На правах рукописи

НИРОВ Хазретали Сефович

КЛАССИФИКАЦИЯ, СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ ТОДОВСКИХ СИСТЕМ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2009 год

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте ядерных исследований РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор А. К. Погребков

доктор физико-математических наук
профессор Г. П. Пронько

доктор физико-математических наук
профессор А. С. Сорин

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва

Защита состоится "_____"________________________ 2009 г. в _______ час. на заседании Диссертационного совета Д 002.119.01 в Учреждении Российской академии наук Институте ядерных исследований РАН по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, д. 7а

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЯИ РАН.

Автореферат разослан "_____"___________________ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук
Б. А. Тулупов

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы.

Нелинейные интегрируемые динамические системы играют важную роль в исследованиях в различных областях теоретической физики, в особенности — для понимания непертурбативных аспектов лоренц-инвариантных теорий поля. Наиболее перспективными при этом представляются два направления. Первое из них проистекает из того факта, что уравнение Лиувилля описывает эффективную теорией бозонных струн, а его суперсимметричное расширение описывает уже эффективную теорию суперструн. Это направление связано с применением конформно-инвариантных интегрируемых систем для моделирования модифицированных теорий струн и гравитации, так называемых W-гравитаций и получаемых из них W-струн. В основе этих конструкций лежат W-алгебры, являющиеся расширениями алгебры Вирасоро. Заметим, в частности, что W-струны обладают теми же замечательными свойствами, что и обычные: на квантовом уровне они удовлетворяют теореме об отсутствии духов, имеют дуальные и факторизуемые амплитуды рассеяния и обладают модулярной инвариантностью, но при этом имеют и очевидные преимущества благодаря более широкой нелинейной алгебре симметрии. Второе направление связано со свойствами солитонных решений нелинейных интегрируемых систем. Такие решения при квантовании описывают протяженные объекты, имеющие смысл частиц с нетривиальной внутренней структурой. Примерами таких частицеподобных решений являются монополи, несущие топологический заряд и, как следствие наблюдения Монтонена и Олива, могущие быть ответственными за эффект Мейснера в механизме конфайнмента в неабелевых калибровочных теориях. Кроме того, нелинейные интегрируемые системы используются и для прямого моделирования эффекта удержания спинорных полей внутри солитонов.

Классические интегрируемые системы описываются, как правило, нелинейными дифференциальными уравнениями. Ключевой способ исследования таких систем состоит в выявлении и анализе их симметрий. Идейные основания для такого подхода были заложены в конце XIX — начале XX столетий Софусом Ли и Эмми Нётер. С тех пор наиболее интересные и важные результаты в этой области исследований были получены в развитие теории интегрируемых систем. Теория непрерывных групп и алгебр, развившаяся из таких начал, является, в частности, необходимым инструментом для формулировки многих интегрируемых систем и построения подходящих методов их интегрирования. Нелинейные интегрируемые уравнения возникают и плодотворно используются во многих областях теоретической и математической физики. Особое место среди них занимают двумерные системы, которые представимы в виде так называемого условия нулевой кривизны. Уравнения Тоды составляют широкий класс именно таких нелинейных интегрируемых систем. Действительно, их можно рассматривать как набор нелинейных дифференциальных уравнений, следующих из условия нулевой кривизны на некоторую плоскую связность в тривиальном главном расслоении с гладким двумерным многообразием в качестве базы и структурной группой Ли в качестве слоя.

Согласно теоретико-групповому подходу конкретная тодовская система задается выбором некоторой группы Ли и $\mathbb{Z}$-градуировки ее алгебры Ли. Поэтому для исчерпывающего описания тодовских систем нужно начать с перечисления $\mathbb{Z}$-градуировок алгебр Ли, соответствующих группам Ли, с которыми уравнения Тоды ассоциированы. Заметим при этом, что алгебро-групповые и дифференциально-геометрические свойства тодовских систем и их физический смысл кардинально различаются в зависимости от того, с какой группой — конечномерной или бесконечномерной — они ассоциированы. Классическим примером здесь могут служить два простейших частных случая тодовских систем — уравнения Лиувилля и синус-Гордона, глубокие различия между которыми хорошо изучены.

Уравнения Тоды, ассоциированные с конечномерными группами Ли, считались более понятными и разработанными, поскольку классификация $\mathbb{Z}$-градуировок комплексных полупростых конечномерных алгебр Ли была уже хорошо известна. Однако, такая классификация была дана в терминах корневого разложения, применение которого к тодовским системам общего вида оказывается весьма громоздкой процедурой. К середине 90-х годов двадцатого столетия было опубликовано множество работ по тодовским системам, для которых пространство зависимых переменных является абелевой группой Ли (*абелевы тодовские системы*) и к которым корневая техника вполне приложима, тогда как *неабелевы тодовские системы* не были изучены столь же основательно. Более того, стало складываться мнение, что наиболее интересные (с разных точек зрения) тодовские системы уже найдены и продолжение исследований в этой области не актуально, несмотря на то, что абелевы системы составляют лишь малую часть тодовских систем вообще. Этот скепсис связан с тем фактом, что к тому времени не было еще найдено удобного представления для таких систем. В 1997 году А. В. Разумов и М. В. Савельев показали, что некоторый класс тодовских систем представим в простом блок-матричном виде. Этот результат привел к возобновлению интереса к рассматриваемому классу нелинейных интегрируемых систем. Позже было доказано, что такое удобное представление существует и для всех тодовских систем, ассоциированных с классическими полупростыми группами Ли. Именно этот блок-матричный подход, опирающийся только на общие свойства полупростых алгебр Ли и не прибегающий к технике корневого разложения, оказался наиболее адекватным и плодотворным для всестороннего исследования тодовских систем.

Интегрируемость тодовских систем обеспечивается их симметриями. Системы, ассоциированные с конечномерными группами Ли, обладают — дополнительно к симметриям, порождаемым некоторыми линейными комбинациями генераторов алгебры токов, и конформной инвариантности, порождаемой генераторами алгебры Вирасоро, которые уже квадратичны по токам (в форме Сугавары), — еще и другими симметриями, порождаемыми *характеристическими интегралами* . Известно, что такие величины образуют дифференциальные алгебры, а их гамильтоновы аналоги образуют W-алгебры, где операция умножения индуцируется подходящими скобками Пуассона и Дирака.

W-алгебры играют важную роль в различного рода приложениях конформных теорий поля к широкому спектру задач теоретической и математической физики. Для тодовских уравнений W-алгебры исследовались в основном только в случае абелевых систем. При этом, как правило, соответствующие результаты выводились методом гамильтоновой редукции, с использованием известной связи между моделью Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ) и тодовской системой. Такие результаты требуют проверки другими, более прямыми, методами, так как разложение Гаусса, на котором основана гамильтонова редукция от модели ВЗНВ к тодовской системе, является локальным и выполняется только для плотного подмножества группы Ли, на которой сформулирована модель ВЗНВ, поэтому приведенное фазовое пространство и фазовое пространство соответствующей тодовской системы могут иметь различные глобальные структуры, хотя и совпадая при этом локально. Эта проблема была замечена еще в 1989 г. в работе Л. О'Райферти и его сотрудников и обсуждалась в ряде работ 1990 – 1999 годов этих же и многих других авторов (например, Цуцуи, Фейера, Фулопа, Кобаяси, Разумова и Яснова, и др.).

При формулировке нелинейной интегрируемой системы возникает та или иная версия проблемы факторизации исходной группы Ли. Для тодовских систем такая факторизация группового элемента индуцируется $\mathbb{Z}$-градуировкой соответствующей алгебры Ли. В случае конечномерной группы Ли проблема факторизации решается в рамках метода разложения Гаусса, лежащего в основе построения точных решений уравнений Тоды. Для тодовских систем, ассоциированных с группами петель, требуемая факторизация индуцируется $\mathbb{Z}$-градуировкой уже бесконечномерной алгебры, а именно — соответствующей алгебры Ли петель, и уже поэтому проблема классификации $\mathbb{Z}$-градуировок алгебр Ли петель оказывается крайне важной.

Петлевые уравнения Тоды представляют несомненный интерес по крайней мере с двух точек зрения. Во-первых, их исследования означают развитие методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Во-вторых, наличие у этих уравнений солитонных решений позволяет моделировать различные нелинейные явления в физике элементарных частиц и теории поля. При этом, в основном изучались лишь некоторые солитонные решения абелевых тодовских систем. Солитонные решения неабелевых тодовских систем обладают дополнительными, по сравнению с абелевым случаем, свойствами, например, структурами с внутренней симметрией, что может позволить моделировать еще более сложные нелинейные эффекты и давать более последовательные, непротиворечивые объяснения известным явлениям. Поэтому строгая формулировка всевозможных — абелевых и неабелевых — тодовских систем, ассоциированных с группами петель, и развитие методов их решения становится интересным не только с точки зрения математической, но и теоретической физики.

Исследованию описанных выше важных и актуальных проблем и посвящена настоящая диссертация.

Диссертация имеет три основные цели:

1) классификацию уравнений Тоды, ассоциированных с конечномерными и бесконечномерными группами Ли;

2) исследование симметрий неабелевых тодовских систем;

3) развитие методов решения петлевых уравнений Тоды и построение солитоноподобных решений для таких систем.

Научная новизна и практическая ценность диссертации.

Центральным результатом диссертации является открытие новых классов нелинейных интегрируемых систем, задаваемых неабелевыми уравнениями Тоды, ассоциированными со скрученными группами петель. Такие системы построены в рамках решения одной из важнейших проблем теории нелинейных дифференциальных уравнений, а именно — их теоретико-групповой классификации. Использование наиболее удобного и эффективного блок-матричного подхода к формулировке рассматриваемых систем позволило найти полное решение этой проблемы для уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель комплексных классических групп Ли, и получить явный вид соответствующих систем нелинейных уравнений.

Конкретно же, сначала мы построили классификацию тодовских систем, ассоциированных со всеми конечномерными классическими группами Ли, основываясь при этом на новом методе перечисления $\mathbb{Z}$-градуировок соответствующих полупростых алгебр Ли. При явном описании уравнений Тоды, возникающих в рамках такой классификации, предложено матричное обобщение уравнения Лиувилля как особого частного случая неабелевых систем, ассоциированных с симплектической группой.

Решение проблемы классификации в конечномерном случае позволило увидеть, что и для классификации петлевых уравнений Тоды требуется найти подходящий способ перечисления $\mathbb{Z}$-

градуировок уже соответствующих бесконечномерных алгебр Ли. Мы нашли требуемое описание, наиболее адекватное для тодовских систем. Наше рассмотрение основано на тщательном и исчерпывающем анализе $\mathbb{Z}$-градуированных скрученных алгебр Ли петель, определенных как пространства Фреше всех скрученно-периодических отображений евклидовой прямой в конечномерную алгебру Ли, с поточечной операцией умножения в алгебре Ли. Соответствующая группа Ли петель наделяется структурой многообразия Фреше, моделируемого на алгебре Ли петель. Групповой закон также задается поточечно. Такой подход позволил нам выделить важнейший для тодовских систем класс $\mathbb{Z}$-градуировок алгебр Ли петель, названных в диссертации *интегрируемыми $\mathbb{Z}$-градуировками*, и найти все неэквивалентные интегрируемые $\mathbb{Z}$-градуировки с конечномерными градуировочными подпространствами скрученных алгебр Ли петель комплексных простых алгебр Ли. Этот результат стал ключевым для решения проблемы классификации уравнений Тоды.

Блок-матричный подход к представлению элементов алгебры Ли, показавший свою эффективность для тодовских систем, ассоциированных с конечномерными группами Ли, оказался наиболее адекватным и в бесконечномерном случае. Он позволил дать наиболее простой явный вид для всех допустимых классов уравнений Тоды. Найденные при этом общие для всех классических групп Ли и их алгебр Ли структуры $\mathbb{Z}_M$-градуировок и соответствующих матричнозначных отображений, входящих в уравнение Тоды, получили в диссертации название *канонических*. Именно эти канонические структуры делают возможным прямое сравнение различных классов уравнений Тоды, увидеть место той или иной из ранее известных и новых нелинейных интегрируемых уравнений в построенной системе классификации, особенно наглядными становятся взаимосвязи между абелевыми и неабелевыми уравнениями Тоды, а также между конечномерными и бесконечномерными случаями. Кроме того, в качестве частного случая и имея в виду возможные приложения, мы рассмотрели различные вещественные формы простейших неабелевых петлевых уравнений Тоды, дающих матричные обобщения известных уравнений sin-Гордон и sinh-Гордон.

При анализе симметрий тодовских систем с помощью метода гамильтоновой редукции возникает известная проблема несоответствия глобальных структур приведенного фазового пространства и ‘истинного’ фазового пространства. Эта проблема является следствием локальности разложения Гаусса, на котором основана редукция от модели ВЗНВ к тодовской системе. Поэтому для последовательного описания симметрий неабелевых тодовских систем, ассоциированных с конечномерными классическими группами Ли, мы развили прямой метод исследования задачи в рамках лагранжева и гамильтонова формализмов. Такой подход, в частности, позволил непосредственно вычислить для неабелевых тодовских систем классические W-алгебры как алгебры характеристических интегралов уравнений Тоды по отношению к скобкам Пуассона и отождествить генераторы алгебры Вирасоро, описывающие конформные свойства модели, с гамильтоновыми аналогами компонент конформно-улучшенного тензора энергии-импульса. Показано, что конформные веса генераторов найденных W-алгебр не превышают конформных весов алгебр токов и Вирасоро. Следовательно, W-алгебры как полиномиальные расширения алгебры Вирасоро возникают в тодовских системах не только в результате учета высших конформных спинов, но и за счет свойств неабелевых $\mathbb{Z}$-градуировок. Заметим, что с помощью блок-матричного подхода удалось найти наиболее компактные выражения для W-алгебр, в которых структурные константы реализованы в виде так называемой обобщенной классической r-матрицы, имеющей смысл как оператор перестановки в тензорном произведении двух экземпляров алгебры Ли, соответствующей нулевому градуировочному индексу. Это достижение, сугубо техническое на первый взгляд, может сыграть весьма существенную полезную роль в задаче построения последовательной квантовой теории для рассмотренных классических моделей. Мы также показали, что матричнозначные генераторы преобразований симметрий, плотностями которых являются характеристические интегралы, образуют линейные алгебры с центральным расширением, но со структурными константами, являющимися не постоянными величинами, как в алгебрах Ли, а функциями характеристических интегралов.

Другим важным результатом настоящей диссертации является дальнейшее развитие методов решения петлевых уравнений Тоды и построение с их помощью многосолитонных решений для широких классов абелевых и неабелевых тодовских систем. Здесь были использованы два известных подхода к решению нелинейных дифференциальных уравнений — Хироты и рационального одевания, основы которого были заложены в работах В. Е. Захарова, А. Б. Шабата и А. В. Михайлова. Имея дело с одними и теми же исходными уравнениями, эти методы оперируют совершенно разными понятиями и дают ответы в терминах различных объектов. Так, ‘пертурбативный’ подход Хироты позволяет находить многосолитонные решения в виде отношений некоторых конечных сумм элементов, тогда как формализм рационального одевания сводит результат к отношению определителей некоторых матриц.

Нам удалось найти явный вид таких матриц для всех скрученных и нескрученных петлевых абелевых тодовских систем, ассоциированных с комплексными общими линейными группами, и представить отношения их определителей в виде отношений конечных сумм и полностью отождествить результаты, полученные в рамках двух этих подходов. Мы показали, в частности, что результат метода рационального одевания содержит все соответствующие солитонные конструкции метода Хироты для абелевых петлевых уравнений Тоды. Отметим, что скрученные петлевые уравнения Тоды, рассмотренные нами, содержат уравнения, возникающие как в дифференциальной геометрии, так и в физике элементарных частиц.

Мы также показали, что формализм рационального одевания допускает естественное обобщение на случай неабелевых тодовских систем: мы построили такое обобщение с помощью блок-матричного представления и нашли два принципиально различных типа многосолитонных решений неабелевых петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с комплексной общей линейной группой. Заметим, что эти матричнозначные решения дают неабелевы обобщения τ-функций Хироты. Кроме того, проведена редукция от общего линейного случая к системам, основанным на специальных линейных группах.

В построенных нами многосолитонных решениях явно определены коэффициенты (функции характеристических параметров), описывающие взаимодействие солитонов. При этом, такие коэффициенты для абелевых петлевых систем представляются в виде произведения коэффициентов попарного взаимодействия, тогда как для неабелевых систем такого свойства факторизуемости уже не наблюдается.

На защиту выдвигаются следующие результаты.

1. Предложена классификация уравнений Тоды, ассоциированных с конечномерными комплексными классическими группами Ли. Эта классификация основана на новом методе перечисления $\mathbb{Z}$-градуировок полупростых алгебр Ли, использующем лишь общие свойства таких алгебр и не прибегающем к технике корневого разложения элементов алгебры. Построено неабелево (матричное) обобщение уравнения Лиувилля как частного случая тодовских систем, ассоциированных с симплектической группой $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. При этом, в частности, показано, что известный ранее пример интегрируемой системы, ассоциированной с группой Ли $\mathrm{O}_5(\mathbb{C})$ и заданной сложным набором нелинейных дифференциальных уравнений, вкладывается в построенную классификацию в простейшем блок-матричном виде — как матричное уравнение Тоды, ассоциированное с группой $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$.

2. Проведено исследование симметрий неабелевых тодовских систем, ассоциированных с общей линейной и симплектической группами Ли. Методом Дринфельда–Соколова построены характеристические интегралы рассматриваемых неабелевых уравнений Тоды в удобном блок-матричном виде.

3. Развит канонический формализм для неабелевых тодовских систем, в рамках которого получены скобки Пуассона гамильтоновых аналогов характеристических интегралов для этих систем. Показано, что эти величины образуют классические W-алгебры, являющиеся полиномиальными расширениями алгебры Вирасоро. Блок-матричный подход позволил записать соотношения W-алгебр в наиболее компактном виде, со структурными константами, имеющими смысл классических r-матриц. Исследован конформно-спиновый состав исходных систем, в результате чего показано, что конформные веса генераторов найденных W-алгебр не превышают конформных весов алгебр токов и Вирасоро, т. е. равны 1 и 2. Это позволяет утверждать, что W-алгебры как расширения алгебры Вирасоро в конформных тодовских системах могут возникать не только благодаря включению высших конформных спинов, но и за счет особых свойств соответствующих $\mathbb{Z}$-градуировок.

4. Введено понятие интегрируемых $\mathbb{Z}$-градуировок алгебр Ли петель и предложена полная классификация таких градуировок с конечномерными градуировочными подпространствами для скрученных алгебр Ли петель комплексных про-

стых алгебр Ли. При этом, скрученная алгебра Ли петель определена как пространство Фреше скрученно-периодических гладких отображений евклидовой прямой в конечномерную алгебру Ли, с операцией умножения в алгебре Ли, задаваемой поточечно и являющейся непрерывной. Показано, что классификация рассматриваемых $\mathbb{Z}$-градуировок сводится к классификации всех $\mathbb{Z}_M$-градуировок исходной конечномерной алгебры Ли, т. е. эквивалентна классификации их автоморфизмов конечного порядка. Предложена новая классификация автоморфизмов конечного порядка, с точностью до сопряжений, алгебр Ли комплексных классических групп Ли. Развитая при этом техника использует блок-матричное представление комплексных алгебр Ли, что является наиболее подходящим для тодовских систем.

5. Построена полная классификация уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель комплексных классических групп Ли, чьи алгебры Ли петель наделены интегрируемыми $\mathbb{Z}$-градуировками с конечномерными градуировочными подпространствами. Получен явный вид соответствующих систем нелинейных интегрируемых уравнений. Показано, что возникает четыре неэквивалентных класса таких систем. Построенная классификация дополнена специальным графическим представлением, наглядно объясняющим главный результат, а также помогающим увидеть общую связь между классами тодовских систем, ассоциированных с группами петель и конечномерными группами Ли.

6. Исследованы вещественные формы простейших неабелевых уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель общей линейной группы Ли, в результате чего неабелевы (матричные) обобщения уравнений sinh-Гордон и sin-Гордон получены как две неэквивалентные вещественные формы неабелевых петлевых уравнений Тоды.

7. Построены многосолитонные решения для абелевых тодовских систем, ассоциированных с группами петель общей линейной группы, чьи алгебры Ли наделены интегрируемой $\mathbb{Z}$-градуировкой, индуцированной внутренними автоморфизмами конечного порядка исходной общей линейной алгебры Ли. Решения получены двумя различными методами — 'теоретико-возмущенческим' методом Хироты и рациональным одеванием. Проведен сравнительный анализ этих двух подходов к решению нелинейных уравнений. Показано, что формализм рационального одевания позволяет находить более общие, чем солитонные, классы решений к уравнениям Тоды, которые содержат, в качестве подклассов, все те решения, которые можно строить в рамках 'эвристического' подхода Хироты.

8. Новые многосолитонные решения построены также для абелевых уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель общей линейной группы, в случае, когда соответствующие $\mathbb{Z}$-градуировки индуцированы внешними автоморфизмами конечного порядка. Эти скрученные петлевые тодовские системы включают в себя уравнение Додда–Булло–Ми-

хайлова в качестве простейшего частного случая. Показано, что рассмотренные классы уравнений исчерпывают абелевы петлевые тодовские системы для общего линейного случая.

9. Метод рационального одевания развит на основе блок-матричного представления алгебраических и групповых элементов, индуцированного исходной $\mathbb{Z}$-градуировкой. С помощью такого обобщения построены многосолитонные решения неабелевых петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с комплексной общей линейной группой. При этом получены два принципиально различных типа матричного обобщения абелевых солитонных конструкций — τ-функций Хироты.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН, в отделе теоретической физики Института физики высоких энергий (Протвино, Московская обл.), в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (Дубна, Московская обл.), в отделе теоретической физики Физического института им. П. Н. Лебедева РАН (Москва), на семинарах физического факультета Боннского университета, университета им. Людвига Максимилиана и Технического университета Мюнхена (Бонн и Мюнхен, Германия), в Институте гравитационной физики им. Макса Планка — Институте Альберта Эйнштейна (Потсдам, Германия), на физическом факультете университета г. Вупперталь (Германия).

Наши результаты также были представлены в докладах на международных конференциях “Quantum Aspects of Gauge Theories, Supersymmetry and Unification” (Нойшатель, Швейцария, 1997 г.), “Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions / SUSY’01” (Дубна, 2001 г.), “Quantum Gravity and Superstrings” (Дубна, 2001 г.), на международных совещаниях “Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory” (Протвино, 2002 г.), “Classical and Quantum Integrable Systems” (Протвино, 2004, 2006, 2008 гг.; Дубна, 2005, 2007 гг.), на международных семинарах по физике высоких энергий “Quarks” (Суздаль, 1998 г., Пушкин (Царское Село), 2000 г., Великий Новгород и Валдай, 2002 г., Пушкинские Горы, 2004 г., Санкт-Петербург, 2006 г.), на международных школах “Particles and Cosmology” (Приэльбрусье, Кабардино–Балкария, 2005, 2007 гг.).

Публикации. По материалам исследований, представленных в диссертации, опубликовано 16 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложений. Объем работы составляет 320 страниц и включает библиографический список из 155 наименований.

Содержание работы

Во введении кратко обсуждаются различные подходы к уравнению Тоды общего вида как особому классу нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений, дается обоснование целей диссертации, проводится обзор литературы по ее теме и излагается план работы. Здесь дается общее определение уравнения Тоды, ассоциированного с группой Ли $\mathcal{G}$, чья алгебра Ли $\mathfrak{G}$ наделена такой $\mathbb{Z}$-градуировкой

$$\mathfrak{G} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_k, \qquad [\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_l] \subset \mathfrak{G}_{k+l},$$

что для некоторого фиксированного положительного целого числа L подпространства $\mathfrak{G}_{-k}$ и $\mathfrak{G}_{+k}$ тривиальны при $0 < k < L$. Следовательно, любой элемент ξ алгебры $\mathfrak{G}$ имеет единственное представление в виде суммы

$$\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k,$$

где $\xi_k \in \mathfrak{G}_k$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$. Подпространство $\mathfrak{G}_0$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{G}$, и соответствующая подгруппа Ли группы $\mathcal{G}$ обозначается через $\mathcal{G}_0$. Уравнение Тоды — это нелинейное матричное дифференциальное уравнение второго порядка для гладкого отображения Ξ двумерного пространства $\mathcal{M}$ в $\mathcal{G}_0$ следующего явного вида:

$$\partial_+(\Xi^{-1}\partial_-\Xi) = [\mathcal{F}_-, \Xi^{-1}\mathcal{F}_+\Xi],$$

где $\mathcal{F}_-$ и $\mathcal{F}_+$ — некоторые фиксированные отображения $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{G}_{-L}$ и $\mathfrak{G}_{+L}$, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\partial_+\mathcal{F}_- = 0, \qquad \partial_-\mathcal{F}_+ = 0,$$

где ∂_+ и ∂_- обозначают частные производные по стандартным координатам z^+ и z^- гладкого многообразия $\mathcal{M}$.

В первой главе рассматривается классификация уравнений Тоды, ассоциированных с комплексными классическими группами Ли из A, B, C, D-серии, т. е. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$. Основная цель этой главы состоит в формулировке нового метода перечисления $\mathbb{Z}$-градуировок полупростых алгебр Ли и его применении для классификации соответствующих тодовских систем.

В первом параграфе вводится общее уравнение Тоды, связанное с некоторой конечномерной группой Ли, чья алгебра Ли наделена $\mathbb{Z}$-градуировкой. При этом, рассмотренное во введении представление общего элемента алгебры Ли в виде суммы элементов градуировочных подпространств означает конечную сумму таких элементов. Вместо введенных для общего случая обозначений $\mathcal{G}$ и $\mathfrak{G}$ здесь используются ставшие традиционными для конечномерного случая теории тодовских систем обозначения G для исходной группы Ли и $\mathfrak{g}$ для ее алгебры Ли, а для отображений, входящих в уравнение Тоды в этом случае, γ и $c_\pm$ вместо Ξ и $\mathcal{F}_\pm$, соответственно.

Во втором параграфе излагается новый метод классификации $\mathbb{Z}$-градуировок комплексных полупростых алгебр Ли. Такая классификация является определяющей для классификации соответствующих тодовских систем. Наш метод основан на общих свойствах полупростых алгебр Ли, в частности, на том факте, что любое дифференцирование полупростой алгебры Ли является внутренним. В соответствии с этим наблюдением строится общий линейный оператор, порождающий $\mathbb{Z}$-градуировку, и показывается его диагонализуемость.

Третий, четвертый и пятый параграфы содержат результаты по классификации тодовских систем, ассоциированных с общей и специальной линейной, ортогональной и симплектической группами Ли, соответственно. Градуировочная структура для алгебр Ли рассматриваемых классических групп Ли приведена в виде специальной схемы градуировочных индексов. Использование удобного блок-матричного представления элементов этих алгебр Ли, индуцированного $\mathbb{Z}$-градуировкой, позволяет найти явный вид отображений, входящих в уравнение Тоды. В результате приводится явный вид всех неэквивалентных классов уравнений Тоды, ассоциированных с комплексными классическими группами Ли.

Последний, шестой, параграф этой главы предлагает применение полученной классификации к исторически первой явно проинтегрированной неабелевой тодовской системе (в работах А. Н. Лезнова, М. В. Савельева и др.). Это была система четырех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, связанных с некоторой градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{o}_5(\mathbb{C})$. Показано, что данная сложная система является неабелевым уравнением Тоды, ассоциированным с симплектической группой $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, чья алгебра Ли наделена $\mathbb{Z}$-градуировкой, индуцированной вложением $\mathfrak{sl}_2$-алгебры, с соответствующей параметризацией отображения γ и простейшим выбором нетривиальных отображений c_- и c_+. Здесь же, при рассмотрении более общего случая симплектической группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, построено неабелево (матричное) обобщение уравнения Лиувилля.

Вторая глава посвящена исследованию симметрий тодовских систем, ассоциированных с конечномерными группами Ли. Здесь рассмотрены неабелевы тодовские системы, ассоциированные с общей линейной группой $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ и симплектической группой $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, чьи алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ снабжены $\mathbb{Z}$-градуировкой, индуцированной вложением в них $\mathfrak{sl}_2$-алгебры. Такая $\mathbb{Z}$-градуировка приводит к естественному представлению элементов рассматриваемой алгебры в 2×2 блок-матричном виде, где каждый блок имеет размер $n \times n$. Таким образом, системы, рассмотренные во второй главе, являются частными случаями неабелевых тодовских систем, ассоциированных с классическими группами Ли, классификация которых была представлена в первой главе.

В первом параграфе обсуждаются различные формы уравнения Тоды (а именно, соответствующие так называемым лево-инвариантным и право-инвариантным токам), описываются конкретные неабелевы тодовские системы, соответствующие выбранной $\mathbb{Z}$-градуировке, и предлагается явный вид преобразований симметрии ВЗНВ типа и конформной инвариантности для случая общей линейной группы.

Во втором параграфе вводится понятие характеристических интегралов и обсуждаются их общие свойства (каждая такая величина задает плотность и поток закона сохранения, порождает бесконечный набор сохраняющихся зарядов, и наборы характеристических интегралов образуют дифференциальную алгебру). Дается дифференциально-геометрическое описание тодовских систем, причем компоненты плоской связности даются в представлениях, соответствующих двум различным формам записи уравнения Тоды. Используя калибровочную инвариантность условия нулевой кривизны для плоской связности в тривиальном главном расслоении с базой $\mathcal{M}$ и структурной группой G, методом Дринфельда–Соколова строятся характеристические интегралы для обеих форм неабелевых уравнений Тоды. Всего для общего линейного случая получается $4n^2$ характеристических интегралов, по $2n^2$ для каждой формы уравнения Тоды. При этом используется удобное блок-матричное представление, так что все характеристические интегралы даются в виде некоторой $n \times n$ матрицы.

В третьем параграфе мы строим лагранжев формализм для неабелевых тодовских систем. Дается явный вид общего лагранжиана тодовской системы на двумерном римановом многообразии $\mathcal{M}$ с метрическим тензором η и его составляющих (лагранжиана главного кирального поля, члена Весса–Зумино, тодовского потенциального члена). Выводятся лагранжевы уравнения движения рассматриваемой системы. Введение локальных координат на групповом многообразии позволяет записать явный вид плотности лагранжиана тодовской системы в терминах полей, определяемых с помощью групповых координат. При этом возникает би-инвариантный метрический тензор на групповом многообразии, а тензор энергии-импульса тодовской системы, как лагранжевой динамической системы, дается в терминах полей, соответствующих групповым координатам. Наивно определенный тензор энергии-импульса не является бесследовым, поэтому приходится вводить конформно-улучшенный тензор энергии-импульса и работать в дальнейшем с его нетривиальными компонентами для исседования конформных свойств рассматриваемой системы. Эти компоненты удается выразить в терминах характеристических интегралов.

В четвертом параграфе мы развиваем гамильтонов подход к неабелевым тодовским системам. Для канонического описания системы, не зависящего от выбора локальных координат на групповом многообразии, вводятся новые величины — лево- и право-инвариантные токи, и плотность гамильтониана дается в терминах таких токов, как независимых переменных фазового пространства. Показано, что токи неабелевой тодовской системы образуют два перестановочных экземпляра алгебры токов с центральным расширением. Структурные константы этих алгебр токов имеют смысл как оператор перестановки в тензорном произведении двух экземпляров линейного пространства $\mathfrak{g}_0$. Для гамильтониана тодовской системы находится выражение в терминах лево- и право-инвариантных токов в форме Сугавары. Уравнения движения системы даются в матричном гамильтоновом виде в терминах базисных переменных, описывающих фазовое пространство.

В пятом параграфе мы выводим соотношения W-алгебры как алгебры гамильтоновых аналогов характеристических интегралов относительно скобки Пуассона. Здесь рассмотрен случай тодовской системы для общей линейной группы. Исследован конформно-спиновый состав системы. Генераторы алгебры Вирасоро отождествлены с гамильтоновыми аналогами компонент конформно-улучшенного тензора энергии-импульса. Показано, что конформные веса генераторов W-алгебры равны 1 и 2, т. е. не превышают конформных весов генераторов алгебры токов и Вирасоро. Приведена инфинитезимальная версия преобразований симметрии, порождаемых генераторами W-алгебры. Преобразования симметрии ВЗНВ типа и конформной симметрии находятся как частные случаи этих преобразований W-симметрии. Показано, что нелинейные члены W-алгебры делают инфинитезимальные параметры преобразований W-симметрии явно зависящими от тодовских полей и их производных посредством характеристических интегралов.

В шестом параграфе рассматривается симплектический случай. Здесь уравнение Тоды имеет смысл как неабелево обобщение уравнения Лиувилля. Для этой тодовской системы выполнена полностью та же программа исседований симметрийных свойств, что и для общего линейного случая. Структурные константы полученных W-алгебр реализуются, как и в общем линейном случае, в виде классических r-матриц, обычно вводимых в рамках классических нелинейных интегрируемых систем. При этом показано, что W-алгебры для симплектического случая получаются специальной заменой (сдвигом) структурных констант, возникающих для общего линейного случая, и соответствующего отождествления генераторов.

Третья глава посвящена анализу скрученных групп петель и скрученных алгебр Ли петель и описанию их $\mathbb{Z}$-градуировок. В предисловии к главе отмечается, в частности, что имеется два основных подхода к определению алгебр Ли петель, подчеркиваются их главные недостатки и преимущества и обосновывается наш выбор одного из этих подходов (основанного на известной книге Пресли и Сегала), как наиболее подходящего для тодовских систем, ассоциированных с группами петель.

В первом параграфе дается строгое определение скрученных групп петель и алгебр Ли петель как множеств всех гладких отображений единичной окружности или, эквивалентно, скрученно-периодических отображений евклидовой прямой в конечномерную группу Ли и конечномерную алгебру Ли, соответственно, на которых задано действие некоторых автоморфизмов конечного порядка, с поточечно определенными групповым и алгебраическим законами умножения. Далее вводится понятие алгебр Ли–Фреше и доказывается предложение о том, что скрученная алгебра Ли петель является алгеброй Ли–Фреше. Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ называется алгеброй Ли–Фреше, если $\mathfrak{G}$ является пространством Фреше и операция умножения в алгебре $\mathfrak{G}$, рассматриваемая как отображение из $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}$, непрерывна. Алгебру Ли–Фреше можно рассматривать как бесконечномерное гладкое многообразие, моделируемое на самом себе. Операция умножения алгебры Ли является при этом гладким отображением. Скрученная группа петель наделяется структурой бесконечномерного гладкого многообразия, моделируемого на пространстве Фреше, в качестве которого берется скрученная алгебра Ли петель. При этом учитывается, что исходные конечномерные группа Ли и алгебра Ли связаны через экспоненциальное отображение.

Во втором параграфе исследуются автоморфизмы скрученных алгебр Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ комплексных простых алгебр Ли, где автоморфизм A конечного порядка M простой алгебры Ли

$\mathfrak{g}$, по определению, удовлетворяет соотношению $A^M = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Центральным результатом этого параграфа является доказанная в нем

Теорема 3.2.1 *Группа автоморфизмов скрученной алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ может быть естественно отождествлена с полупрямым произведением* $\mathrm{Diff}_M(S^1) \ltimes \mathcal{L}_{\mathrm{Int}(A),M}(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g})$.

Суть этой теоремы в том, что любое дифференцирование скрученной алгебры Ли петель задается действием линейного оператора Q на элемент $\xi \in \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ в явном виде

$$Q\xi = -\mathrm{i}X(\xi) + \mathrm{i}[\eta, \xi],$$

где X — гладкое $2\pi/M$-периодическое комплексное векторное поле на $\mathbb{R}$, а η — элемент $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$. Более того, для случая вещественных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ дифференцирования такого вида исчерпывают все возможные дифференцирования $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$. Для случая комплексных $\mathfrak{g}$ приходится допустить, что векторное поле X может быть комплексным.

В третьем параграфе описываются $\mathbb{Z}$-градуировки скрученных алгебр Ли петель, анализируется сходимость рядов в пространствах Фреше и рассматриваются $\mathbb{Z}$-градуировки, порождаемые градуировочными операторами. В качестве важнейшего примера приводится стандартная $\mathbb{Z}$-градуировка, порождаемая градуировочным оператором вида $Q' = -\mathrm{id}/\mathrm{d}s$. Здесь же вводится новое понятие *интегрируемых $\mathbb{Z}$-градуировок*: мы называем $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Ли–Фреше интегрируемой, если отображение $\Phi : \mathbb{R} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, задаваемое соотношением

$$\Phi(\tau, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\tau} \xi_k,$$

является гладким. Как обычно, ξ_k обозначает градуировочные компоненты элемента ξ по отношению к рассматриваемой $\mathbb{Z}$-градуировке. Для интегрируемых $\mathbb{Z}$-градуировок векторное поле X, входящее в определение линейного оператора дифференцирования скрученной алгебры Ли петель, оказывается вещественным. Мы доказываем, что любой оператор, порождающий интегрируемую $\mathbb{Z}$-градуировку скрученной алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$, действует на произвольный элемент ξ, как описанный в явном виде оператор дифференцирования Q. В качестве главного результата этого параграфа, сформулирована и доказана следующая

Теоремы 3.3.1 *Интегрируемая $\mathbb{Z}$-градуировка скрученной алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ с конечномерными градуировочными подпространствами сопряжена изоморфизмом с $\mathbb{Z}$-градуировкой подходящей скрученной алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A',M'}(\mathfrak{g})$, порождаемой градуировочным оператором*

$$Q'\xi = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s,$$

т. е. стандартной градуировке этой алгебры Ли петель. При этом, автоморфизмы A и A' отличаются внутренним автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Четвертая глава содержит наши результаты по классификации петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с комплексными классическими группами Ли. Наша классификация основана на предыдущем анализе структуры $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли петель и соответствующих групп петель. Именно, используется доказанный нами факт, что любая интегрируемая $\mathbb{Z}$-градуировка с конечномерными градуировочными подпространствами сопряжена изоморфизмом *стандартной $\mathbb{Z}$-градуировке* некоторой другой алгебры Ли петель, которая всегда определяется по исходной. Простота и удобство использования именно стандартной градуировки предлагает работать не с различными неэквивалентными $\mathbb{Z}$-градуировками одной и той же исходной алгебры Ли петель, а с различными (с точностью до изоморфизмов) алгебрами Ли петель, снабженными всегда стандартной $\mathbb{Z}$-градуировкой. При этом, градуировочные подпространства стандартной $\mathbb{Z}$-градуировки алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ задаются в виде

$$\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})_k = \{\xi \in \mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g}) \mid \xi = \lambda^k x,\ A(x) = \epsilon_M^k x\},$$

где A — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий соотношению $A^M = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ и соответствующий автоморфизму a конечного порядка группы Ли G; здесь, кроме того, λ обозначает ограничение на единичную окружность стандартной координаты на $\mathbb{C}$, а ϵ_M — главный корень M-й степени из единицы. Таким образом, классификация $\mathbb{Z}$-градуировок алгебры Ли петель $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ сводится к описанию неизоморфных $\mathbb{Z}_M$-градуировок конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что, в свою очередь, эквивалентно классификации автоморфизмов конечного порядка алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В первом параграфе выводится общий вид уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель комплексных классических групп Ли G. Дается общий вид и описываются важнейшие свойства отображений пространства независимых переменных $\mathcal{M}$, задающих петлевое уравнение Тоды. Исходные отображения являются отображениями в бесконечномерные пространства. Но использование *экспоненциального закона* позволяет выразить петлевое уравнение Тоды в терминах соответствующих отображений в конечномерные пространства. Таким образом, общее петлевое уравнение Тоды дается в виде

$$\partial_+(\gamma^{-1}\partial_-\gamma) = [c_-, \gamma^{-1}c_+\gamma],$$

где γ является гладким отображением из $\mathcal{M}$ в связную подгруппу Ли G_0 группы G, соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}_{[0]_M}$, а отображения c_- и c_+ являются фиксированными гладкими отображениями из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{g}_{-[L]_M}$ и $\mathfrak{g}_{+[L]_M}$, соответственно ($[k]_M$ обозначает элемент кольца $\mathbb{Z}_M$, соответствующий целому числу k). Эти фиксированные отображения удовлетворяют соотношениям

$$\partial_+c_- = 0, \qquad \partial_-c_+ = 0.$$

Здесь же обсуждается вид петлевых уравнений Тоды для предельных случаев, когда автоморфизм конечного порядка группы Ли G и соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тривиальны, $a = \mathrm{id}_G$, $A = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, а их порядок, целое положительное число M, является произвольным. Это рассмотрение позволяет увидеть, в частности, принципиальное отличие петлевых уравнений Тоды от уравнений Тоды, ассоциированных с конечномерными группами Ли.

Второй параграф содержит описание петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с общими линейными группами, чьи алгебры Ли наделены $\mathbb{Z}_M$-градуировками *внутреннего типа*. Такие градуировки индуцируются внутренними автоморфизмами рассматриваемой алгебры Ли. Основной вывод рассмотрения этого параграфа состоит в том, что с точностью до сопряжений $\mathbb{Z}_M$-градуировка алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ внутреннего типа задается выбором $p \leq n$ положительных целых чисел n_α, удовлетворяющих равенству $\sum_{\alpha=1}^{p} n_\alpha = n$, и $p-1$ положительных целых чисел k_α, удовлетворяющих неравенству $\sum_{\alpha=1}^{p-1} k_\alpha < M$. Эти числа соответствуют блок-матричной структуре элементов рассматриваемой группы и ее алгебры Ли и задают *каноническую структуру* $\mathbb{Z}_M$-градуировки, представленную в виде специальной таблицы. Явный вид отображений γ, c_+ и c_-, а также соответствующие уравнения Тоды находятся согласно этой структуре. При этом делается вывод, что, для того чтобы иметь дело именно с *петлевой* тодовской системой, необходимо предположить, что $k_\alpha = L$ и $M = pL$, причем, безо всякой потери общности, оказывается возможным положить $L = 1$. Эти требования остаются общими для всех классов рассматриваемых уравнений. Здесь, в общем линейном случае, мы получаем один, основной, класс петлевых тодовских систем. Мы показываем, что возможна редукция петлевых тодовских систем, ассоциированных с общими линейными группами, к тодовским системам, ассоциированным с группами петель специальных линейных групп, так что любое решение уравнения Тоды, ассоциированного с группой петель $\mathcal{L}_{a,M}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ может быть найдено из решения соответствующего уравнения Тоды, ассоциированного с группой петель $\mathcal{L}_{a,M}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$. В этом же параграфе мы строим неабелевы (матричные) обобщения известных уравнений sinh-Гордон и sin-Гордон как две неэквивалентные вещественные формы рассмотренных петлевых уравнений Тоды.

Третий параграф посвящен уравнениям Тоды, ассоциированным с группами петель комплексных ортогональных групп, чьи алгебры Ли наделены $\mathbb{Z}_M$-градуировками внутреннего типа. При рассмотрении этого случая требуется блок-матричное описание всех несопряженных внутренних автоморфизмов комплексных ортогональных групп и их алгебр Ли. Введенные выше целые положительные числа n_α и k_α используются также и в этом случае, но теперь они, а также отображения γ, c_+ и c_- подчинены специальным условиям, следующим из структуры группы $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$. В результате, в ортогональном случае мы находим три неэквивалентных класса петлевых тодовских систем, причем, какой именно класс реализуется, зависит от четности чисел n и p.

В четвертом параграфе рассматривается случай петлевых тодовских систем, ассоциированных с симплектическими группами $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$. Здесь число n с необходимостью четно. Симплектическая группа и ее алгебра Ли $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ имеют только внутренние автоморфизмы, поэтому в данном случае возможны лишь $\mathbb{Z}_M$-градуировки внутреннего типа. Классификация петлевых тодовских систем здесь в целом похожа на классификацию в ортогональном случае, но со специфическими для комплексной симплектической группы и ее алгебры Ли условиями на положительные целые числа n_α и k_α, определяющими соответствующую каноническую структуру $\mathbb{Z}_M$-градуировки, и отображения γ, c_+ и c_-. Мы показываем, что возникают три неизоморфных класса петлевых тодовских систем, ассоциированных с комплексной симплектической группой, и даем соответствующие уравнения в явном виде.

Пятый параграф содержит классификацию петлевых тодовских систем, ассоциированных с комплексными общими линейными группами, чьи алгебры Ли снабжены $\mathbb{Z}_M$-градуировками *внешнего типа*, т. е. индуцированными внешними автоморфизмами $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Показывается, что порядок таких автоморфизмов, положительное целое число M, с необходимостью является четным ($2N$). Здесь мы также находим три неэквивалентных класса уравнений. При этом также показывается, что целые положительные числа n_α и k_α, характеризующие $\mathbb{Z}_{2N}$-градуировку, и отображения γ, c_+ и c_-, входящие в общее уравнение Тоды, подчиняются специфическим условиям, имеющим вид определенных комбинаций тех алгебро-групповых условий, которые возникали в ортогональном и симплектическом случаях, хотя исходная структурная группа Ли является лишь общей линейной.

Шестой параграф предлагает рассмотрение петлевых тодовских систем, ассоциированных с комплексными ортогональными группами $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$, чьи алгебры Ли наделены $\mathbb{Z}_M$-градуировками внешнего типа. Соответствующие внешние автоморфизмы существуют только для четных значений n. Кроме того, оказывается, что числа M и p также с необходимостью являются четными. В результате рассмотрения мы находим один класс петлевых уравнений Тоды и показываем, что он эквивалентен одному из трех классов, уже найденных нами для ортогонального случая, но с дополнительными ограничениями на размерности блоков, т. е. на числа n_α.

Седьмой параграф содержит общую классификацию петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с комплексными классическими группами Ли. Здесь приводятся выведенные в результате нашего рассмотрения четыре различных класса таких систем и предлагается специальное графическое представление для них:

это представление служит для наглядного объяснения результатов классификации, а именно, того факта, что на самом деле возникают только четыре неэквивалентных класса петлевых тодовских систем. При этом, в каждом из трех из этих классов можно выделить два подкласса, различающихся специфическими условиями на отображения Γ_1, Γ_s и $C_{\pm 0}$, $C_{\pm s}$. В конце также кратко обсуждается аналогичное графическое представление для тодовских систем, ассоциированных с конечномерными группами Ли, для которых было выявлено всего три различных класса.

Пятая глава посвящена построению солитонных, или солитоноподобных, решений абелевых и неабелевых петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с общими линейными группами. При этом используются два метода — Хироты и рационального одевания. Заметим, что N-солитонными решениями в диссертации называются решения, зависящие от N линейных комбинаций независимых переменных и с определенным набором характеристических параметров.

В первом параграфе дается общая формулировка петлевых уравнений Тоды, основанная на представлении нулевой кривизны с наложением $\mathbb{Z}$-градуировочных и калибровочного условий на компоненты плоской связности. Используя экспоненциальный закон, здесь мы снова находим окончательный вид уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель. Такой вывод уравнений оправдан тем, что компоненты связности и генерирующие их отображения являются здесь отображениями конечномерного пространства в бесконечномерное пространство, а именно, двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ в алгебру Ли петель и группу петель, $\mathcal{L}_{A,M}(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{L}_{a,M}(G)$ соответственно. Как отмечалось выше, экспоненциальный закон позволяет переформулировать такие отображения в терминах отображений конечномерных пространств в конечномерные пространства, $\mathbb{R}^2 \times S^1$ в $\mathfrak{g}$ и G соответственно. Получающаяся при этом структура отображений по компоненте S^1 особенно важна, так как в методе рационального одевания ключевую роль играют аналитические свойства этих отображений. Здесь же рассматриваются (линейные) симметрии уравнений Тоды, ассоциированных с группами петель.

Во втором параграфе описывается явный вид абелевых петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с общими линейными группами. Всего выводится три различных типа таких уравнений — один для нескрученных и два для скрученных групп петель общих линейных групп. Симметрии, обсуждаемые выше, используются для приведения отображений c_+ и c_- к наиболее удобному, с точки зрения построения решений, виду. Демонстрируется также взаимосвязь полученных трех типов абелевых петлевых уравнений Тоды с уравнениями Тоды, ассоциированными с аффинными группами Ли $A^{(1)}_{n-1}$, $A^{(2)}_{2s-2}$ и $A^{(2)}_{2s-1}$. Последние же записываются стандартным образом, так, что соответствующая обобщенная матрица Картана возникает в уравнении в явном виде. Знаменитое уравнение Додда–Булло–Михайлова оказывается простейшим частным случаем абелевых петлевых уравнений второго типа, что соответствует аффинной алгебре Ли типа $A^{(2)}_2$.

В третьем параграфе строятся солитонные решения абелевых петлевых уравнений Тоды первого типа. Показывается, что все многосолитонные решения, которые строятся методом Хироты, находятся среди тех, которые можно построить в рамках формализма рационального одевания. Проясняются связи между составляющими этих двух методов. При этом, τ-функции метода Хироты представляются в виде определителей специального вида матриц, которые возникают в методе рационального одевания. В свою очередь, эти определители представлены в виде конечных сумм элементов, описывающих свободные и взаимодействующие ‘солитонные специи’.

Четвертый параграф посвящен уравнениям второго и третьего типов — абелевым скрученным петлевым уравнениям Тоды, ассоциированным с общими линейными группами, чьи алгебры Ли наделены $\mathbb{Z}_M$-градуировками внешнего типа. Решения для этих уравнений строятся здесь методом рационального одевания. Наличие в этих системах внешнего автоморфизма делает их принципиально отличными от системы первого типа: несмотря на то, что все они ассоциированы с общими линейными группами, в системах второго и третьего типов необходимо накладывать специальные алгебро-групповые условия на отображения c_+, c_- и γ и учитывать их в формализме рационального одевания. Эти условия приводят к определенным связям между положениями полюсов одевающих мероморфных отображений и их обратных отображений, что значительно усложняет процедуру построения солитонных решений по сравнению с нескрученным случаем. При этом, определенную предварительную часть метода рационального одевания удается развивать на общих основаниях для уравнений обоих типов. Здесь мы находим явный вид матриц, отношения определителей которых дают некотрые — более общие, чем солитонные — решения рассматриваемых абелевых петлевых уравнений Тоды.

В пятом параграфе солитонные решения рассматриваемых двух типов абелевых скрученных петлевых уравнений Тоды выводятся из общих решений, полученных выше методом рационального одевания. Для такой конкретизации общих решений к собственно солитонным решается спектральная проблема для отображений c_+ и c_- и подходящим образом редуцируется пространство параметров, задающих начальные данные системы. В явном виде приводятся одно- и двухсолитонные решения. Солитонные решения, полученные ранее для уравнения Додда–Булло–Михайлова методом Хироты, воспроизводятся здесь как частные случаи построенных методом рационального одевания более общих решений скрученных петлевых уравнений Тоды. Главное отличие уравнений второго и третьего типов проявляется в том, что отображения c_+ и c_- для второго типа задаются невырожденными (нечетномерными) матрицами, а для третьего типа такие (четномерные) матрицы имеют по одному нулевому собственному вектору. Учет начальных данных, соответствующих этим 'нуль-подпространствам', позволяет построить принципиально новые солитонные решения для уравнений третьего типа.

В шестом параграфе метод рационального одевания обобщается для построения солитонных решений неабелевых петлевых уравнений Тоды, ассоциированных с общими линейными группами. Здесь рассматриваются только нескрученные системы. При этом строятся две различные конструкции, обобщающие абелевы солитонные решения. В обеих из них принципиально важным оказывается исследование структур матричнозначных отображений c_+ и c_- и решение соответствующих спектральных задач уже в неабелевом случае. Как результат развития метода рационального одевания в применении к неабелевым тодовским системам, приводятся явные солитоноподобные решения в виде двух различных типов матричного обобщения τ-функций Хироты.

В заключении кратко перечисляются и обсуждаются основные результаты, выносимые на защиту.

В приложениях приводятся некоторые полезные сведения из теории алгебр Ли и групп Ли и их автоморфизмов конечного порядка (A), о матричных группах Ли, наделенных структурой гладкого многообразия, и операциях с алгебро-значными функциями на них (B), о группах диффеоморфизмов, о распределениях на S^1, о сходимости и рядах в пространствах Фреше (C); здесь же дается вывод некоторых важных формул, а именно, алгебр токов и соотношений W-алгебр (B) и основных свойств матриц, возникающих в солитонных решениях (D).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Kh. S. Nirov, *Constraint algebras in gauge invariant systems*, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 4087–4106, arXiv: hep-th/9407156.

2. Kh. S. Nirov, *The Ostrogradsky prescription for BFV formalism*, Mod. Phys. Lett. **A12** (1997) 1991–2004, arXiv: hep-th/9704183.

3. Kh. S. Nirov and M. S. Plyushchay, *Symmetries and classical quantization*, Phys. Lett. **B405** (1997) 114–120, arXiv: hep-th/9707070.

4. Kh. S. Nirov and M. S. Plyushchay, *P,T-invariant system of Chern–Simons fields: Pseudoclassical model and hidden symmetries*, Nucl. Phys. **B512** (1998) 295–319, arXiv: hep-th/9803221.

5. Kh. S. Nirov, *Pseudoclassical mechanics and hidden symmetries of 3D particle models*, Fortsch. Phys. **47** (1999) 239–246, arXiv: hep-th/9804044.

6. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *On classification of non-Abelian Toda systems*, in: Geometrical and Topological Ideas in Modern Physics (ed. V. A. Petrov). IHEP, Protvino, 2002, pp.213–221, arXiv: nlin.SI/0305023.

7. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *Toda-type integrable systems and W-algebras*, in: Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions (SUSY'01: eds. D. I. Kazakov, A. V. Gladyshev). World Scientific, Singapore, 2002, pp.434–438.

8. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *Higher symmetries of Toda equations*, in: Procs. of the 12th Intl. Seminar on High Energy Physics "Quarks'2002" (eds. V. A. Matveev et al). INR, Moscow, 2004, pp.262–271, arXiv: hep-th/0210136.

9. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *W-algebras for non-Abelian Toda systems*, J. Geom. Phys. **48** (2003) 505–545, arXiv: hep-th/0210267.

10. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *On $\mathbb{Z}$-gradations of twisted loop Lie algebras of complex simple Lie algebras*, Commun. Math. Phys. **267** (2006) 587–610, arXiv: math-ph/0504038.

11. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *Toda equations associated with loop groups of complex classical Lie groups*, Nucl. Phys. **B782** (2007) 241–275, arXiv: math-ph/0612054.

12. Х. С. Ниров, А. В. Разумов, *О $\mathbb{Z}$-градуированных алгебрах Ли петель, группах петель и уравнениях Тоды*, Теор. Мат. Физ. **154** (2008) 451–476, (англ. перевод: Kh. S. Nirov and A V. Razumov, *$\mathbb{Z}$-graded loop Lie algebras, loop groups, and Toda equations*, Theor. Math. Phys. **154** (2008) 385–404), arXiv: 0705.2681.

13. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *Abelian Toda solitons revisited*, Rev. Math. Phys. **20** (2008) 1209–1248, arXiv: 0802.0593.

14. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *The rational dressing for Abelian twisted loop Toda systems*, J. High Energy Phys. **12** (2008) 048, arXiv: 0806.2597.

15. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *Solving non-Abelian loop Toda equations*, Nucl. Phys. **B815** [PM] (2009) 404–429, arXiv: 0809.3944.

16. Kh. S. Nirov and A. V. Razumov, *More non-Abelian loop Toda solitons*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 285201, arXiv: 0810.1025.