимых интегралов движения совпадает с числом степеней свободы, что гарантирует существование множества многосолитонных решений. Для их нахождения были разработаны мощные методы [4, 5]. Одномерная модель синус–Гордона как раз интегрируемая, поэтому многосолитонные решения в ней существуют и найдены аналитически. Простейшим примером нетривиального солитона является бризер — связанное состояние солитона и антисолитона.

В неинтегрируемых моделях многосолитонные решения тоже существуют, но изучены гораздо хуже. Практически неизвестны объекты, существование которых не было бы связано с сохраняющимся зарядом — топологическим или глобальным. Уравнения на статические солитоны в этом случае тоже являются неинтегрируемыми. К примеру, в одномерном пространстве они имеют вид,

---

<sup>1</sup>В теории интегрируемых систем солитоны вдобавок должны упруго рассеиваться друг на друге. В диссертации используется терминология физических приложений, где это требование опускают и под солитонами понимают все локализованные стационарные решения полевых уравнений.

схожий с уравнениями классической механики, где роль времени играет пространственная координата  $x$ . Известно, однако, что в неинтегрируемых механических системах возникает динамический хаос: сколь угодно близкие начальные условия через достаточной большой промежуток «времени» (т.е. координаты  $x$ ) приводят к совершенно разным траекториям системы. Интересный вопрос — как такой механический хаос отражается на конфигурациях статических солитонов в одномерных полевых системах.

Простейший способ реализовать подобную систему — поместить хорошо известную интегрируемую теорию, например, модель синус–Гордона, во внешний потенциал. Высота потенциала служит параметром, контролирующим неинтегрируемость. Крайне актуальным является вопрос о том, как наличие динамического хаоса влияет на профили и свойства статических солитонов. Но в литературе изучается только динамика движущихся солитонов в этой [6–8] и похожих [9] моделях. Эта динамика, как и следовало ожидать, является хаотической.

Другие интересные объекты, которые появляются во множестве неинтегрируемых теоретико–полевых моделей, — осциллоны. Они были впервые обнаружены численно в 1970-х годах [10, 11]. Осциллоны представляют собой почти периодические, компактные и чрезвычайно долгоживущие сгустки скалярного поля. Не являясь строго периодическими решениями, они излучают скалярные волны и в конечном итоге исчезают, но успевают перед этим совершить как минимум  $10^3$  полных осцилляций [12]. В некоторых теориях эти объекты живут до  $10^{14}$  периодов [13]. Несмотря на то, что осциллоны существуют во многих моделях с притягивающим взаимодействием между частицами, полноценного объяснения столь большим временам жизни до сих пор нет. В частности, в моделях, где они наблюдаются, нет очевидных малых параметров.

В настоящее время осциллоны являются частью многих космологических сценариев. Они могут образовываться из аксионной [14, 15] или сверхлёгкой [16] тёмной материи, появляться при космологических фазовых переходах в ранней Вселенной [17, 18], формироваться из конденсата инфлатонного поля на стадии постинфляционного разогрева [19, 20]. Также космологические осциллоны способны генерировать гравитационные волны [21, 22], участво-

вать в бариогенезисе [21], являться «затравками» аксионных микнокластеров [15] либо коллапсировать в первичные чёрные дыры [23, 24]. Это делает задачу построения адекватного описания осциллонов ещё более актуальной.

До последнего времени существовало только одно модельно-независимое описание осциллонов: пертурбативное (нерелятивистское) разложение по малой амплитуде поля [25–27]. Как правило, данный подход применим только если осциллоны имеют достаточно большой размер  $R \gg m^{-1}$ , а их частота  $\omega$  близка к массе  $m$  скалярного поля. На языке физики частиц такие конфигурации описывают конденсат слабо взаимодействующих бозонов с малыми импульсами и низкой энергией связи  $m - \omega \ll m$ . В нерелятивистском пределе число таких частиц сохраняется, что и обеспечивает существование осциллонов в моделях с притягивающим взаимодействием.

Однако такой пертурбативный метод не может считаться удовлетворительным сразу по нескольким причинам. Во-первых, он неприменим для наиболее долгоживущих осциллонов большой амплитуды, которые были обнаружены в скалярных теориях с почти квадратичными потенциалами. Примером могут служить модели с потенциалом монодромии при определённом выборе параметров [13]; потенциалы монодромии активно обсуждаются в литературе в контексте космологической инфляции [19]. Во-вторых, известно, что трёхмерные осциллоны с  $\omega \approx m$  классически нестабильны по отношению к бесконечно малым возмущениям [28]. В этом случае пертурбативное разложение по малой амплитуде, которое работает при  $m - \omega \approx m$ , неправильно описывает стабильные осциллоны при меньших частотах  $\omega$ .

В работах [29, 30] было предложено объяснить долговечность всех осциллонов существованием адиабатического инварианта, который приближённо сохраняется в процессе эволюции осциллирующего поля. Такой подход может оказаться верным для осциллонов большого размера  $R \gg m^{-1}$ , т.к. характерные времена  $R^{-1}$  эволюции таких объектов как целого сильно превышают их периоды  $T \sim O(m^{-1})$ . Основная проблема здесь заключается в том, что определения адиабатического инварианта вне уравнений поля пока не существует: в литературе значения этой величины

вычислялись только на полученных ранее решениях [29, 30]. Мы увидим, однако, что требуемый инвариант естественным образом возникает в эффективной теории, описывающей широкомасштабные конфигурации поля, такие как осциллоны большого размера. Это означает, что эффективный подход правильно описывает осциллоны и объясняет их долговечность — как в общем случае, так и в особо интересном потенциале монодромии.

**Целью** диссертации является изучение свойств солитонов и осциллонов в неинтегрируемых моделях скалярного поля. Для этого необходимо решить следующие **задачи**:

- Получить статические солитоны в модели синус–Гордона, взаимодействующей с внешним потенциалом, и исследовать их стабильность. Выяснить, как количество статических солитонов фиксированного размера зависит от параметра, характеризующего неинтегрируемость системы. Исследовать влияние динамического хаоса на свойства солитонов, в частности, на распределение солитонных решений в конфигурационном пространстве.
- Построить эффективную теорию поля для описания осциллонов большого размера. Показать, что такой подход естественным образом объясняет долговечность этих объектов. Исследовать зависимость параметров больших осциллонов от частоты колебаний их поля. Сравнить предсказания эффективной теории с результатами численных симуляций.
- Рассмотреть осциллоны в пространствах разной размерности  $d$ , в частности, в формальном пределе  $d \rightarrow 0$ . Объяснить увеличение времени их жизни с уменьшением  $d$ .
- Построить точное количественное описание чрезвычайно долгоживущих осциллонов в скалярных теориях с потенциалами, близкими к квадратичным. Применить построенный метод к модели монодромии, сравнить теоретические предсказания с результатами численного моделирования.

## Методы исследования

При выполнении диссертационной работы использовались строгие методы современной теоретической и математической физики. Аналитические методы включают в себя элементы теории динамических систем, методы поиска точных и приближённых решений нелинейных дифференциальных уравнений, эффективную теорию поля и метод пересуммирования, аналогичный ренормгрупповому подходу в квантовой теории поля.

Численный поиск статических солитонов в модели с динамическим хаосом осуществлялся методом стрельбы с использованием чисел произвольной точности. Моделирование эволюции осциллонов производилось с помощью симплектического алгоритма четвёртого порядка [31]. При этом для пространственных производных использовалась дискретизация бесконечного порядка, основанная на (быстром) преобразовании Фурье [32].

## Научная новизна

Все выносимые на защиту результаты являются новыми и не имеют аналогов в научной литературе. А именно:

1. Впервые изучено бесконечное семейство стабильных статических солитонов в неинтегрируемой модели синус–Гордона во внешнем потенциале. Также новым является исследование влияния динамического хаоса на свойства статических солитонов.
2. Впервые разработано последовательное модельно-независимое описание осциллонов большого размера, которое полностью учитывает нелинейность взаимодействия. Впервые вычислены первые два члена градиентного разложения для эффективного действия, что позволило прояснить причины существования осциллонов и установить критерии их стабильности и долговечности.
3. Впервые предложен «ренормгрупповой» подход, позволяющий упростить эффективное описание осциллонов и радикально улучшить его точность в моделях с почти квадратичными потенциалами. С помощью явных вычислений в модели

монодромии показано, что новый метод превосходит по точности другие имеющиеся в литературе описания осциллонов.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Обнаружение новых «хаотических» солитонов в моделях с неинтегрируемыми статическими уравнениями открывает путь к исследованию солитонных решений методами динамических систем. Практическая значимость новых солитонов связана с применением модели синус–Гордона в различных разделах физики. Она может описывать классическую ферромагнитную спиновую цепочку во внешнем магнитном поле [33], взаимодействие двух одномерных сверхтекучих жидкостей [34, 35] и длинный контакт Джозефсона [6]. Пространственно неоднородный внешний потенциал естественным образом возникает, если параметры соответствующих систем [36] зависят от пространственной координаты. В этом случае в системах могут наблюдаться хаотические солитоны, найденные и исследованные в данной работе.

Построенное в диссертации эффективное описание осциллонов позволило получить общие условия их существования, стабильности и долговечности, которые могут быть полезными во многих моделях. Доказательство существования точных периодических решений уравнений поля в пределе нулевого количества пространственных измерений указывает на бóльшую распространённость осциллонов в низкоразмерных моделях. С практической точки зрения, наиболее важным результатом диссертации является «улучшенное по ренормгруппе» упрощённое эффективное описание осциллонов. Оно может оказаться полезным для исследования роли этих объектов в различных космологических процессах, будь то фазовые переходы [17, 18], образование тёмной материи [14–16], бариогенезис [21] или постинфляционный разогрев [19, 20, 37].

### **Достоверность и обоснованность результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением математически обоснованных методов теоретической физики. Корректность всех численных вычислений подтверждена множеством тестов, описанных в Приложениях. Теоретические предсказания подтверждены в своей области применимости чис-



ленными симуляциями, а в известных предельных случаях они совпали с имеющимися в литературе результатами. Результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных журналах и докладывались на множестве семинаров и конференций.

### **Апробация результатов**

Результаты диссертации представлены автором лично на следующих российских и международных конференциях:

- 21-я Международная Ломоносовская конференция по физике элементарных частиц, Москва, 24 — 30 августа 2023 года (устный доклад).
- Международная конференция «6th International Conference on Particle Physics and Astrophysics», Москва, 29 ноября — 2 декабря 2022 года (устный доклад).
- Мемориальная конференция памяти академика А.А. Славнова, Москва, 21 — 22 декабря 2022 года (постерный доклад).
- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», Москва, 8—12 апреля 2019 года (устный доклад).

Также результаты диссертации были лично доложены автором на семинарах в Perimeter Institute, Институте Теоретической и Математической Физики МГУ им. М.В. Ломоносова, Лаборатории Физики Высоких Энергий МФТИ и Институте Ядерных Исследований РАН.

### **Личный вклад автора**

Все результаты, представленные в данной диссертации, получены лично автором, либо автор внёс определяющий вклад в их получение. Автор принимал прямое участие в написании текста и подготовке рисунков всех статей, которые легли в основу данной диссертации.

## Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и трёх приложений. Объём работы составляет 112 страниц и включает 29 рисунков. Список литературы содержит 106 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** даётся общая характеристика диссертации и формулируются положения, выносимые на защиту. Приводится список опубликованных по материалам диссертации работ.

**Глава 1** посвящена изучению необычных свойств солитонов в  $(1 + 1)$ -мерных полевых системах с неинтегрируемыми статическими уравнениями. Она начинается с **раздела 1.1**, где указано на аналогию между статическими уравнениями в одномерной полевой модели и уравнениями Ньютона для частиц в классической механике. При этом солитонные решения лежат на сепаратрисах в фазовом пространстве механической системы. Делается вывод, что в многополевых моделях, а также моделях поля, взаимодействующих с внешним потенциалом, солитоны должны обладать особыми свойствами из-за наличия динамического хаоса в многомерных и/или неавтономных механических уравнениях. В этом случае сепаратрисы механических систем разрушаются, что должно гарантировать существование бесконечного числа статических солитонов в аналогичных полевых моделях.

В **разделе 1.2** описана модель синус-Гордона во внешнем потенциале

$$\varphi'' = \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \text{где} \quad V(\varphi, x) = U(x) (1 - \cos \varphi), \quad (1)$$

а функция  $U(x)$  периодична по пространству:  $U(x + D) = U(x)$ . Приведены примеры применения уравнения (1) в физике конденсированного состояния вещества, перечислены естественные причины появления пространственной зависимости у потенциала  $U$ . Для упрощения вычислений мы берём

$$U(x) = 1 + \varepsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mD), \quad (2)$$

где используются безразмерные единицы,  $\varepsilon$  — параметр неинтегрируемости системы, а  $D$  — период. С помощью явного численного нахождения сечений Пуанкаре показано, что при  $\varepsilon > 0$  в уравнениях (1), (2) присутствует динамический хаос.

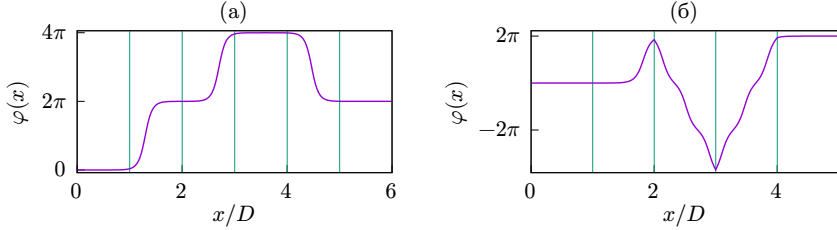


Рис. 1: Примеры статических солитонов при (а)  $\varepsilon = 10^{-4}$ ; (б)  $\varepsilon = 3$ . Вертикальные линии отмечают положения  $\delta$ -функций в уравнении (2).

В разделе 1.3 объясняется, как выбор потенциала (2) позволяет упростить численное решение уравнения (1). В этом случае вычисление сводится к последовательному применению точных аналитических решений при  $(m - 1)D < x < mD$  и уравнений шивки. Описано, как выделить солитонные решения с вакуумными асимптотиками и исследовать их стабильность. Получены примеры солитонов, существование которых напрямую связано с наличием динамического хаоса, они изображены на Рис. 1.

В разделе 1.4 доказано, что число стабильных солитонов в модели (1), (2) бесконечно. Более того, их количество экспоненциально растёт с их пространственным размером  $L$ :

$$N_{\text{sol}} \propto e^{h_S(\varepsilon)L/D} \quad \text{при} \quad L \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Получены аналитические оценки для показателя экспоненты:

$$\frac{\ln 3}{p} \leq h_S \leq \ln 3, \quad \text{где} \quad p = p(\varepsilon) = -\frac{1}{D} \ln \frac{\varepsilon}{32} + 1, \quad (4)$$

более точную оценку даёт численная минимизация энергии солитонных цепочек, см. сплошную линию на Рис. 2а. Точки на этом графике демонстрируют показатель  $h_S$ , полученный с помощью численного нахождения большого количества солитонов.

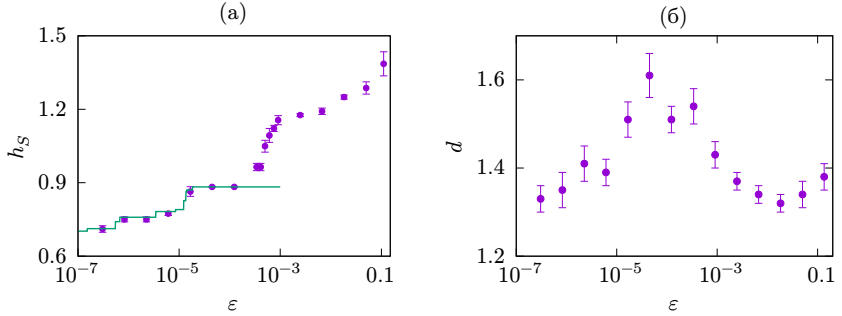


Рис. 2: (а) Показатель экспоненты роста количества стабильных солитонов  $h_S(\varepsilon) = (D/L) \ln N_{\text{sol}}$  с их пространственным размером  $L \gg D$  как функция параметра хаотичности  $\varepsilon$ . Точки с погрешностями получены с помощью численного нахождения большого количества солитонов. Сплошная линия найдена посредством минимизации энергии солитонных цепочек. (б) Размерность фрактала на Рис. 3 при различных  $\varepsilon$ .

В разделе 1.5 введено понятие топологической энтропии  $h_T$  для системы уравнений (1), (2). Показано, что она является индикатором хаоса:  $h_T = 0$  при  $\varepsilon = 0$ , когда система регулярна. Установлено, что при  $\varepsilon > 0$  топологическая энтропия ограничена снизу показателем экспоненты  $h_S$  роста числа стабильных солитонов:  $h_S \leq h_T$ .

Раздел 1.6 посвящён изучению распределения стабильных солитонов в конфигурационном пространстве теории. Показано, что значения полей солитонов  $\{\varphi(0), \varphi'(+0)\}$  образуют самоподобный фрактал, изображённый вблизи вакуума  $\varphi \approx 0$  на Рис. 3а. Действительно, достаточно малая окрестность любой из точек фрактала, будучи увеличенной в определённое число раз, оказывается приближённо подобной всему фракталу, что проиллюстрировано на Рис. 3б. Это самоподобие объясняется возможностью усложнять солитон, «добавляя» новые части на большом расстоянии от уже существующей конфигурации. В этом случае зависящий от координаты потенциал  $U$  уравнивает силы между разными частями солитона. Аналитически показано, что фрактал имеет дробную

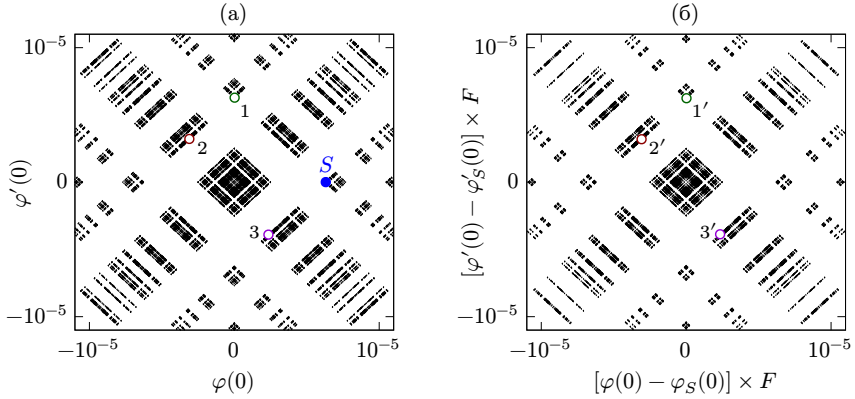


Рис. 3: (а) Значения полей  $\varphi(0)$ ,  $\varphi'(0)$  стабильных солитонов при  $x = +0$  в модели с  $\varepsilon = 3 \times 10^{-7}$ . Показана область  $|\varphi|, |\varphi'| < 10^{-5}$ . (б) Значения полей в окрестности точки  $S$  из Рис. 3а, увеличенные в  $F = e^{\lambda_S(8D)}$  раз, где  $\lambda_S(8D)$  связана с показателем Ляпунова солитона  $S$ . Точки  $1'—3'$  в окрестности  $S$  подобны точкам  $1—3$  во всём фрактале.

размерность, ограниченную снизу:

$$d \geq 2 \frac{h_S}{\lambda_v D}, \quad (5)$$

где  $h_S$  — показатель экспоненты для числа солитонов в выражении (3), а  $\lambda_v$  — показатель Ляпунова вакуумного решения  $\varphi = 0$ . Также фрактальная размерность  $d(\varepsilon)$  численно извлечена из распределения солитонов в конфигурационном пространстве, см. Рис. 2б. Предложено объяснение её немонотонной зависимости от параметра хаотичности  $\varepsilon$ .

В разделе 1.7 диссертации предложена ещё одна мера хаотичности статических уравнений поля — аналог метрической энтропии Колмогорова–Синая  $K$ . Показано, что мера неоднородности распределения солитонов в фазовом пространстве  $E$  ограничивает метрическую энтропию снизу:  $E \leq K$ . Этот результат проиллюстрирован с помощью численного вычисления  $E$  и  $K$ .

**Раздел 1.8** завершает **Главу 1**. Он содержит обсуждение полученных в ней результатов и их обобщения на другие системы: как

однополевые с периодическими и непериодическими потенциалами, так и на модели нескольких полей.

Результаты **Главы 1** опубликованы в работе [A1].

**Глава 2** посвящена описанию нелинейных осциллонов большого размера в моделях  $d$ -мерного скалярного поля с произвольным потенциалом  $V(\varphi)$ . Уравнение поля имеет вид:

$$(\partial_t^2 - \Delta)\varphi = -V'(\varphi), \quad (6)$$

где  $\Delta$  —  $d$ -мерный лапласиан, а штрих обозначает производную по  $\varphi$ .

**Раздел 2.1** имеет вводный характер: в нём рассказано, что такое осциллоны, и приведены космологические сценарии, в которых они возникают. Указано на необычайно большие времена жизни осциллонов.

В **разделе 2.2** приводится иллюстрация возникновения осциллона. Для этого уравнение (6) решается численно с гауссовыми начальными данными в скалярной модели с плоским потенциалом

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \tanh^2 \varphi, \quad (7)$$

где использованы безразмерные единицы с единичной массой поля  $m = 1$ . Данный потенциал возникает в теории инфляции с  $\alpha$ -аттрактором [12, 38]. В **Главах 2 и 3** потенциал (7) используется для иллюстрации полученных результатов.

**Раздел 2.3** посвящён построению главного порядка эффективной теории поля (ЭТП), описывающей крупномасштабные осциллирующие конфигурации в модели (6). Для таких конфигураций справедливо приближение  $|\partial_i \varphi| \ll |m\varphi|$ , где  $m$  — масса поля; тогда уравнение (6) близко к уравнению нелинейного механического осциллятора. Главная идея ЭТП — каноническое преобразование к медленно меняющимся полям  $I(t, \mathbf{x})$  и  $\theta(t, \mathbf{x})$ , характеризующим амплитуду и фазу колебаний:  $\varphi = \Phi(I, \theta)$  и  $\partial_t \varphi = \Pi(I, \theta)$ . Тогда приближённое эффективное действие находится усреднением подавленного градиентного члена:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = \int dt d^d \mathbf{x} \left( I \partial_t \theta - h(I) - \frac{(\partial_i I)^2}{2\mu_I(I)} - \frac{(\partial_i \theta)^2}{2\mu_\theta(I)} \right), \quad (8)$$

где  $h(I)$ ,  $\mu_I(I)$  и  $\mu_\theta(I)$  — модельно-зависимые формфакторы, в качестве примера они явно вычислены в модели (7). Важно, что действие (8) обладает глобальной  $U(1)$  симметрией  $\theta \rightarrow \theta + \text{const}$ . Отсюда следует сохранение глобального заряда

$$N = \int d^d \mathbf{x} I(t, \mathbf{x}) \quad (9)$$

на эффективных уравнениях поля.

В разделе 2.4 показано, что наличие сохраняющегося заряда (9) может приводить к существованию в эффективной теории нетопологических солитонов, которые приближённо описывают осциллоны. Они отвечают минимумам энергии  $E$  при постоянном заряде  $N$ , также их можно найти подстановкой стационарного анзаца в эффективные уравнения. На основе механической аналогии [39] в параграфе 2.4.1 выведены критерии существования осциллонов; их можно трактовать как строгое определение «притягивающего потенциала» при сильных полях. Все вычисления проиллюстрированы в модели (7) в  $d = 1$  пространственном измерении. Для этого аналитически найдены решения  $I(x)$ , поля осциллонов  $\varphi(t, x)$ , их заряды  $N(\omega)$  и энергии  $E(\omega)$  как функции частоты  $\omega$ . Проведено сравнение предсказаний ЭТП с осциллонами, полученными численно в полной модели (6), см. Рис. 4.

В параграфе 2.4.2 обсуждается долговечность и стабильность осциллонов. Для этого введены частота  $\Omega(I)$  и переменная действия  $I$  нелинейного осциллятора  $\varphi(t)$ , удовлетворяющего уравнению  $\partial_t^2 \varphi = -V'(\varphi)$  с потенциалом  $V(\varphi)$ . Показано, что эффективная теория применима, если  $\Omega(I)$  слабо меняется при изменении  $I$ :

$$\eta^2 \equiv |d \ln \Omega / d \ln I| \ll 1 \quad \text{при} \quad I \leq I_0, \quad (10)$$

где  $I_0$  — амплитуда в центре осциллона. Поскольку распад осциллонов связан с неточностью ЭТП, то условие (10) является критерием их долговечности. Приведены два случая выполнения условий существования и долговечности: для осциллонов малой амплитуды  $|\varphi| \ll t$ , либо в моделях с близкими к квадратичным — но растущими медленнее них — потенциалами. Также исследованы два дополнительных механизма быстрого распада осциллонов. А именно, показано, что осциллоны являются стабильными относительно

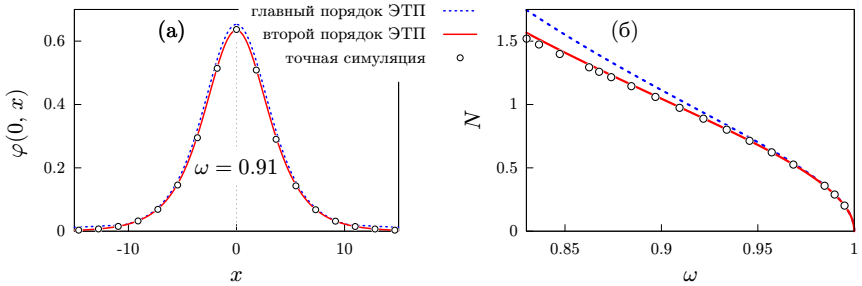


Рис. 4: (а) Поле  $\varphi(0, x)$  осциллона с частотой  $\omega = 0.91$  и (б) заряды осциллонов  $N(\omega)$  в модели (7) при  $d = 1$ . Кружочки получены с помощью точных численных симуляций, а пунктирная и сплошная линии показывают результаты ЭТП в первом (главном) и во втором порядках соответственно.

малых крупномасштабных возмущений, если выполняется критерий Вахитова–Колоколова [28, 40], а параметрический резонанс в высокочастотных модах всегда подавлен в осциллонах при выполнении условия (10).

В разделе 2.5 на примере модели (7) проведено сравнение предсказаний эффективной теории с точными результатами, полученными с помощью численного решения уравнения (6) в пространствах разной размерности  $d$ , см. Рис. 4б и 5. Отмечено, что ЭТП предсказывает нарушение критерия Вахитова–Колокова трёхмерными осциллонами при  $\omega \approx m = 1$ , что означает их нестабильность. Этот факт подтверждается численно: решения с  $\omega \approx 1$  быстро распадаются, что видно на Рис. 5а по отсутствию соответствующих точек. Также численно продемонстрировано, что распад осциллонов происходит экспоненциально медленно по параметру (10).

Раздел 2.6 посвящён вычислению эффективного действия во втором порядке градиентного разложения. Для этого учтены быстроосциллирующие части  $\delta I$  и  $\delta \theta$  полей  $I$  и  $\theta$ , отброшенные в главном порядке:

$$I = \bar{I} + \delta I, \quad \theta = \bar{\theta} + \delta \theta, \quad \text{где} \quad \langle \delta I \rangle = \langle \delta \theta \rangle = 0,$$

а  $\bar{I}$  и  $\bar{\theta}$  медленно зависят от  $t$ . Решения уравнений на малые  $\delta I$  и  $\delta \theta$  в первом нетривиальном порядке дают поправку второго порядка



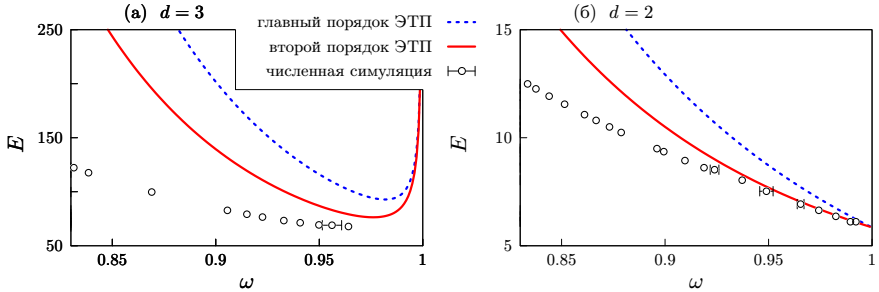


Рис. 5: Энергия  $E(\omega)$   $d$ -мерных осциллонов в модели (7) в главном порядке ЭТП (пунктирные линии) и во втором порядке ЭТП (сплошные линии). Кружочки с погрешностями показывают результаты численных симуляций в точной модели.

к эффективному действию. Все члены этой поправки содержат по 4 пространственных производных, т.е. подавлены для конфигураций большого размера. Показано, что поправка второго порядка оставляет действие  $U(1)$ -инвариантным, что позволяет существовать осциллонам. Найдены поправки к полям осциллонов  $\varphi(t, r)$ , их зарядам  $N$  и энергиям  $E$ ; рисунки 4 и 5 демонстрируют результаты, полученные в модели (7). Видно, что предсказания ЭТП во втором порядке ближе к численным результатам в полной модели.

В разделе 2.7 рассмотрен предел  $\omega \rightarrow m$ . В этом пределе размер и амплитуда осциллона масштабируются как  $R \sim O(\kappa^{-1})$  и  $\varphi \sim O(\kappa)$ , где  $\kappa^2 \equiv m^2 - \omega^2 \ll 1$ . Тогда применимы как предложенная в диссертации ЭТП, так и пертурбативное разложение по амплитуде поля. В первых двух порядках продемонстрировано, что перерасложение эффективной теории по  $\kappa$  воспроизводит результаты пертурбативного разложения в модели общего положения. Предложен способ нахождения формфакторов эффективной теории с помощью символического вычисления произвольно длинных рядов по степеням  $I$ . Наконец, на примере модели (7) проведено сравнение результатов ЭТП и пертурбативного разложения с численными расчётами в полной теории. Показано, что эффективная теория точнее пертурбативного разложения при  $d < 2$ . При  $d = 3$  она правильно воспроизводит качественные свойства осциллонов в главном порядке, предсказывая существование стабильной и неста-

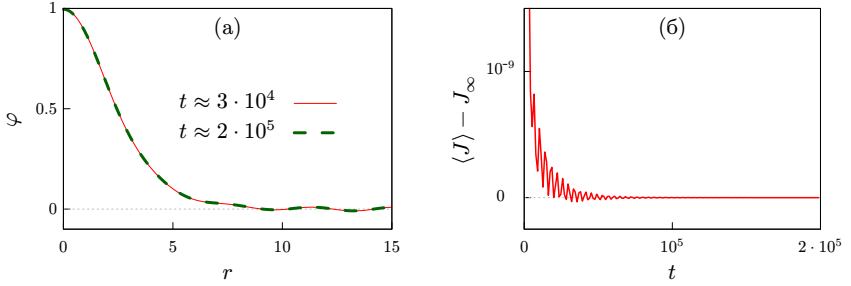


Рис. 6: Численное решение уравнения поля при  $d = 0$  в модели (7). В качестве стартовой конфигурации использован осциллон в ЭТП с амплитудой  $\varphi(0, 0) = 1$ . (а) Полевые конфигурации  $\varphi(t, r)$  в существенно разные моменты времени, соответствующие  $\partial_t \varphi(t, r=0) = 0$ . (б) Поток энергии  $\langle J \rangle = -r^{-1} \langle \partial_t \varphi \partial_r \varphi \rangle$ , усреднённый по нескольким периодам осцилляций; мы вычли асимптотическое значение  $\langle J \rangle \rightarrow J_\infty \approx 10^{-5}$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

бильной ветвей решений.

**Раздел 2.8** завершает главу 2 подробным обсуждением полученных в ней результатов.

Результаты **Главы 2** опубликованы в работе [A2].

В **главе 3** изучаются осциллоны в пределе нулевого количества пространственных измерений  $d$ . Открывающий главу **раздел 3.1** аргументирует необходимость такого исследования: известно, что осциллоны более распространены и дольше живут в низкоразмерных теориях, последнее численно подтверждается в модели (7). Более того, для низкоразмерных осциллонов лучше работает эффективная теория. Интересно выяснить, почему.

В **разделе 3.2** изучены классические решения при  $d = 0$ . Показано, что в этом случае сферически-симметричное уравнение поля (6) при  $r = 0$  превращается в механическое уравнение  $\partial_t^2 \phi_0 = -V'(\phi_0)$  нелинейного маятника  $\phi_0(t) \equiv \varphi(t, r=0)$ . Это доказывает существование точно периодических нольмерных решений во всём пространстве — прототипов низкоразмерных осциллонов. Они найдены численно в модели (7) и показаны на Рис. 6а. Интегральные величины таких решений, например энергия  $E$ , получают доминантный вклад от осциллятора  $\phi_0$  в центре, в то время как ин-

теграл по области  $r > 0$  подавлен как  $O(d)$ . Поток энергии  $O(d)$  от осциллятора  $\phi_0$  на бесконечность стационарен, как показано для модели (7) на Рис. 6б.

В завершающем главу **разделе 3.3** обсуждается применение полученных результатов к низкоразмерным осциллонам. Отмечено, что эффективная теория поля точно описывает маятник  $\phi_0(t)$  в центре нольмерной системы. Данный факт вместе с подавлением вкладов от области  $r > 0$  в интегральные величины объясняет повышение точности ЭТП в низких размерностях. Наконец, предложено описывать низкоразмерные осциллоны с помощью разложения по  $d$  и объяснять их лучшую долговечность большей близостью к точно периодическим нольмерным решениям.

Результаты **Главы 3** опубликованы в работе [A2].

В **Главе 4** изучены осциллоны в случае, когда притягивающий потенциал модели близок к квадратичному. Примером здесь служит скалярное поле с потенциалом монодромии

$$V(\varphi) = \frac{1}{2p}(1 + \varphi^2)^p, \quad p \lesssim 1, \quad (11)$$

где использованы безразмерные единицы. Этот потенциал изображён на Рис. 7а (сплошная линия).

В **разделе 4.1** обсуждаются возможные способы описания осциллонов в модели (11). В этом случае пертурбативное разложение неприменимо из-за сильных полей  $|\varphi| \gg 1$  внутри осциллонов. Предложенная в Главе 2 диссертации эффективная теория поля работает, но её применение крайне усложняется отсутствием явных аналитических формул для канонического преобразования к полям  $I$  и  $\theta$  для потенциала (11). Целью Главы 4 ставится объединение двух подходов в один простой и точный метод, применимый в моделях с почти квадратичными потенциалами:  $\epsilon \equiv 1 - p \ll 1$ . В этом методе разложение идёт как по градиентному члену, так и по малой нелинейности потенциала при  $\varphi \sim \varphi_0$ .

В **разделе 4.2** на примере нелинейного осциллятора с уравнением движения  $\partial_t^2 \varphi = -V'(\varphi)$  и потенциалом (11) разрабатывается «ренормгрупповой» способ корректного учёта малой нелинейности при больших амплитудах колебаний. При  $p \approx 1$  на любом масштабе  $\varphi \sim \varphi_0$  потенциал можно приблизить квадратичной функцией

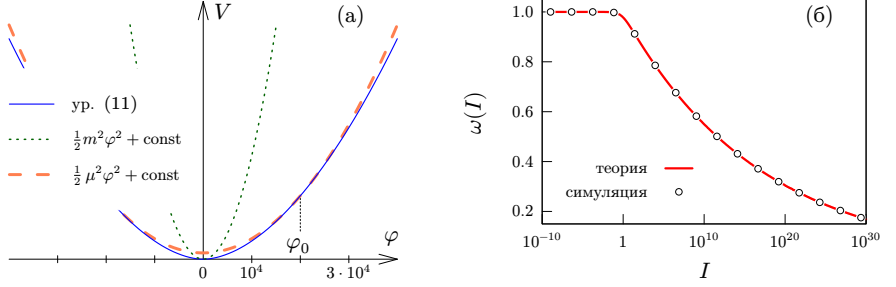


Рис. 7: (а) Потенциал (11) (сплошная линия), главный член разложения около вакуума (точечная линия) и квадратичное приближение на масштабе  $\varphi_0$  (пунктирная линия). Величина  $\varphi_0$  — пример характерного значения поля осциллона. (б) Частота нелинейного осциллятора с потенциалом (11) и  $p = 0.95$  как функция переменной действия  $I$ . Сплошная линия показывает теоретическое предсказание, а результаты численных симуляций представлены кружочками.

$V(\varphi) \approx \mu^2 \varphi^2 / 2 + \text{const}$  (пунктирная линия на Рис. 7а) и записать

$$\partial_t^2 \varphi = -\mu^2 \varphi - \delta V'(\varphi), \quad \text{где} \quad \mu^2 = V'(\varphi_0) / \varphi_0 \equiv (1 + \varphi_0^2)^{-\epsilon}. \quad (12)$$

Отметим, что при  $\varphi_0 \gg 1$  значение параметра  $\mu$  существенно отличается от массы  $m = 1$  поля в вакууме. После этого строится теория возмущений по малой нелинейности  $\delta V \equiv V(\varphi) - \mu^2 \varphi^2 / 2$ , это делается в канонических переменных  $I$  и  $\theta$ , характеризующих амплитуду и фазу колебаний.

Главная идея «ренормгруппового» подхода состоит в том, чтобы сделать масштаб  $\varphi_0$  разложения «бегущим», т.е. зависящим от амплитуды колебаний:  $\varphi_0 = \varphi_0(I)$ . Тогда «бегущей» становится и эффективная «масса» линейной теории  $\mu = \mu(I)$ , а  $\delta V$  в формуле (12) остаётся малым при любых амплитудах. С помощью этого трюка получено приближённое аналитическое выражение для частоты нелинейного осциллятора  $\omega = \omega(I)$ . Как показано на Рис. 7б, оно согласуется с частотой, извлечённой из полных численных решений, даже при очень больших амплитудах колебаний  $I \sim 10^{30}$ .

В разделе 4.3 разработанный метод используется для построения эффективной теории поля для осциллонов подобно тому,

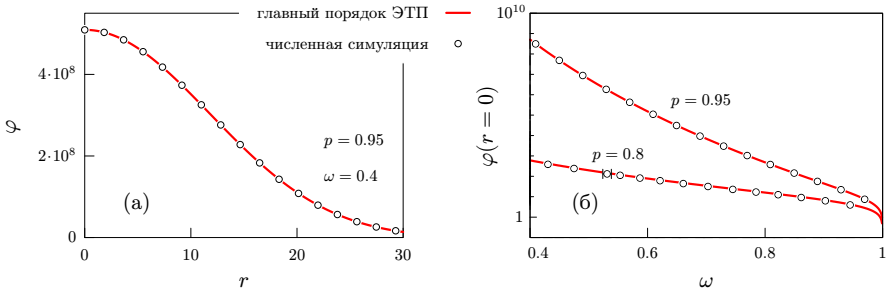


Рис. 8: (а) Профиль  $\varphi(0, r)$  осциллона с частотой  $\omega = 0.4$  и (б) амплитуды колебаний  $\varphi(r = 0)$  трёхмерных осциллонов в модели (11) с  $p = 0.95$ . Сплошные линии демонстрируют предсказания эффективной теории, а кружочки получены с помощью численных симуляций.

как это делается в разделе 2.3. Для определённости, рассмотрены трёхмерные осциллоны. В качестве малых поправок теперь выступают нелинейный и градиентный члены в действии, которые оказываются одного порядка:  $R^{-2} \sim O(\partial_i \varphi)^2 \sim O(\delta V) \sim O(\epsilon)$ . Найденные профили  $\varphi(0, r)$  осциллонов сравниваются с численными симуляциями в разделе 4.4. Обнаруживается хорошее совпадение (см. Рис. 8а). При этом точность теории нечувствительна к амплитуде, как видно из Рис. 8б. Теоретические предсказания для интегральных характеристик осциллонов — например, энергии  $E$  — тоже хорошо согласуются с точными симуляциями, см. Рис. 9а.

В разделе 4.5 вычислены поправки второго порядка к эффективному действию в модели монодромии. Показано, что учёт поправок улучшает предсказания эффективной теории, даже если специально выбрано контринтуитивное значение «масштаба»  $\varphi_0$ .

Раздел 4.6 завершает главу обсуждением результатов и сравнением предложенного метода с другими, имеющимися в литературе, см. Рис. 9а. В качестве альтернативных методов рассматриваются разложение по амплитуде поля (РАП), а также прямое разложение потенциала (11) по  $\epsilon$  [13]. Видно, что «улучшенная по ренормгруппе» эффективная теория, предложенная в Главе 4, заметно превосходит оба этих подхода по точности. Её относительная ошибка не зависит от амплитуды. Скорее, она чувствительна

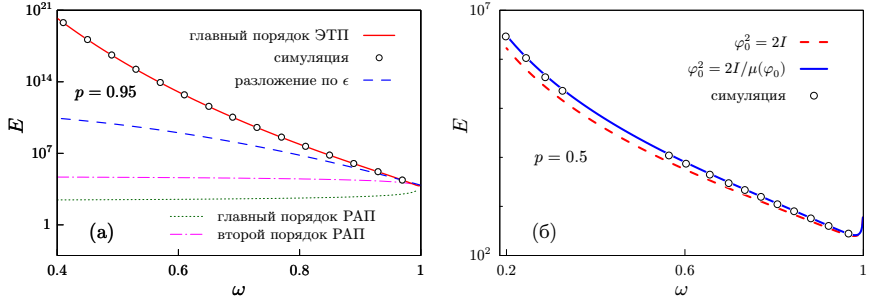


Рис. 9: Энергии  $E(\omega)$  трёхмерных осциллонов в модели монодромии: теоретические предсказания (линии) и численные результаты (кружочки). (а)  $p = 0.95$ , сравниваются различные методы описания осциллонов. (б)  $p = 0.5$  (сильно нелинейная модель), два предсказания главного порядка ЭТП отличаются выбором масштаба  $\varphi_0$  эффективной теории.

к параметру нелинейности  $\epsilon$ . Однако даже для сильно нелинейного потенциала с  $p = \epsilon = 0.5$ , который используется в моделях инфляции [41], более аккуратный выбор «масштаба»  $\varphi_0(I)$  повышает точность главного порядка эффективной теории до 10%, см. Рис. 9б.

Результаты **Главы 4** опубликованы в работе [А3].

**Заключение** содержит основные результаты диссертации.

В **Приложении А** описаны методы поиска и исследования «хаотических» солитонов в неинтегрируемой модели Главы 1. **Приложение Б** описывает метод численного решения уравнения поля (6), который используется для исследования осциллонов в Главах 2–4. Проведены тесты метода, доказывающие его стабильность при эволюции в течение длительных периодов времени. Наконец, **Приложение В** содержит вывод нескольких свойств осциллонов в эффективной теории поля, его результаты важны для Главы 2.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На защиту выносятся следующие результаты, полученные в диссертации:

1. На примере  $(1 + 1)$ -мерной модели синус–Гордона во внешнем потенциале продемонстрировано, что свойства статических солитонов в моделях с неинтегрируемыми уравнениями поля отличаются от свойств солитонов в интегрируемых теориях. А именно, в неинтегрируемом случае:
  - (а) Количество стабильных солитонов экспоненциально растёт с увеличением их пространственного размера. При этом показатель экспоненты связан с топологической энтропией статических уравнений поля.
  - (б) Солитонные решения образуют фрактал в конфигурационном пространстве теории. Размерность фрактала — нецелая, она немонотонно зависит от параметра неинтегрируемости модели. Преобразование самоподобия фрактала в окрестности солитонного решения связано с экспонентой Ляпунова этого решения. В то же время, глобальное распределение значений поля во фрактале характеризуется метрической энтропией статических уравнений.
2. Предложено универсальное эффективное описание нелинейных осциллонов большого размера. Для этого построено эффективное действие, описывающее широкомасштабные быстроосциллирующие полевые конфигурации, которое имеет вид асимптотического разложения по степеням пространственных производных полей. В каждом члене этого разложения точно учитывается нелинейность потенциала. Показано, что во всех порядках эффективное действие обладает глобальной  $U(1)$  симметрией. Это гарантирует существование семейства нетопологических солитонов, описывающих осциллоны в полной теории. Благодаря этому выведены строгие критерии существования, стабильности и долговечности осциллонов большого размера.
3. Проведено сравнение эффективного описания осциллонов с результатами численного моделирования в полной теории. Установлено, что эффективное действие более точно описыва-

ет нерелятивистские осциллоны, а также осциллоны в низкой пространственной размерности  $d$ .

4. Показано, что в формальном пределе нулевой размерности пространства  $d \rightarrow 0$  осциллоны превращаются в точные периодические решения, и их эффективное описание тоже становится точным. Это объясняет увеличение времени жизни осциллонов при уменьшении размерности пространства.
5. Разработан «ренормгрупповой» метод описания осциллонов в скалярных моделях с почти квадратичными потенциалами. Метод основан на введении «бегущей массы», которая медленно зависит от амплитуды поля. Данный трюк позволяет упростить построение эффективного действия для осциллонов и радикально улучшить точность этого аналитического подхода. Проведено сравнение теории с результатами численных вычислений в трёхмерной модели с потенциалом монодромии. Показано, что в широкой области параметров относительная точность «улучшенной по ренормгруппе» эффективной теории превышает 10%.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus:

- [A1] Levkov D. G., Maslov V. E., and Nugaev E. Ya. Chaotic solitons in driven sine-Gordon model // Chaos Solitons and Fractals. — 2020. — Vol. 139. — P. 110079. (импакт-фактор Web of Science: 7.8) — arXiv: 2004.13052.
- [A2] Levkov D. G., Maslov V. E., Nugaev E. Ya., and Panin A. G. An Effective Field Theory for large oscillons // Journal of High Energy Physics. — 2022. — Vol. 12. — P. 079. (импакт-фактор Web of Science: 5.4) — arXiv: 2208.04334.
- [A3] Levkov D. G. and Maslov V. E. Analytic description of monodromy oscillons // Physical Review D — 2023. — Vol.



108. — P. 063514. (импакт-фактор Web of Science: 5.0) — arXiv: 2306.06171.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — М. : Мир, 1985.
- [2] Рубаков В.А. Классические калибровочные поля: бозонные теории. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
- [3] Manton N.S. and Sutcliffe P. Topological solitons. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. — Cambridge University Press, 2004. — ISBN: 978-0-521-04096-9.
- [4] Babelon O., Bernard D., and Talon M. Introduction to Classical Integrable Systems. — Cambridge University Press, 2007.
- [5] Мива Т., Джимбо М. и Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. — М. : МЦНМО, 2005.
- [6] Malomed Boris A. Superfluxons in periodically inhomogeneous long Josephson junctions // Phys. Rev. B. — 1990. — Vol. 41. — P. 2616.
- [7] Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., and Krumhansl J.A. Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 15. — P. 1578.
- [8] Sánchez Angel, Scharf Rainer, Bishop Alan R., and Vázquez Luis. Sine-Gordon breathers on spatially periodic potentials // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45. — P. 6031.
- [9] Hai, Wenhua, Zhang, Zelan, and Fang, Jianshu. Chaotic solitons in Sine-Gordon system // Eur. Phys. J. B. — 2001. — Vol. 21, no. 1. — P. 103.
- [10] Kudryavtsev Alexander Evgenyevich. Solitonlike Solutions for a Higgs Scalar Field // JETP Lett. — 1975. — Vol. 22. — P. 82.

- [11] Bogolyubsky I. L. and Makhankov V. G. On the Pulsed Soliton Lifetime in Two Classical Relativistic Theory Models // JETP Lett. — 1976. — Vol. 24. — P. 12.
- [12] Zhang Hong-Yi, Amin Mustafa A., Copeland Edmund J., Saffin Paul M., and Lozanov Kaloian D. Classical Decay Rates of Oscillons // JCAP. — 2020. — Vol. 07. — P. 055. — 2004.01202.
- [13] Olle Jan, Pujolas Oriol, and Rompineve Fabrizio. Recipes for oscillon longevity // JCAP. — 2021. — Vol. 09. — P. 015. — 2012.13409.
- [14] Kolb Edward W. and Tkachev Igor I. Nonlinear axion dynamics and formation of cosmological pseudosolitons // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49. — P. 5040. — astro-ph/9311037.
- [15] Vaquero Alejandro, Redondo Javier, and Stadler Julia. Early seeds of axion miniclusters // JCAP. — 2019. — Vol. 04. — P. 012. — 1809.09241.
- [16] O’Hare Ciaran A. J., Pierobon Giovanni, Redondo Javier, and Wong Yvonne Y. Y. Simulations of axionlike particles in the postinflationary scenario // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105. — P. 055025. — 2112.05117.
- [17] Gleiser Marcelo. Pseudostable bubbles // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49. — P. 2978. — hep-ph/9308279.
- [18] Copeland Edmund J., Gleiser M., and Muller H. R. Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 52. — P. 1920. — hep-ph/9503217.
- [19] Amin Mustafa A., Easther Richard, Finkel Hal, Flauger Raphael, and Hertzberg Mark P. Oscillons After Inflation // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 241302. — 1106.3335.
- [20] Sang Yu and Huang Qing-Guo. Oscillons during Dirac-Born-Infeld preheating // Phys. Lett. B. — 2021. — Vol. 823. — P. 136781. — 2012.14697.

- [21] Lozanov Kaloian D. and Amin Mustafa A. End of inflation, oscillons, and matter-antimatter asymmetry // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Vol. 90. — P. 083528. — 1408.1811.
- [22] Liu Jing, Guo Zong-Kuan, Cai Rong-Gen, and Shiu Gary. Gravitational Waves from Oscillons with Cuspy Potentials // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 120. — P. 031301. — 1707.09841.
- [23] Cotner Eric, Kusenko Alexander, Sasaki Misao, and Takhistov Volodymyr. Analytic Description of Primordial Black Hole Formation from Scalar Field Fragmentation // *JCAP.* — 2019. — Vol. 10. — P. 077. — 1907.10613.
- [24] Kou Xiao-Xiao, Tian Chi, and Zhou Shuang-Yong. Oscillon Preheating in Full General Relativity // *Class. Quant. Grav.* — 2021. — Vol. 38. — P. 045005. — 1912.09658.
- [25] Fodor Gyula, Forgacs Peter, Horvath Zalan, and Lukacs Arpad. Small amplitude quasi-breathers and oscillons // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Vol. 78. — P. 025003. — 0802.3525.
- [26] Fodor Gyula, Forgacs Peter, Horvath Zalan, and Mezei Mark. Computation of the radiation amplitude of oscillons // *Phys. Rev. D.* — 2009. — Vol. 79. — P. 065002. — 0812.1919.
- [27] Fodor Gyula, Forgacs Peter, Horvath Zalan, and Mezei Mark. Radiation of scalar oscillons in 2 and 3 dimensions // *Phys. Lett. B.* — 2009. — Vol. 674. — P. 319. — 0903.0953.
- [28] Zakharov V. E. and Kuznetsov E. A. Solitons and collapses: two evolution scenarios of nonlinear wave systems // *Phys. Usp.* — 2012. — Vol. 55, no. 6. — P. 535–556.
- [29] Kasuya S., Kawasaki M., and Takahashi Fuminobu. I-balls // *Phys. Lett. B.* — 2003. — Vol. 559. — P. 99. — hep-ph/0209358.
- [30] Kawasaki Masahiro, Takahashi Fuminobu, and Takeda Naoyuki. Adiabatic Invariance of Oscillons/I-balls // *Phys. Rev. D.* — 2015. — Vol. 92, no. 10. — P. 105024. — 1508.01028.

- [31] McLachlan Robert I. Explicit Symplectic Splitting Methods Applied to PDEs // Lectures in Applied Mathematics. — 1993. — Vol. 29. — P. 325.
- [32] Frigo M. and Johnson S. G. The Design and Implementation of FFTW3 // IEEE Proc. — 2005. — Vol. 93. — P. 216.
- [33] Mikeska H J. Solitons in a one-dimensional magnet with an easy plane // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1977. — Vol. 11, no. 1. — P. L29.
- [34] Whitlock Nicholas K. and Bouchoule Isabelle. Relative phase fluctuations of two coupled one-dimensional condensates // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 68. — P. 053609.
- [35] Gritsev Vladimir, Polkovnikov Anatoli, and Demler Eugene. Linear response theory for a pair of coupled one-dimensional condensates of interacting atoms // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 174511.
- [36] McLaughlin D. W. and Scott A. C. Perturbation analysis of fluxon dynamics // Phys. Rev. A. — 1978. — Vol. 18. — P. 1652.
- [37] Hong Jeong-Pyong, Kawasaki Masahiro, and Yamazaki Masahito. Oscillons from Pure Natural Inflation // Phys. Rev. D. — 2018. — Vol. 98. — P. 043531. — 1711.10496.
- [38] Kallosh Renata and Linde Andrei. Universality Class in Conformal Inflation // JCAP. — 2013. — Vol. 07. — P. 002. — 1306.5220.
- [39] Coleman Sidney R. Q-Balls // Nucl. Phys. B. — 1985. — Vol. 262. — P. 263. — [Erratum: Nucl.Phys.B 269, 744 (1986)].
- [40] Vakhitov N. G. and Kolokolov A. A. Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation // Radiophys. Quantum Electron. — 1973. — Vol. 16. — P. 783.
- [41] Silverstein Eva and Westphal Alexander. Monodromy in the CMB: Gravity Waves and String Inflation // Phys. Rev. D. — 2008. — Vol. 78. — P. 106003. — 0803.3085.

Научное издание  
Маслов Василий Евгеньевич  
Солитоны и осциллоны  
в скалярных теориях поля

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Ф-т 60x84/16 Уч.-изд.л. 1,2 Зак. № 22528 Тираж 80 экз. Бесплатно

Печать цифровая

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований Российской академии наук

Издательский отдел  
117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7а