

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт ядерных исследований Российской академии наук

На правах рукописи

Шкерин Андрей Викторович

**Солитоны и их классическая устойчивость в  
теориях комплексного скалярного поля с  
глобальной  $U(1)$ -симметрией**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
кандидат физ.-мат. наук  
Нугаев Эмин Яткярович

Москва – 2018

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. О классической устойчивости Q-трубок</b> . . . . .	13
1.1. Введение к главе . . . . .	13
1.2. Классические решения . . . . .	14
1.3. Классическая устойчивость . . . . .	21
1.4. Заключение к главе . . . . .	30
<b>Глава 2. О соответствии между неустойчивыми Q-шарами и сфалеронами</b> . . . . .	33
2.1. Введение к главе . . . . .	33
2.2. Классические решения в 3+1 измерениях . . . . .	35
2.3. Периодические Q-шары в 1+1 измерениях . . . . .	38
2.4. Устойчивость Q-шаров на окружности . . . . .	44
2.5. О соответствии Q-клаудов сфалеронам . . . . .	46
<b>Глава 3. Нелинейные разрежения и сгущения в заряженном скалярном конденсате</b> . . . . .	49
3.1. Введение к главе . . . . .	49
3.2. Общее рассмотрение . . . . .	52
3.3. Некоторые точные примеры . . . . .	58
3.4. Дальнейшие примеры: Q-шары и Q-дырки в теории с полиномиальным потенциалом . . . . .	70
3.5. Классическая (не)устойчивость Q-дырок и Q-балджей . . . . .	75
3.6. Заключение к главе . . . . .	78
<b>Глава 4. Вибрационные моды Q-шаров: аналитический анализ</b> . . . . .	80
4.1. Введение к главе . . . . .	80

4.2. Квазиклассическое приближение . . . . .	81
4.3. Возмущения в кусочно-параболическом потенциале . . . . .	84
4.4. Тонкостенное приближение для $Q$ -шаров в полиномиальном по- тенциале . . . . .	92
4.5. Заключение к главе . . . . .	99
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>Приложение А. Допустимые значения <math>\omega</math> для <math>Q</math>-дырок в <math>(3+1)</math>-мер- ном пространстве-времени . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>Приложение Б. О поведении мод вблизи критической точки .</b>	<b>104</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>106</b>

## Введение

Солитон [1] — это решение классических нелинейных уравнений движения, описывающие локализованный сгусток полей, сохраняющий форму при движении и взаимодействии с другими солитонами. В более широком смысле, солитон (также уединенная волна или “lump” [2]) — это конфигурация, профиль которой сохраняется во времени и при свободном распространении. Устойчивость солитона возможна благодаря балансу между дисперсионными эффектами с одной стороны и нелинейными эффектами — с другой.

Солитоны являются одним из центральных понятий в современной физике. Сфера их приложений охватывает нелинейную оптику [3, 4], физику конденсированных сред [5], физику частиц и космологию [6, 7]. Свойства солитонов позволяют говорить о них как о классических частице-подобных объектах, несмотря на то что стандартное определение частицы дается в рамках теоретико-группового и квантово-полевого подходов [8, 9].

Изучение классических решений нелинейных уравнений поля может дать много информации о теории [10]. Будучи непertурбативным решением, солитон невозможно получить в рамках теории возмущений над классическим (однородным) вакуумом теории. В свою очередь, теория возмущений может быть построена над солитонными решениями и, более того, в формализме квантовой теории поля солитоны должны подвергаться процедуре квантования. Классическое решение, тем не менее, является справедливым ведущим приближением квазиклассического метода, поправки к которому вычисляются стандартным образом, коль скоро соответствующие константы связи малы [11]. Квантование неоднородных решений имеет свои особенности, например, из-за наличия нулевых мод [10, 12]. В любом случае, установление классического спектра возмущений над солитоном является необходимым шагом на этом пути.

Солитонные решения естественно классифицировать на топологические

и нетопологические. Существование и устойчивость топологических солитонов определяются конфигурацией полей на больших расстояниях от центра солитона, которая не может быть деформирована в вакуумную конфигурацию с конечными энергетическими затратами. Первыми примерами таких объектов, моделирующих классические частицы, были скирмион (см., например, [13]) и солитоны в модели синус-Гордон [14]. Нетопологические солитоны, с другой стороны, имеют тривиальную топологию и существуют благодаря наличию в теории сохраняющихся зарядов, обеспеченных какими-либо глобальными или локальными симметриями. Топологический солитон, минимизирующий функционал энергии в секторе с данным топологическим числом, является устойчивым. Этого нельзя сказать о нетопологических солитонах, которые могут быть нестабильными. В данной диссертации будет подробно обсуждаться устойчивость некоторых видов нетопологических солитонов.

В понятие устойчивости классического решения можно вкладывать разный смысл [15, 16]. Говоря о классической устойчивости, подразумевают отсутствие в спектре линейных возмущений над солитоном экспоненциально быстро растущих со временем мод. В данной работе мы будем интересоваться в основном этим типом стабильности солитонов, когда речь идет о явных вычислениях.

Солитон является условным локальным экстремумом функционала энергии. При наличии в теории двух локальных минимумов с разными энергиями возможен туннельный процесс, приводящий к распаду решения с большей энергией в решение с меньшей энергией [17]. При этом должны выполняться законы сохранения энергии и заряда. Солитон, таким образом, может оказаться метастабильным, то есть устойчивым классически, но не устойчивым по отношению к квантовым или тепловым флуктуациям. Наконец, если поля, составляющие солитонную конфигурацию, взаимодействуют с другими полями теории, возможно “испарение” солитона в частицы этих полей [18] или появле-

ние неустойчивости, связанное с квантовыми поправками в потенциал [19].

Пожалуй, самым известным примером нетопологических солитонов являются решения, возникающие в теориях комплексного скалярного поля, обладающих симметрией относительно группы  $U(1)$ . Вследствие этой симметрии, в теории имеется сохраняющийся заряд  $Q$ , и классические решения, помимо энергии, характеризуются также значением  $Q$ . Естественно поэтому называть такие решения “ $Q$ -веществом”. Наиболее изученным примером неоднородных конфигураций типа  $Q$ -вещества являются  $Q$ -шары [20, 21].

$Q$ -шары возникают в теориях одного или многих скалярных полей (одно из них обязано быть комплексным) в плоском пространстве-времени. Группа симметрии теории может быть глобальной или локальной, в последнем случае говорят о “калибровочных  $Q$ -шарах” [22, 23].  $Q$ -шары нашли многочисленные применения в физике высоких энергий. Их существование предсказывается в моделях физики за пределами Стандартной Модели [24, 25]; они используются при изучении ряда вопросов в космологии и астрофизике, таких как бариогенезис [26], фазовые переходы в ранней Вселенной [27].  $Q$ -шары рассматриваются в качестве кандидатов на роль темной материи [28], в качестве альтернативы черным дырам [29]. Обсуждается существование объектов, аналогичных  $Q$ -шарам, в конденсированных средах [30].

Несмотря на накопленный за годы изучения запас знаний о  $Q$ -шарах, прогресс в этой области продолжается. К примеру, сравнительно недавно была решена задача о квантово-механическом распаде  $Q$ -шара [31]. Активно изучаются многие вопросы, касающиеся малых возмущений над обычными и калибровочными  $Q$ -шарами [32]. То же касается классической устойчивости  $Q$ -шаров в различных моделях [33, 34].

$Q$ -шары имеют аналоги в более сложных теориях. К примеру, их естественным обобщением являются гравитирующие сгустки полей в теориях с глобальной  $U(1)$ -симметрией — бозонные звезды [35, 36]. Бозонные звезды изу-

чаются довольно интенсивно в последнее время в связи с их значимостью для космологии и астрофизики (см., например, [37, 38]). В пределе  $M_P \rightarrow \infty$  (солитонные) бозе-звезды сводятся к Q-шарам.

Спектр классических решений теории обычно не исчерпывается Q-шарами. Это справедливо уже в простейшем случае теории одного комплексного скалярного поля в плоском пространстве-времени. Другим очевидным примером Q-вещества являются однородные решения, представляющие собой заряженный конденсат скалярного поля. Из-за свойств скалярного потенциала наличие конденсата неизбежно в теориях, содержащих Q-шары. К конденсату применимы все вопросы, которые можно поставить при изучении Q-шаров, включая вопрос о его классической и квантовой устойчивости. Свойства конденсата очень важны для понимания, например, динамики поля инфлатона в ранней Вселенной, во время разогрева и на предшествующей стадии [39, 40].

Q-шар вполне описывается двумя “макроскопическими” величинами — энергией и зарядом. Другим видом Q-вещества являются стационарные решения, характеризующиеся также ненулевым угловым моментом  $J$  [41]. Интересным примером таких решений являются Q-трубки — протяженные объекты, обладающие аксиальной симметрией в трех пространственных измерениях. Q-трубка — это глобальный нетопологический аналог калибровочного вихря [6]. Интересно поэтому сравнить свойства двух видов солитонов. Например, как будет показано в данной диссертации, Q-трубки с  $J \neq 0$  классически неустойчивы, подобно вихрям с большим магнитным моментом.

В качестве еще одного обобщения Q-шаров можно упомянуть композитные конфигурации, составленные из пар односолитонных решений, которые, тем не менее, являются квази-стационарными [42]. За некоторыми исключениями, многосолитонные конфигурации непросты для изучения ввиду сложной динамики взаимодействующих солитонов [10]. Наконец, имеются работы по построению Q-шаров в моделях с расширенным кинетическим членом [43] или не

аналитическим потенциалом [44]. В данной диссертации мы будем в основном интересоваться односолитонными решениями в теориях с простыми полиномиальными либо плоскими потенциалами.

Как уже отмечалось, классическим решениям типа  $Q$ -шаров посвящена обширная литература и многие их свойства хорошо изучены. Тем интереснее обнаружить, что некоторые виды  $Q$ -вещества до сих пор не обсуждались в рамках релятивистской теории поля. Однако, у них, как и у  $Q$ -шаров, имеются аналоги в нелинейной оптике, в частности, в теории нелинейного уравнения Шредингера [45]. Этим уравнением описывается, к примеру, распространение светового пучка в среде с нелинейной дисперсией. Оптическим солитоном в этом случае является огибающая неоднородности амплитуды и фазы световой волны (см., например, обзор [46]). Оптические солитоны имеют огромное практическое значение, например, для передачи информации на дальние расстояния или для реализации логических операций на основе света [47, 48]. В зависимости от знака дисперсии групповой скорости, нелинейное уравнение Шредингера может содержать решения типа “ярких солитонов”, являющиеся локальными повышениями интенсивности света, либо решения типа “темных солитонов”, представляющих собой локальные “провалы” на фоне волны постоянной интенсивности [49, 50].

Нетопологическими аналогами ярких солитонов в релятивистской теории поля являются  $Q$ -шары.<sup>1</sup> Теоретико-полевые решения, соответствующие темным солитонам, не столь часто упоминаются, хотя и достаточно очевидны. К примеру, в теории комплексного скалярного поля с глобальной  $U(1)$ -симметрией и потенциалом вида “мексиканской шляпы” таким решением будет топологический стационарный комплексный кинк [51] (см. также [52]). Естественно поставить вопрос о существовании и свойствах не топологических солитонов, описы-

---

<sup>1</sup> Заметим, что солитон, распространяющийся по оптическому волокну, является топологическим в том смысле, что асимптотики его волновой функции имеют разную фазу.



вающих локальные нелинейные разрежения (или, наоборот, сгущения) плотности заряда фонового однородного решения. Эти виды  $Q$ -вещества не изучались ранее, хотя, как будет показано в данной диссертации, они могут существовать в тех же теориях и при тех же значениях параметров скалярного потенциала, что и обычные  $Q$ -шары. Это наблюдение ведет к ряду интересных вопросов о динамике процессов, включающих различные виды  $Q$ -вещества. Мы затронем некоторые из этих вопросов в данной работе.

Данная диссертация посвящена анализу различных видов  $Q$ -вещества в теориях комплексного скалярного поля с глобальной  $U(1)$ -симметрией. Имея целью установление общих свойств классических решений, мы будем, где это возможно, ограничиваться аналитическим рассмотрением. Такое ограничение мотивировано тем фактом, что многие характеристики солитонов модельно-независимы и, следовательно, их можно изучать в моделях, допускающих точные решения. Разумеется, круг задач, в которых не обойтись без привлечения трудоемких численных методов, весьма обширен. Он включает, например, вопросы формирования и взаимодействия солитонов [15, 53, 54]. Само существование частице-подобных конфигураций часто обнаруживается в результате численного эксперимента [55]. На протяжении диссертации мы коснемся некоторых из этих задач и обсудим их настолько подробно, насколько позволяет аналитический анализ. Где это необходимо, мы будем обосновывать общий характер наших выводов.

Диссертация состоит из 4-х глав основного текста и заключения. В 1-й главе будут изучены  $Q$ -трубки в теории с точно решаемым потенциалом. Мы рассмотрим их основные свойства и затем перейдем к вопросу об их классической устойчивости относительно возмущений, не нарушающих аксиальную симметрию задачи. По аналогии с топологическим вихрем можно ожидать, что трубкам с большим угловым моментом выгодно распадаться [56], в то время как трубки с нулевым моментом аналогичны  $(2+1)$ -мерным  $Q$ -шарам и,

следовательно, являются устойчивыми в определенном диапазоне частот. Эти ожидания подтверждаются вычислениями.

2-я глава посвящена сравнительному анализу классически устойчивых  $Q$ -шаров, однородного конденсата и классически неустойчивых  $Q$ -шаров. Последние известны также под названием “ $Q$ -клауды” [57]. Мы изучим простые модели, на примере которых сравним зависимости энергий и зарядов указанных видов  $Q$ -вещества от частоты. При обсуждении конденсата следует иметь в виду, что, в отличие от  $Q$ -шара, его полная энергия и заряд бесконечны в бесконечном пространстве. Поэтому для осмысленного рассмотрения однородных решений на равных основаниях с  $Q$ -шарами на систему необходимо наложить определенные граничные условия. В данной главе мы используем периодические граничные условия с периодом  $L$  и рассмотрим классические решения на компактном пространстве. Некоторые свойства “компактифицированных” таким образом  $Q$ -шаров достойны отдельного изучения. Прежде всего, однако, нас будут интересовать те решения, которые не зависят от  $L$  в пределе  $L \rightarrow \infty$ . Мы обнаружим, что среди таких решений имеется тройное вырождение по заряду, при этом  $Q$ -клауд обладает наибольшей энергией, а два других решения классически устойчивы. Это позволяет нам предположить, что  $Q$ -клауд является сфалероном — седловой точкой функционала энергии, находящейся на вершине энергетического барьера, разделяющего устойчивые конфигурации [51].

3-я глава посвящена изучению новых видов  $Q$ -вещества. Они представляют собой локальные нелинейные неоднородности в скалярном конденсате: разрежения (“ $Q$ -дырки”) или, наоборот, сгущения (“ $Q$ -балджи”) плотности заряда. Как уже отмечалось,  $Q$ -дыркам можно поставить в соответствие определенные решения нелинейного уравнения Шредингера — т.н. темные солитоны, встречающиеся в нелинейной оптике, в изучении волн на мелкой воде [58], магнитных пленках [59]. Упомянем также “дырки в конденсате духов”, изучавшиеся в ра-

боте [60]. В отличие от темных солитонов,  $Q$ -дырки обычно существуют при тех же параметрах теории, что и обычные  $Q$ -шары (или  $Q$ -балджи), аналогичные ярким солитонам. Неудивительно поэтому, что многие свойства этих видов  $Q$ -вещества идентичны. Поскольку  $Q$ -дырки и  $Q$ -балджи существуют на фоне классически устойчивого конденсата, их полная энергия и заряд бесконечны в бесконечном пространстве. Мы покажем, что энергию и заряд солитона в этом случае удобно отсчитывать от соответствующих величин конденсата, в который “погружено” неоднородное решение.

После рассмотрения общих свойств  $Q$ -дырок и  $Q$ -балджей и нескольких явных примеров, мы обсудим их классическую устойчивость. Будут приведены аргументы в пользу того, что решения этого вида неустойчивы. Важно отметить, что  $Q$ -дырки и  $Q$ -балджи имеют нетопологическую природу, что отличает их, например, от решений типа комплексного кинка, упомянутого ранее.<sup>2</sup>

В главе 4 мы возвращаемся к классически устойчивым  $Q$ -шарам и исследуем спектры малых возмущений над ними в моделях с плоским и степенным потенциалами. В последнем случае аналитический анализ возможен в определенном диапазоне частот  $Q$ -шаров, для которого выполняется приближение тонкой стенки.<sup>3</sup> Как отмечалось ранее, знание спектра возмущений необходимо для квантования солитона. Кроме того, подобный анализ может представлять интерес с точки зрения феноменологии. В самом деле, простые аналитические решения для  $Q$ -шаров могут быть прототипами более реалистичных объектов типа бозонных звезд. Изучение флуктуаций (в том числе, ведущих к неустойчивости) бозонных звезд представляется важным в свете их значимости для космологии и астрофизики [62, 63].

---

<sup>2</sup> Заметим, что топологическая природа кинка не гарантирует его устойчивость в теории комплексного скалярного поля [51].

<sup>3</sup> Как правило, тонкостенное приближение справедливо для  $Q$ -шаров с частотами, близкими к минимально допустимой частоте, если в этом пределе заряд  $Q$ -шара неограниченно возрастает [21, 61].

Важно отметить, что задача на связанные состояния над неоднородным комплексным решением в общем случае не является задачей на спектр эрмитова оператора, и аналогия с уравнением Шредингера неприменима. Тем не менее, в определенных случаях удастся решить задачу аналитически, а интуиция, почерпнутая из рассмотрения квантово-механических систем, оказывается верной. Это относится, например, к утверждению, что число мод в дискретном спектре пропорционально объему  $Q$ -шара (при достаточно больших  $Q$ ). Мы также установим, что в спектре  $Q$ -шара с большим зарядом могут содержаться мягкие моды. Другим интересным результатом является наличие выделенной сферически-симметричной моды у  $Q$ -шаров, находящихся у границы области классической устойчивости. Эта мода аналитически продолжается в нестабильную область, где становится распадной модой. Мы отметим также возможность построения теории возмущений, применимой для мягких мод и для выделенной моды, которая существенно упрощает аналитическое рассмотрение.

В заключении мы суммируем основные результаты диссертации. Они были опубликованы в 3 работах в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК [64–66], и в 1 препринте [67], а также доложены на международных конференциях “Кварки-2014” (Суздаль, 2-8 июня 2014), “Кварки-2018” (Валдай, 27 мая-2 июня 2018), научных семинарах “Geometry and Dynamics” (EPFL, Швейцария, 19 ноября 2014), “Skience” (Cran Montana, Швейцария, 2 февраля 2015), конференции “Молодые ученые-2014” (Москва, 14-15 апреля 2014), научных семинарах ИЯИ РАН, МИАН, ОИЯИ.

## О классической устойчивости Q-трубок

### 1.1. Введение к главе

Q-трубки — это класс нетопологических солитонов, возникающих в теориях комплексного скалярного поля с самодействием. Они исследовались в работе [41] в качестве обобщения  $(3 + 1)$ -мерных сферически-симметричных Q-шаров в модели с полиномиальным потенциалом. В дальнейшем Q-трубки подробно обсуждались, например, в работах [68, 69]. Главная особенность этих солитонов — наличие углового момента  $J$ . В теориях с глобальной  $U(1)$ -симметрией, угловой момент трубки оказывается связан с ее зарядом  $Q$  соотношением

$$J = nQ, \quad (1.1)$$

где  $n$  — целое число. При этом полевая конфигурация, составляющая Q-трубку, стационарна, что отличает ее, скажем, от системы из вращающихся вокруг общего центра Q-шаров, угловой момент которой может принимать любые значения.

Свойства Q-трубок и Q-шаров схожи во многих аспектах. Важнейшую информацию о Q-шаре, в том числе о его классической устойчивости, предоставляют зависимости энергии  $E$  и заряда Q-шара от частоты  $\omega$ . Для Q-трубок эти зависимости имеют качественно такое же поведение, что и для Q-шаров. Далее, известное условие Вахитова-Колоколова [70] для классической устойчивости Q-шаров [71],

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Q^2} < 0, \quad (1.2)$$

в некоторой степени применимо и к Q-трубкам.<sup>1</sup> В данной главе мы уточним

---

<sup>1</sup> Интересно отметить, что первоначально это условие было получено в работе [70] как условие устойчивости солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера.

это утверждение, проведя аналитический анализ классической устойчивости Q-трубок в теории с точно решаемым потенциалом. Именно, в секции 1.2 мы построим аналитические решения для Q-трубок и обсудим их общие свойства, а в секции 1.3 исследуем стабильность относительно линейных возмущений. Мотивацией к исследованию стабильности Q-трубок является аналогия, которая может быть проведена между ними и вихрями Абрикосова-Нельсена-Ольсена (АНО) в теории сверхпроводимости 2-го рода, в которой энергетически выгодным является распад нити с магнитным потоком  $n\Phi_0$  на  $n$  нитей с магнитным потоком  $\Phi_0$  [56, 72]. При поиске распадов Q-трубок мы ограничимся исследованием линейных флуктуаций, не нарушающих аксиальную симметрию решения. Это означает, что мы не рассматриваем эффекты, связанные с “перетяжками” трубки и приводящие к ее распаду, например, в цепочку Q-шаров.

Мы покажем, что для широкого диапазона параметров трубок имеет место классическая неустойчивость и, более того, область, задаваемая формулой (1.2), не является более областью устойчивости для трубок с ненулевым угловым моментом  $n \geq 1$ . С другой стороны, для трубок с  $n = 0$ , полевой анзац для которых в точности повторяет анзац для (2+1)-мерного Q-шара, мы не найдем новых, по сравнению с Q-шаром, неустойчивостей, что говорит о возможности применения условия Вахитова-Колоколова к этим решениям.

## 1.2. Классические решения

### 1.2.1. Действие и уравнения движения

Рассмотрим теорию комплексного скалярного поля в 3+1 измерениях с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(|\phi|) . \quad (1.3)$$

Поскольку Q-трубки обладают аксиальной симметрией, удобно использовать цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ . В этом случае анзац, описывающий со-

литонную конфигурацию, имеет вид

$$\phi = F(r)e^{i\omega t}e^{in\varphi} . \quad (1.4)$$

Здесь  $\omega$  — непрерывный положительный параметр (частота трубки),  $n$  — целое число (“число наматывания”) и  $F$  — гладкая вещественная функция, которую мы будем полагать неотрицательной. Анзац (1.4) отличается от анзаца для Q-шара наличием фазового множителя  $e^{in\varphi}$ , приводящего к угловому моменту, пропорциональному  $n$ . В дальнейшем, говоря об энергии, заряде и угловом моменте, мы будем понимать величины, взятые на единице длины трубки. Конечность энергии требует достаточно быстрого убывания профиля трубки  $F$  на бесконечности. Дальнейшие свойства  $F$  будут выявлены при построении явных решений.

Для определения энергии Q-трубки проинтегрируем по 3-мерному объему  $tt$ -компоненту тензора энергии-импульса,

$$E = \int d^3x T_{tt} , \quad T_{tt} = \left( \omega^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) F^2 + F'^2 + V(F) . \quad (1.5)$$

Угловой момент солитона можно найти из соотношения между тензором углового момента и тензором энергии-импульса. В случае скалярного поля

$$M_{\nu\rho}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu}x_{\rho} - T_{\rho}^{\mu}x_{\nu} , \quad (1.6)$$

и мы имеем

$$J = \int d^3x M_{xy}^0 = 2n\omega \int d^3x F^2 , \quad (1.7)$$

где использовались координаты  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Кроме того, следствием глобальной  $U(1)$ -инвариантности действия является наличие сохраняющегося заряда

$$Q = -i \int d^3x (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) = 2\omega \int d^3x F^2 . \quad (1.8)$$

Сравнивая (1.7) и (1.8), получаем формулу (1.1). Из нее следует, в частности, что число наматывания также сохраняется. Это означает, что две трубки с

разными  $n$  не могут быть переведены друг в друга непрерывным преобразованием. Таким образом, множество солитонов разбивается на непересекающиеся классы, нумеруемые числом  $n$ . Отметим, что сохранение этого числа является следствием сохранения заряда и углового момента и не следует из топологии.

Для нахождения профиля солитона необходимо минимизировать функционал (1.5) при фиксированных значениях  $Q$  и  $J$ . Это приводит к уравнению

$$F'' + \frac{1}{r}F' - \frac{n^2}{r^2}F + \omega^2 F = \frac{dV}{dF^2}F. \quad (1.9)$$

Конечно, это уравнение можно получить, варьируя непосредственно лагранжиан (1.3) после подстановки в него анзаца (1.4).

### 1.2.2. Потенциал и решения

Как было показано в работах [20, 73], точные выражения для Q-шаров могут быть получены в теории со скалярным потенциалом в виде кусочно-параболической функции. Точная решаемость является следствием того факта, что уравнения движения в таком потенциале линейны всюду, за исключением конечного числа точек. Мы ожидаем, что это свойство сохранится и для Q-трубок. Запишем потенциал в следующем виде

$$V(|\phi|) = M^2\phi\phi^*\theta\left(1 - \frac{\phi\phi^*}{v^2}\right) + (m^2\phi\phi^* + \Lambda)\theta\left(\frac{\phi\phi^*}{v^2} - 1\right). \quad (1.10)$$

Здесь  $M^2 > 0$  — масса частиц над вакуумным решением  $\phi = 0$ ,  $v > 0$  — амплитуда, при которой сшиваются параболические ветви,  $m^2 < M^2$ ,<sup>2</sup>  $\theta$  — функция Хевисайда, определенная в нуле согласно  $\theta(0) = 1/2$ . Наконец, параметр  $\Lambda = v^2(M^2 - m^2)$  обеспечивает непрерывность потенциала в точке  $\phi\phi^* = v^2$  (см. Рис. 1.1).

---

<sup>2</sup> Отрицательные значения  $m^2$  также допустимы. Для положительной определенности в этом случае необходимо модифицировать потенциал при больших полях. Мы будем считать, что характерный масштаб, на котором это происходит, больше амплитуд изучаемых здесь решений.



Кусочно-параболический потенциал (1.10) является хорошим приближением для многих реалистичных моделей. Его гладкость можно восстановить регуляризацией функции  $\theta$ . В следующих главах мы будем неоднократно пользоваться этим потенциалом при обсуждении различных видов Q-вещества. В частности, нас будет интересовать случай  $m^2 = 0$ , при котором моделируются теории с плоским направлением, интересные с точки зрения феноменологии (см., например, [74, 75]).

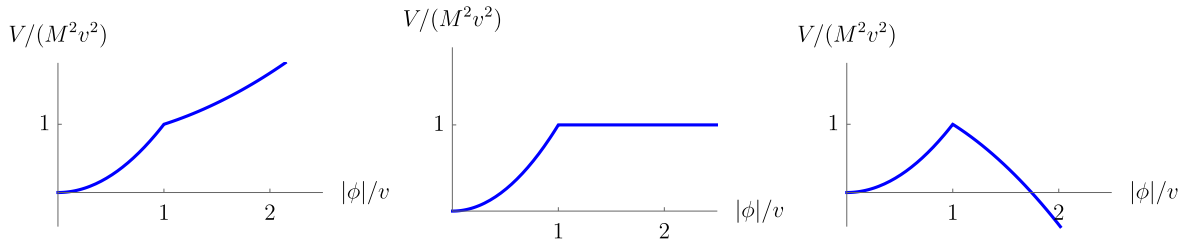


Рис. 1.1. Кусочно-параболический потенциал (1.10) при разных значениях  $m^2$ .

Запишем уравнение (1.9) с потенциалом (1.10),

$$r^2 F'' + r F' + F(r^2(\omega^2 - U) - n^2) = 0, \quad (1.11)$$

где

$$U = M^2 \theta(v^2 - F^2) + m^2 \theta(F^2 - v^2). \quad (1.12)$$

Уравнение (1.11) является уравнением Бесселя всюду, за исключением точек сшивки, в которых  $F^2 = v^2$ . Предположим, что этих точек конечное число,  $r = r_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда (1.11) решается независимо в интервалах  $(r_i, r_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . В каждом интервале общее решение состоит из двух независимых функций с произвольными коэффициентами  $C_i$ . Граничные условия и требование гладкости в точках  $r_i$  выделяют единственное частное решение. Мы увидим, что для получения Q-трубки достаточно ограничиться одной или двумя точками сшивки,  $N = 1, 2$ .

Рассмотрим сначала случай  $N = 2$ . Так как энергия трубки (на единицу ее длины) конечна,  $F$  должна достаточно быстро убывать на бесконечности.

Требуемое подавление получится, если положить  $\omega^2 - M^2 < 0$  при  $U = M^2$  (т.е. при  $r > r_2$  и  $r < r_1$ ). Соответствующим решением уравнения (1.11) при  $r > r_2$  является модифицированная функция Бесселя  $C_4 K_n(r\sqrt{M^2 - \omega^2})$  с некоторой константой  $C_4$ . В интервале  $r < r_1$  решение при  $n = 0$  пропорционально ограниченной в нуле функции Инфельда,  $C_1 I_n(r\sqrt{M^2 - \omega^2})$ . Заметим, что обе эти функции являются монотонными. Для построения решения между точками  $r_1$  и  $r_2$ , где  $U = m^2$ , необходимо положить  $\omega^2 - m^2 > 0$  и взять линейную комбинацию функций Бесселя первого и второго родов,  $C_2 J_n(r\sqrt{\omega^2 - m^2}) + C_3 Y_n(r\sqrt{\omega^2 - m^2})$ . Выбор решения в таком виде мотивирован осциллирующим характером этих функций, который позволяет получить решение, возрастающее в точке  $r_1$  и убывающее в точке  $r_2$ . Всюду гладкое решение получается путем подбора констант  $C_1, \dots, C_4$  при фиксированных  $n > 0$  и  $m^2 < \omega^2 < M^2$ . Из свойств модифицированных функций Бесселя следуют асимптотики для профиля трубки  $F$ ,

$$\begin{aligned} F(r) &\sim r^n, & r \rightarrow 0, \\ F(r) &\sim \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}}, & r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.13)$$

совпадающие с асимптотиками, выведенными в работах [41, 68].

Конфигурации с нулевым угловым моментом,  $n = 0$ , не могут быть получены в секторе с  $N = 2$ . Это видно уже из того, что формально уравнение (1.11) для них совпадает с уравнением для Q-шара в (2+1)-мерном пространстве-времени, а профиль Q-шара является монотонно спадающей функцией расстояния от центра солитона. Нужные решения можно построить при  $N = 1$ , когда имеется единственная точка  $r_0$ , в которой сшиваются различные решения уравнения (1.11). Мы берем опять функцию  $K_0(r\sqrt{M^2 - \omega^2})$  при  $r > r_0$  и гладко сшиваем ее с  $J_0(r\sqrt{\omega^2 - m^2})$ , представляющей решение при  $r < r_0$ . Примеры сконструированных таким образом решений показаны на Рис. 1.2.

Увеличивая число точек сшивки, можно получить конфигурации более

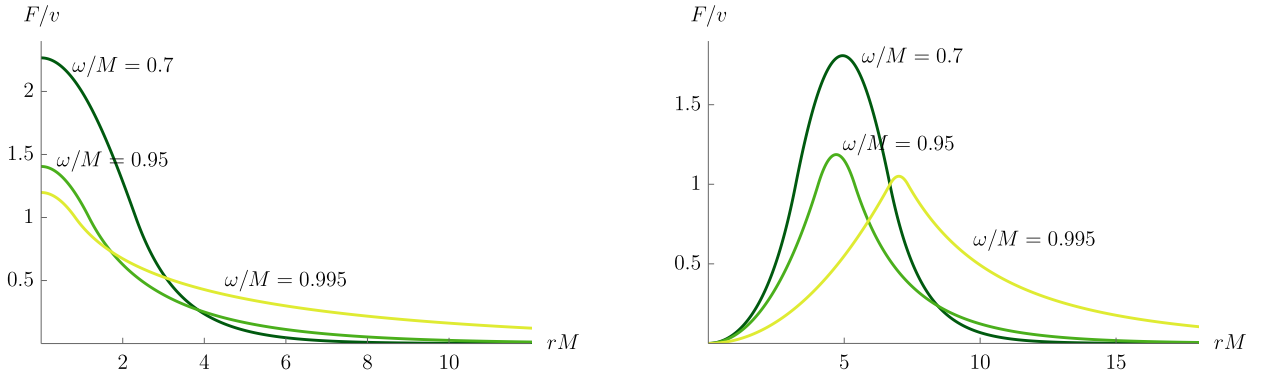


Рис. 1.2. Профили Q-трубок с различными частотами. Параметры потенциала (1.10):  $m = 0$ ,  $v = M$ . Левый рисунок показывает трубки с нулевым угловым моментом,  $n = 0$ . Видно, что их профиль идентичен профилю (2+1)-мерного Q-шара. Правый рисунок показывает трубки с  $n = 2$ .

общего вида. Ясно, что угловой момент всех конфигураций с нечетным  $N$  равен 0, тогда как при четном  $N$  он отличен от нуля. Классические решения с большим числом осцилляций могут представлять определенный теоретический интерес [76]; мы ожидаем, однако, что все они будут классически неустойчивыми. Как мы увидим, это справедливо уже для Q-трубок с  $N = 2$ .

### 1.2.3. Свойства решений

Профиль Q-трубки зависит от ее фазовой частоты  $\omega$ . Следовательно, можно формально считать  $F$  функцией  $\omega$ . Дифференцируя  $F$  по  $\omega$  в выражениях для энергии и заряда, получаем

$$\frac{dE}{d\omega} = \omega \frac{dQ}{d\omega}. \quad (1.14)$$

Это равенство справедливо также и для Q-шаров. Оно означает, что  $E$  и  $Q$  имеют экстремумы при равных значениях частоты  $\omega = \omega_c$ , которые соответствуют точкам излома на графике  $E(Q)$ . Условием (1.14) полезно пользоваться для проверки численных расчетов.

Как уже отмечалось, зависимость энергии от заряда является наиболее важной характеристикой Q-шаров. Изучим их для построенных выше Q-тру-

бок. Рассмотрим сначала случай  $m^2 \geq 0$ . Соответствующие графики показаны на Рис. 1.3 слева для разных значений  $n$ . Как видно из рисунка, при фиксированном  $n$  имеются две ветви решений. Нижняя ветвь содержит решения с  $\omega < \omega_c$ , верхняя — с  $\omega > \omega_c$ . Q-трубка с критической частотой,  $\omega = \omega_c$  обладает наименьшими возможными зарядом и энергией  $Q_{\min}$ ,  $E_{\min}$  (при данном  $n$ ). При каждом  $Q > Q_{\min}$  имеются два решения с разными энергиями. Их профиль выглядит существенно по-разному. Трубки нижней ветви достаточно компактны, для них интеграл в (1.8) набирается на участке  $r_1 < r < r_2$ . В пределе больших зарядов (при  $\omega \rightarrow m$ ), для нижних ветвей справедлива асимптотика

$$E \sim Q^{2/3} . \quad (1.15)$$

Верхняя ветвь отвечает менее локализованным объектам, плотность заряда которых сосредоточена на “хвостах”, ср. Рис. 1.2. Из Рис. 1.3 очевидно, что в пределе  $\omega \rightarrow M$  для этих ветвей

$$E \sim Q . \quad (1.16)$$

Отметим, что ни для каких из полученных решений неприменимо приближение тонкой стенки, широко использующееся при описании, например, Q-шаров в определенном диапазоне параметров теорий (см. [15] и главу 4).

Зависимость  $E$  от  $Q$  в случае с неограниченным снизу потенциалом,  $m^2 < 0$ , показана на Рис. 1.3 справа. Качественное отличие от предыдущего случая состоит в наличии двух критических частот, в которых меняются знаки  $dE/d\omega$  и  $dQ/d\omega$ . Соответственно, имеется третья ветвь решений, содержащая в том числе статическую конфигурацию с нулевым зарядом.

Изложенные выше свойства Q-трубок вполне аналогичны свойствам Q-шаров. К примеру, в работе [77] были получены аналитические решения для Q-шаров в теории с потенциалом (1.10) в 1+1 и 3+1 измерениях, которые имеют аналогичные зависимости энергии и заряда от частоты.

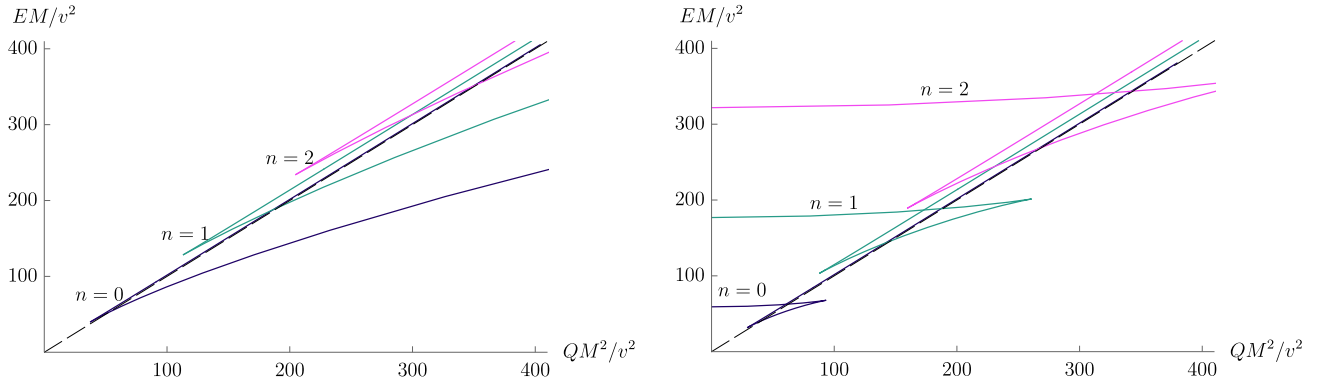


Рис. 1.3. Параметрические зависимости энергии и заряда Q-трубки от ее частоты для различных значений  $n$ . Параметры модели:  $v = M$  и  $m^2 = 0$  (левый рисунок) и  $m^2 = -0.25^2 M^2$  (правый рисунок). Пунктиром показана прямая  $E = MQ$ , соответствующая энергии покоя  $Q$  частиц с массой  $M$  и единичным зарядом.

### 1.3. Классическая устойчивость

Из Рис. 1.3 видно, что при фиксированном заряде энергия Q-трубки тем больше, чем больше ее число намотывания  $n$ . Мы имеем здесь аналогию с АНО-вихрями, энергия которых также растет с увеличением магнитного потока, текущего сквозь вихрь. Известно, что АНО-вихрю с большим моментом в определенной области параметров энергетически выгоден распад на вихри с меньшими моментами [56, 72]. Можно предположить, что Q-трубкам с большими  $n$  также выгодно распадаться в трубки с меньшими значениями  $n$ , при этом должны выполняться законы сохранения энергии, углового момента и заряда. Эти соображения и побуждают нас исследовать устойчивость Q-трубок относительно малых (линейных) возмущений. Здесь мы ограничимся возмущениями, сохраняющими аксиальную симметрию солитона. Мы ожидаем, однако, что в общем случае имеются также возмущения, приводящие к неустойчивости вдоль оси симметрии трубки, аналогичные джинсовской неустойчивости однородного конденсата.

### 1.3.1. Линеаризованное уравнение и его решения

Вернемся к исходному лагранжиану (1.3). Вариационный принцип дает следующее уравнение для поля  $\phi$ , в цилиндрических координатах (мы полагаем  $\phi$  не зависящим от  $z$ ),

$$r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} - r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = r^2 \phi \frac{dV(|\phi|)}{d\phi^2} \quad (1.17)$$

и сопряженное уравнение для  $\phi^*$ . В общем случае, наличие в (1.17) производной потенциала приводит к смешиванию между  $\phi$  и  $\phi^*$  при всех  $r$ . Мы увидим, однако, что использование кусочно-параболического потенциала позволяет сильно упростить задачу. Рассмотрим решение уравнения (1.17) вида

$$\phi = \phi_0 + h, \quad (1.18)$$

где  $\phi_0$  — решение для Q-трубки, а  $h = h(r, \varphi, t)$  — некоторое малое, вообще говоря, комплексное возмущение. Мы интересуемся экспоненциально растущими модами, которые сигнализировали бы о классической неустойчивости. Нам также хотелось бы разделить переменные в уравнении (1.17). Для этой цели выберем анзац, предложенный первоначально в [78], и модифицируем его на случай ненулевых угловых моментов ( $n \pm l$ ),  $l \geq 0$ ,

$$h = e^{i\omega t + in\varphi} \sum_{l=0}^{\infty} \left( c_1^l e^{i(\alpha t + l\varphi)} + c_2^{l*} e^{-i(\alpha^* t + l\varphi)} \right), \quad (1.19)$$

где  $c_{1,2}^l$  — некоторые функции  $r$ . Подставляя (1.18) и (1.19) в (1.17) и приравнявая члены с одинаковыми экспоненциальными множителями, получаем следующие уравнения на  $c_{1,2}^l$  (мы опускаем далее индекс  $l$ ),

$$\begin{aligned} r^2 c_1'' + r c_1' - c_1 \left[ r^2 ((\gamma + i(\omega + \gamma'))^2 + U) + (n + l)^2 \right] \\ = \frac{r^2 F^2}{v^2} (m^2 - M^2) \delta \left( \frac{F^2}{v^2} - 1 \right) (c_1 + c_2), \\ r^2 c_2'' + r c_2' - c_2 \left[ r^2 ((\gamma - i(\omega - \gamma'))^2 + U) + (n - l)^2 \right] \\ = \frac{r^2 F^2}{v^2} (m^2 - M^2) \delta \left( \frac{F^2}{v^2} - 1 \right) (c_1 + c_2), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где было обозначено

$$\alpha = -i\gamma + \gamma', \quad \gamma, \gamma' \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

Таким образом, уравнения для  $c_1$  и  $c_2$  разделены всюду, кроме точек сшивки. Это важнейшее свойство линеаризованных уравнений проистекает из-за выбора потенциала в виде двух параболических ветвей. Заметим, что описанная процедура, вообще говоря, неприменима, если  $\gamma' = l = 0$ . Мы, однако, предполагаем, что уравнения (1.20) справедливы и в этом случае, как следствие предельного перехода  $\gamma' \rightarrow 0$ .

Уравнения (1.20) суть уравнения Бесселя всюду, кроме точек сшивки  $r = r_i$ . Следовательно, к ним применимы все рассуждения, приведенные нами выше при построении решений для Q-трубок. При  $n > 0$  имеется три интервала, на каждом из которых общее решение содержит две произвольные постоянные. Требования регулярности в нуле и на бесконечности фиксируют некоторые из этих констант, которые могут быть обращены в 0 подходящим выбором базиса решений. Оставшиеся константы фиксируются при продолжении решения в точки  $r = r_i$ . В силу наличия дельта-функций, эти решения будут непрерывными, но не гладкими.

### 1.3.2. Случай $n = 0$

Проиллюстрируем описанный выше метод на примере Q-трубок с нулевым угловым моментом,  $n = 0$ . В этой и следующей секциях мы считаем  $\gamma' = 0$ , что отвечает изучению распада трубок из основного состояния. Обобщение на случай ненулевого  $\gamma'$  излагается в секции 1.3.4. При  $n = 0$  имеется единственная точка,  $r = r_0$ , в которой теряется гладкость возмущений. Выпи-

сывая уравнения (1.20) в этой точке, имеем

$$\begin{aligned}
C_{1L}c_{1L}(r_0) &= C_{1R}c_{1R}(r_0) , \\
C_{2L}c_{2L}(r_0) &= C_{2R}c_{2R}(r_0) , \\
C_{1R}c'_{1R}(r_0) - C_{1L}c'_{1L}(r_0) &= A(C_{1L}c_{1L}(r_0) + C_{2L}c_{2L}(r_0)) , \\
C_{2R}c'_{2R}(r_0) - C_{2L}c'_{2L}(r_0) &= A(C_{1L}c_{1L}(r_0) + C_{2L}c_{2L}(r_0)) ,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

где

$$A = \frac{v(m^2 - M^2)}{2|F'(r_0)|} . \tag{1.23}$$

В этом уравнении,  $C_{1L}$ ,  $C_{2L}$ ,  $C_{1R}$ ,  $C_{2R}$  — константы, подлежащие определению, а базис решений  $c_{1L}$ ,  $c_{2L}$ ,  $c_{1R}$ ,  $c_{2R}$  выбран таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям в нуле и на бесконечности,

$$\begin{aligned}
c_{1L} = c_{2L} &= J_{\pm l}(r\sqrt{(\omega \mp i\gamma)^2 - m^2}) , \\
c_{1R} = c_{2R} &= H_{\pm l}^{(1)}(r\sqrt{(\omega \mp i\gamma)^2 - M^2}) .
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Здесь  $H_k^{(1)}$  — функция Ганкеля 1-го рода порядка  $k$ .

Решение системы (1.22) существует, если ее определитель,  $\Delta = \Delta(\gamma)$ , обращается в 0 при некотором  $\gamma$ . Исследуем сначала поведение определителя при больших  $\gamma$ ,  $\gamma \gg |m|, M$ . В этом случае

$$\begin{aligned}
c_{1L} \sim c_{2L} &\sim I_l(r\gamma) , \\
c_{1R} \sim c_{2R} &\sim K_l(r\gamma) .
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Используя асимптотики функций  $I_l$  и  $K_l$  на бесконечности, находим в лидирующем порядке по  $\gamma$ ,

$$\operatorname{Re} \Delta(\gamma) = \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{|A|}{\gamma} - 1 \right) , \quad \operatorname{Im} \Delta(\gamma) = 0 . \tag{1.26}$$

Вычисления показывают, что  $|F'(r_0)| \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow M$  (см. Рис. 1.2). Таким образом, в этом пределе  $|A| \sim |F'(r_0)|^{-1} \rightarrow \infty$  и можно ожидать наличие



экспоненциально растущих мод с  $\gamma \approx |A|$  на верхней ветви  $E(Q)$ -зависимости и, более того, катастрофически быстрого распада Q-трубок, для которых  $\omega \approx M$ . Отметим, что асимптотика (1.26) на зависит от  $l$ . Она изображена на Рис. 1.4 для различных значений  $\omega$ .

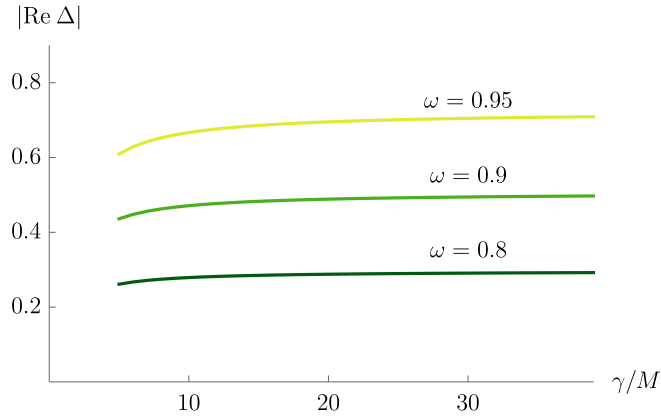


Рис. 1.4. Поведение определителя системы (1.22) при больших  $\gamma$ . Параметры модели:  $m = 0$ ,  $v = M$ , и  $\omega$  приведены в единицах  $M$ .

Изучим теперь обратный предел,  $\gamma \rightarrow 0$ . Можно сразу же указать несколько решений уравнений (1.22) при  $\gamma = 0$ . Одно из них, с  $l = 0$ , имеет вид  $h \sim i\phi_0$  и является Голдстоуновской модой, соответствующей глобальной  $U(1)$ -симметрии лагранжиана (1.3). Еще два решения соответствуют трансляционным модам, они имеют вид  $h \sim \phi'_{0,r}$  и возникают в секторе с  $l = 1$ . Следовательно, для мод с  $l = 0, 1$  должно выполняться  $\Delta(0) = 0$ . Численные вычисления подтверждают этот результат. Подстановка (1.25) в (1.22) приводит к зависимостям, показанным на Рис. 1.5. Следует отметить, что мнимая часть определителя зануляется при всех  $\gamma$  и  $l$ , коль скоро  $\gamma' = 0$ . Для  $l = 0$  мы видим, что корни системы (1.22) существуют, если  $\text{Re } \Delta''(0) > 0$ . Вычисления показывают, что смена знака вещественной части  $\Delta''(0)$  происходит в точности в точках экстремума функций  $Q(\omega)$  и  $E(\omega)$ . Таким образом, Q-трубки нижней ветви графика  $E(Q)$  устойчивы относительно возмущений, не меняющих угловой момент, в то время как верхняя и левая (при  $m^2 < 0$ ) ветви — неустойчивы. Этот вывод полностью совпадает с результатами исследования классической устойчивости

Q-шаров, проведенного в работе [77]. Кроме того, Рис. 1.6 демонстрирует отсутствие растущих мод в секторе с  $l = 1$  и, в действительности, при всех  $l > 0$ , при условии что  $\gamma' = 0$ .

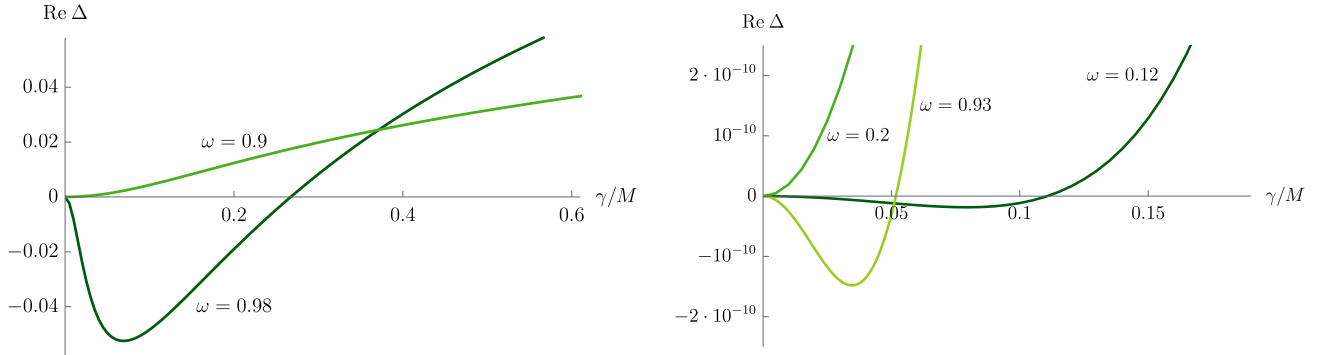


Рис. 1.5. Поведение определителя системы (1.22) при  $l = 0$ . Левый рисунок:  $m = 0$ ,  $v = M$ , при этом  $\omega_c \approx 0.93$ . Мы видим, что при  $\omega > \omega_c$  имеется вещественный корень. Правый рисунок:  $m^2 = -0.25M^2$ ,  $v = M$ . На этот раз имеются две критические частоты,  $\omega_c \approx 0.18$  и  $0.89$ . Вещественный корень имеется для Q-трубок из левой и верхней ветвей  $E(Q)$ -зависимости (см. Рис. 1.3). Значения  $\omega$  приведены в единицах  $M$ .

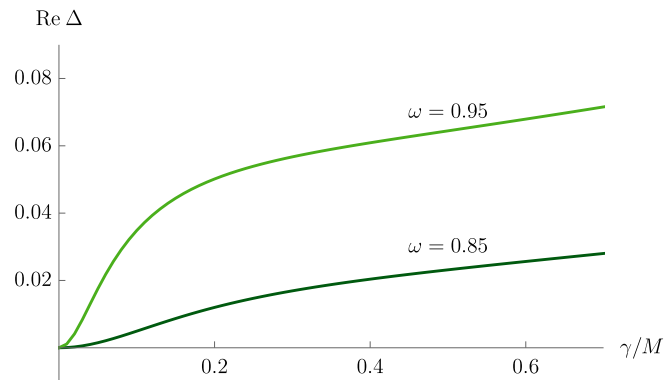


Рис. 1.6. Поведение определителя системы (1.22) для возмущений, меняющих угловой момент решения. Для примера показан случай с  $l = 1$ . Параметры модели:  $m = 0$ ,  $v = M$ . Мы видим, что корень отсутствует для обеих ветвей Q-трубок. Значения  $\omega$  приведены в единицах  $M$ .

### 1.3.3. Случай $n > 0$

Общий случай Q-трубок с ненулевым угловым моментом рассматривается аналогично предыдущему. Усложнение состоит в том, что число уравнений

сшивки удваивается, по сравнению с (1.22). Действительно, так как граничные условия не налагают требований на решения  $c_{1M}$ ,  $c_{2M}$  в интервале  $r_1 < r < r_2$ , мы имеем две независимые функции в этом диапазоне  $r$ . Выберем базис решений в следующем виде,

$$\begin{aligned} c_{1L} &= c_{2L} = J_{n\pm l}(r\sqrt{(\omega \mp i\gamma)^2 - M^2}) , \\ c_{1R} &= c_{2R} = H_{n\pm l}^{(1)}(r\sqrt{(\omega \mp i\gamma)^2 - M^2}) , \\ c_{1M} &= c_{2M} = J_{n\pm l}(r\sqrt{(\omega \mp i\gamma)^2 - m^2}) , \\ \tilde{c}_{1M} &= \tilde{c}_{2M} = H_{n\pm l}^{(1)}(r\sqrt{(\omega \mp i\gamma)^2 - m^2}) . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Действуя так же, как в случае  $n = 0$ , получаем, что в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$  функции (1.27) имеют асимптотики

$$\begin{aligned} c_{1L} &\sim c_{2L} \sim c_{1M} \sim c_{2M} \sim I_{n\pm l}(\gamma r) , \\ c_{1R} &\sim c_{2R} \sim \tilde{c}_{1M} \sim \tilde{c}_{2M} \sim K_{n\pm l}(\gamma r) , \end{aligned} \quad (1.28)$$

и поведение  $\Delta(\gamma)$  в этом пределе идентично (1.26). В общем же случае, подстановка решений (1.27) в определитель  $\Delta(\gamma)$  приводит к поведению, аналогичному показанному на Рис 1.5. При  $l = 0$  мы снова имеем  $\text{Im } \Delta(\gamma) = 0$  и знак  $\text{Re } \Delta''(0)$  согласован со знаком  $dQ/d\omega$  ( $dE/d\omega$ ), указывая на неустойчивость верхней и левой (для  $m^2 < 0$ ) ветвей графика  $E(Q)$ . При этом также сохраняется устойчивость нижних ветвей.

Однако, если разрешить возмущениям менять угловой момент Q-трубки, мнимая часть  $\Delta(\gamma)$  становится отличной от 0, и уравнение  $\Delta(\gamma) = 0$  содержит два независимых уравнения на одну вещественную переменную  $\gamma$ . Следовательно, в общем случае можно ожидать отсутствие решений. Вычисления подтверждают это предположение, показывая, что мод с ненулевым  $l$  не существует при всех  $\omega$  и  $m^2$ , см. левую часть Рис. 1.7 для примера. Заметим, однако, что этот вывод получен в предположении, что трубка распадается из основного состояния, т.е., что  $\gamma' = 0$  в анзаце для возмущений (1.19). Если опу-

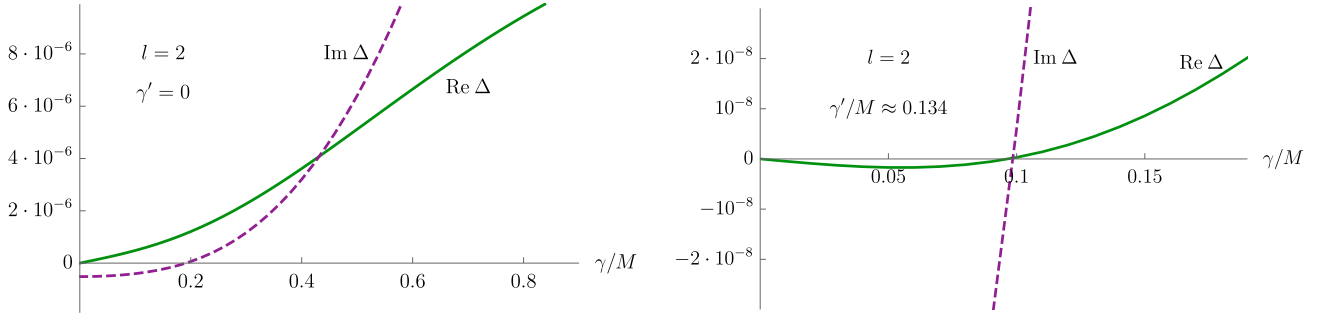


Рис. 1.7. Поведение определителя системы (1.22) в секторе с  $l = 2$ . Параметры теории:  $m = 0$ ,  $v = M$ , при этом  $\omega_c \approx 0.93$  ( $\omega$  нормирована на  $M$ ). Левый рисунок демонстрирует отсутствие растущих мод для Q-трубок из верхней ветви, для примера здесь мы положили  $\omega = 0.95$ . Правый рисунок показывает, что решение существует, если разрешить ненулевые  $\gamma'$ . Здесь также  $\omega = 0.95$ .

стить это требование, число уравнений совпадет с числом неизвестных. Мы изучим этот случай в следующей секции.

### 1.3.4. Распад из возбужденного состояния

Согласно (1.19), возмущения с ненулевым  $\gamma'$  описывают распад Q-трубки из возбужденного состояния. Как показывают вычисления, уравнение  $\Delta(\gamma, \gamma') = 0$  имеет комплексный корень для широкого диапазона конфигураций трубок. В частности, правая часть Рис. 1.7 демонстрирует комплексный корень, соответствующий моде, меняющей угловой момент фонового решения,  $n = 1$ , на  $\pm 2$ . В этом примере мы выбрали Q-трубку из верхней ветви, для которой существуют распадные моды из основного состояния. Оказывается, что и нижние ветви Q-трубок становятся нестабильными под действием возмущений с  $\gamma' \neq 0$ , коль скоро  $n > 0$ . Это означает, что критерий Вахитова-Колоколова неприменим к солитонным конфигурациям с ненулевым угловым моментом. Отметим, что в секторе с  $n = 0$  корни уравнения  $\Delta(\gamma, \gamma') = 0$  с ненулевым  $\gamma'$  найдены не были. Это является еще одним указанием на соответствие между Q-трубками с  $n = 0$  обычным  $(2+1)$ -мерными Q-шарам.

Остановимся подробнее на распадных модах Q-трубок с  $n > 0$ . На Рис.

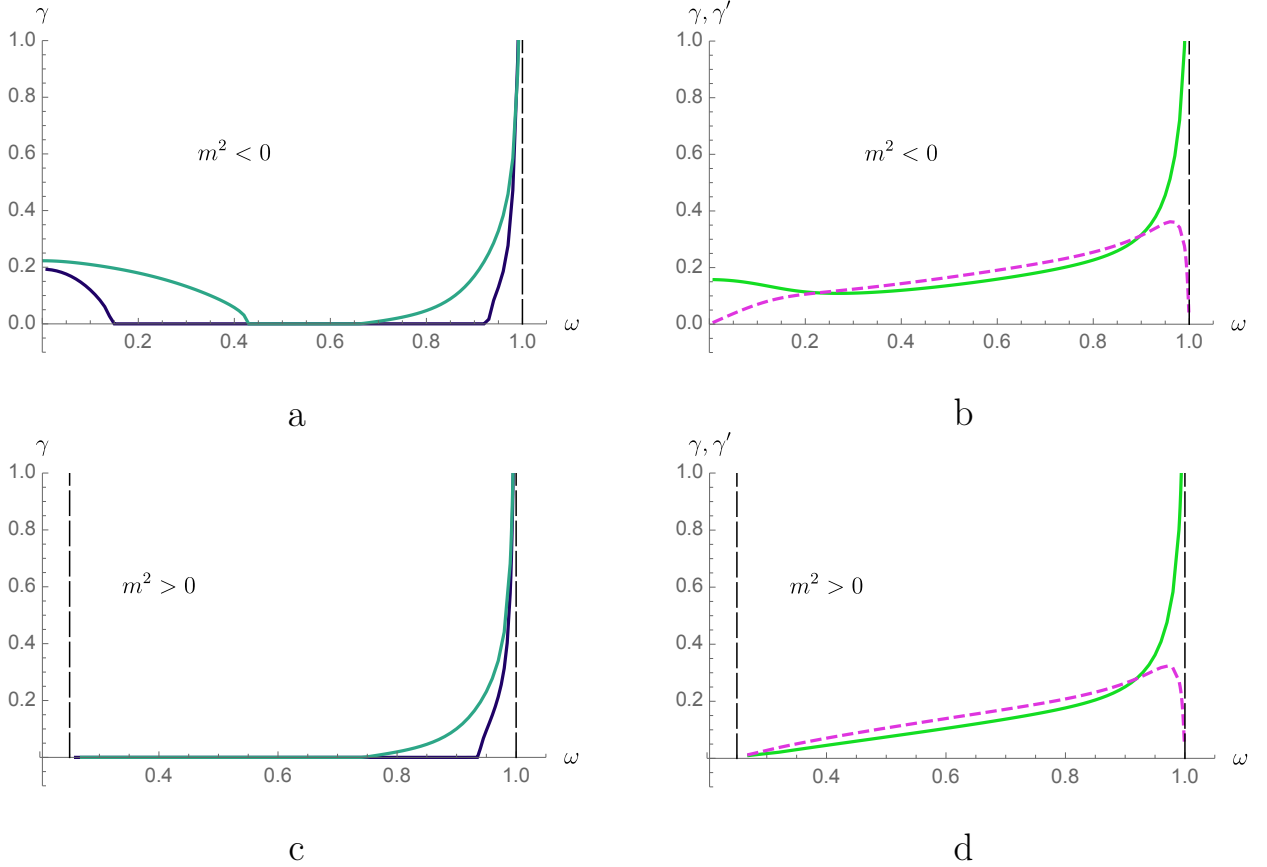


Рис. 1.8. Парциальные ширины распада Q-трубок в секторе с  $n = 1$ . Параметры теории:  $v = M$ ,  $m^2 = -0.25^2 M^2$  (графики а) и б)),  $m^2 = 0.25^2 M^2$  (графики с) и д)). На графиках а) и с) приведены значения  $\gamma$  для возмущений с  $l = 0$  (нижняя линия) и  $l = 1$  (верхняя линия). На графиках б) и д) приведены значения  $\gamma$  (сплошная линия) и  $\gamma'$  (пунктирная линия) для возмущений с  $l = 2$ . Вертикальные пунктирные линии обозначают границы допустимых значений  $\omega$ . Все величины нормированы на  $M$ .

1.8 представлены парциальные ширины распада солитона в секторе с  $n = 1$ . Как обсуждалось ранее, экспоненциально растущие возмущения, не меняющие угловой момент фонового решения, существуют для верхних и левых (при  $m^2 < 0$ ) ветвей  $E(Q)$ -зависимости. Возмущения с  $l = 1$  охватывают более широкую область решений. Интересно отметить, что не все Q-трубки распадаются через ( $l = 1$ )-моды, и некоторый их диапазон остается устойчивым, см. Рис. 1.8 слева. Эта устойчивость, однако, не сохраняется при добавлении мод с  $l \geq 2$ , как показано на правой части Рис. 1.8. Вывод о неустойчивости относительно возмущений с  $l > 0$  остается справедливым и для солитонов с

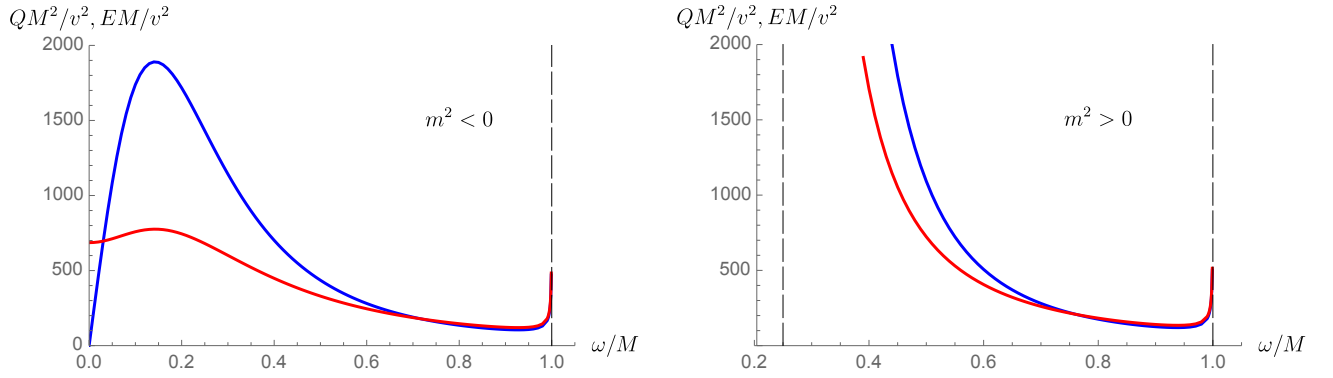


Рис. 1.9. Энергия (красная линия) и заряд (синяя линия) Q-трубки в секторе с  $n = 1$ . Параметры теории:  $v = M$ , а)  $m^2 = -0.25^2 M^2$ , б)  $m^2 = 0.25^2 M^2$ . Вертикальные пунктирные линии обозначают границы допустимых значений  $\omega$ .

$n \geq 2$ .

Стоит заметить, что для устойчивого (или достаточно долгоживущего) солитона можно поставить вопрос о спектре линейных возмущений над ним. В общем случае можно ожидать, что Q-трубка заданной частоты содержит конечный набор связанных состояний. Мы не рассматриваем здесь этот вопрос, так как наша цель — исследование распадной моды, которая, в случае существования, является единственной в секторе с данным  $l$ .

Из Рис. 1.8 видно, что в пределе  $\omega \rightarrow M$  Q-трубки становятся сильно неустойчивыми, так как ширина каждой парциальной моды неограниченно возрастает. С другой стороны, на нижних ветвях  $E(Q)$ -зависимостей неустойчивость не носит катастрофического характера. В действительности, при  $\omega \rightarrow 0$  (в случае  $m^2 < 0$ ) решения асимптотически стабильны. Такие долгоживущие, (почти) статические конфигурации могут представлять интерес для феноменологии [79].

## 1.4. Заключение к главе

Для завершения анализа классической устойчивости необходимо удостоверить, что характерные энергии рассмотренных здесь возмущений Q-тру-

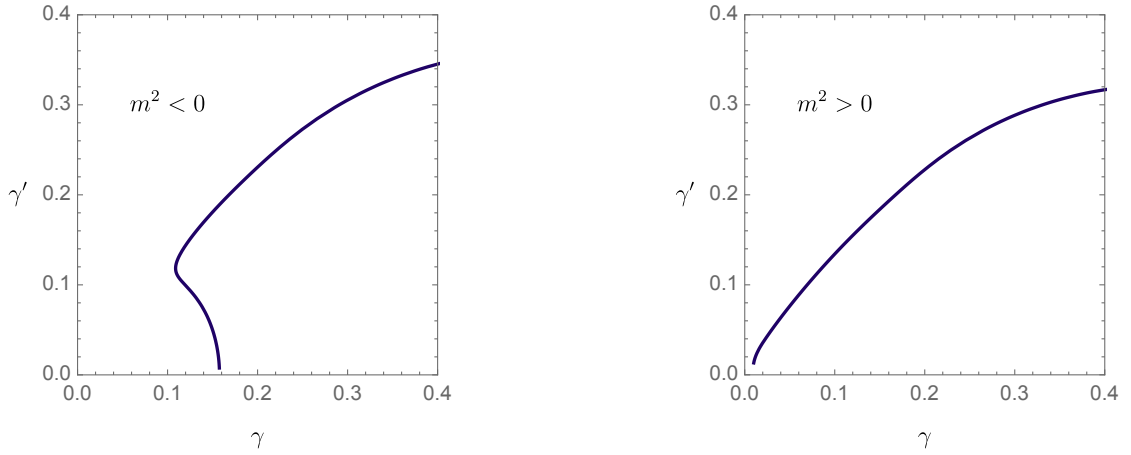


Рис. 1.10. Распадная мода Q-трубок с  $l = 2$  в секторе с  $n = 1$ . Параметры теории:  $v = M$ , а)  $m^2 = -0.25^2 M^2$ , б)  $m^2 = 0.25^2 M^2$ . Видно, что энергия возбужденного состояния,  $\propto \gamma'$ , из которого происходит распад, мала по сравнению с энергией солитона, ср. Рис. 1.9.  $\gamma$  и  $\gamma'$  нормированы на  $M$ .

бок малы по сравнению с энергией самой трубки (на единицу ее длины) и, таким образом, классическое описание возмущений, используемое нами, применимо. Для этого мы строим явные зависимости энергии и заряда трубки от ее частоты (Рис. 1.9) и сравниваем их с частотой возбужденного состояния  $\gamma'$  (в качестве примера, на Рис. 1.10 приведены параметрические зависимости парциальной ширины распада и частоты осцилляций состояния, из которого осуществляется распад, для Q-трубок с  $n = 1$ ). Мы видим, что при всех значениях  $\omega$  выполняется соотношение

$$\gamma'/E \ll 1, \quad (1.29)$$

следовательно, классический анализ возмущений является справедливым.

В заключение отметим интересные различия между свойствами неустойчивых Q-шаров и Q-трубок. Во-первых, распад из возбужденного состояния, соответствующий комплексному значению  $\alpha$  в анзаце для возмущений (1.19), исключен для Q-шаров. В самом деле, в спектре возмущений над Q-шаром  $\alpha$  может быть либо чисто действительной, либо чисто мнимой [33]. Во-вторых, для Q-шара характерно наличие единственной распадной моды, которая явля-

ется сферически-симметричной [33], в то время как для Q-трубок распадные моды существуют при разных значениях  $l > 0$ .



## Глава 2

## О соответствии между неустойчивыми Q-шарами и сфалеронами

### 2.1. Введение к главе

Во введении к диссертации мы упоминали о том, что Q-шары представляют большой интерес с феноменологической точки зрения; в частности, известны случаи их применения в различных задачах космологии [7]. Естественным поэтому является вопрос о механизмах образования классически устойчивых Q-шаров и о механизмах распада классически неустойчивых Q-шаров (или Q-клаудов). Существует обширная библиография, посвященная этой проблематике (см., например, [17, 80–83]). Из этих работ, в частности, следует, что для формирования Q-шара необходим неустойчивый однородный заряженный конденсат частиц, который распадается в долгоживущие “сгустки” скалярного поля. Роль заряженного конденсата в классическом “синтезе” солитонов обсуждалась также в работе [84] на примере модели с отрицательным самодействием 4-го порядка. Таким образом, типичным является механизм образования нетопологических солитонов за счет развития неоднородностей из-за джинсовской неустойчивости в скалярном конденсате.

В данной главе мы исследуем стабильность однородных и неоднородных решений в теориях с потенциалом специального вида, выбор которого мотивирован возможностью проведения аналитического анализа. Мы покажем, что при определенном выборе параметров теория допускает одновременное наличие стабильного конденсата и стабильных Q-шаров. В этом случае Q-шары не могут формироваться через классический распад конденсата, и необходим другой механизм их образования (схожий вопрос поднимался в работе [85]).

Для теорий, содержащих решения типа  $Q$ -шаров, типична ситуация, когда существуют два неоднородных решения с одинаковым зарядом. Одно из этих решений может отвечать устойчивому  $Q$ -шару, тогда как другое — неустойчивому  $Q$ -клауду. При этом  $Q$ -клауд всегда имеет большую энергию, чем  $Q$ -шар. Если ограничиться рассмотрением теории в конечном участке пространства, то энергия и заряд однородного конденсата конечны, и к двум упомянутым решениям добавляется еще (как минимум) одно. Мы рассмотрим простые модели скалярного поля, в которых имеется тройное вырождение по заряду, и выдвинем гипотезу, что переход между двумя устойчивыми конфигурациями происходит за счет квантового туннелирования, при этом вершина энергетического барьера, разделяющего конфигурации, соответствует  $Q$ -клауду. В этом смысле  $Q$ -клауд является сфалероном [51]. В частности, на нем насыщается вероятность перехода при больших температурах. Эта гипотеза позволяет получить простую оценку для частоты образования  $Q$ -шаров в среде с достаточно высокой температурой (формулу Аррениуса).

В секции 2.2 мы коротко напомним основные свойства  $Q$ -шаров в  $3+1$  измерениях, акцентируя внимание на возможных зависимостях их энергии от заряда. Там же будут рассмотрены однородные решения и приведен критерий их стабильности. В секции 2.3 мы изучим теорию с кусочно-параболическим потенциалом, допускающим точные решения для  $Q$ -шаров и конденсата и аналитическое исследование их устойчивости. В качестве метода регуляризации энергии и заряда конденсата, мы наложим на систему периодические граничные условия. Ограниченность пространства приводит к интересным эффектам в распределении устойчивых и неустойчивых  $Q$ -шаров. Мы исследуем вопрос устойчивости в секции 2.4. Наконец, в секции 2.5 мы выпишем формулу Аррениуса для частоты образования  $Q$ -шаров в  $1+1$  и  $3+1$  измерениях и обсудим полученные результаты.

## 2.2. Классические решения в 3+1 измерениях

### 2.2.1. Q-шары и Q-клауды

Напомним основные свойства Q-шаров в плоском бесконечном (3+1)-мерном пространстве-времени. Рассмотрим теорию комплексного скалярного поля  $\phi$  с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(|\phi|) . \quad (2.1)$$

Здесь предполагается, что потенциал  $V$  является функцией  $U(1)$ -инвариантной комбинации  $\phi^* \phi$ . Общие условия существования локализованных конфигураций вида

$$\phi(t, \mathbf{x}) = f(r) e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

были получены в работе [21]. В [20] было показано, что точное решение для Q-шаров можно получить в теории с кусочно-параболическим потенциалом

$$V(|\phi|) = M^2 \phi^* \phi \theta \left( 1 - \frac{\phi^* \phi}{v^2} \right) + (m^2 \phi^* \phi + \Lambda) \theta \left( \frac{\phi^* \phi}{v^2} - 1 \right) , \quad (2.3)$$

где  $\Lambda = v^2(M^2 - m^2)$ . Более того, анализ малых возмущений над Q-шарами в таком потенциале также может быть выполнен аналитически [77]. Как уже отмечалось, модель с кусочно-параболическим потенциалом является удобной аппроксимацией для многих реалистичных теорий с интересной феноменологией. К примеру, в пределе  $m^2 = 0$  потенциал (2.3) становится плоским при больших значениях поля, что типично для суперсимметричных теорий. В контексте Q-шаров такие теории обсуждались, например, в работах [25, 28, 86, 87].

Характеристикой Q-шаров, наиболее полно представляющей их свойства, является зависимость энергии  $E$  солитона от заряда  $Q$ . Для анзаца (2.2) эти величины имеют вид

$$E = \int d^3x (\omega^2 f^2 + (\partial_i f)^2 + V(f)) , \quad Q = 2\omega \int d^3x f^2 . \quad (2.4)$$

Мы рассмотрим здесь случай неотрицательного потенциала,  $m^2 \geq 0$ . Заметим, что в случае  $m^2 < 0$  стабильные решения обнаруживают те же свойства,

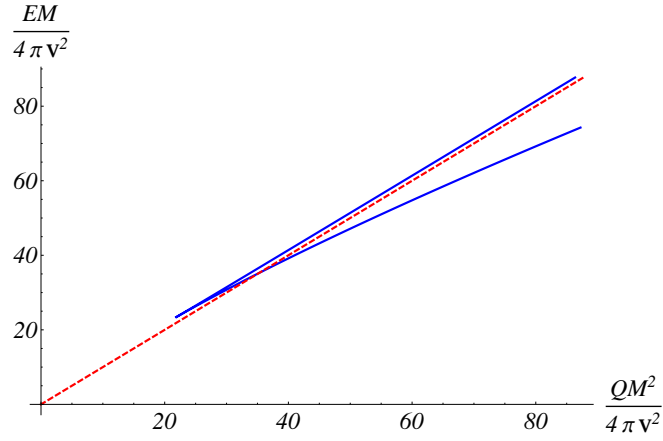


Рис. 2.1. График  $E(Q)$  для  $Q$ -шаров в  $3+1$  измерениях при  $m^2 > 0$ ,  $M/m = 10$ . Пунктиром обозначены состояния свободных частиц, для которых  $E = MQ$ .

за исключением области больших  $Q$ .<sup>1</sup> Зависимость  $E$  от  $Q$  для потенциала (2.3) представлена на Рис. 2.1. Мы наблюдаем наличие “левого каспа” — решения с минимальными энергией и зарядом, разделяющего области классически устойчивых  $Q$ -шаров, находящихся на нижней ветви  $E(Q)$ -зависимости, и неустойчивых  $Q$ -клаудов [57], составляющих верхнюю ветвь. Таким образом, неоднородные решения двукратно вырождены по заряду. Подобная картина весьма типична для широкого класса нетопологических солитонов; см., например, [71].

К числу свойств  $Q$ -шаров и  $Q$ -клаудов, заслуживающих изучения, также относятся спектры вибрационных мод устойчивых решений и характеристики распадных мод неустойчивых решений. Для теории с потенциалом (2.3) и  $m^2 = 0$  этот вопрос будет изучен в деталях в главе 4. Анализ распадных мод в кусочно-параболическом потенциале проводился ранее в работе [77].

### 2.2.2. Конденсат и его стабильность

Помимо  $Q$ -шаров, классические уравнения движения также допускают наличие однородных полевых конфигураций. Для того чтобы говорить об энер-

<sup>1</sup> Потенциал с отрицательным  $m^2$  можно использовать для качественного изучения  $Q$ -шаров в теории с дополнительным вакуумом при  $\phi^* \phi \neq 0$ , см. [19, 88].

гии и заряде таких конфигураций, необходимо регуляризовать теорию тем или иным образом. Очевидным способом регуляризации является наложение периодических граничных условий на поле  $\phi$  и его комплексно сопряженное.

Заряженный скалярный конденсат задается анзацем

$$\phi_0 = Ce^{i\Omega t}, \quad (2.5)$$

где  $C$  — постоянная и частота  $\Omega$  находится из уравнений движения,

$$\Omega^2 = \frac{1}{2C}V'(C). \quad (2.6)$$

Энергия и заряд однородного решения определяются его амплитудой  $C$  и размером  $L$  компактного пространства. В случае произвольного потенциала  $V$  имеется следующее условие неустойчивости конденсата [7]<sup>2</sup>

$$V''(C) - \frac{V'(C)}{C} < 0. \quad (2.7)$$

Очевидно, для потенциала (2.3) это условие нарушается и, следовательно, конденсат классически устойчив. Заметим, что вывод об устойчивости не зависит от точной формы потенциала. К примеру, если регуляризовать  $\theta$ -функции в (2.3) согласно

$$\theta\left(\frac{\phi^*\phi}{v^2} - 1\right) \rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[\alpha\left(\frac{\phi^*\phi}{v^2} - 1\right)\right]\right), \quad (2.8)$$

где  $\alpha$  — некоторый большой параметр, то условие (2.7) по-прежнему нарушается при  $|C| < v$ , и в пределе  $L \rightarrow \infty$  конденсат устойчив при произвольно больших зарядах.

Таким образом, устойчивость однородных решений вида (2.5) не является специальным свойством кусочно-параболического потенциала, но характерна для весьма широкого класса потенциалов, простейшим представителем которого является (2.3). Во всех таких потенциалах образование Q-шаров классическим путем невозможно (по крайней мере, при тех зарядах, при которых

---

<sup>2</sup> Это условие можно обобщить на случай не плоского пространства-времени, отвечающего расширяющейся Вселенной [80].

нарушается условие (2.7)) несмотря на то, что солитонные решения энергетически выгоднее. Это позволяет выдвинуть гипотезу об их формировании путем туннелирования.

## 2.3. Периодические Q-шары в 1+1 измерениях

### 2.3.1. Однородные и односолитонные решения

В этой секции на простом примере будут явно проиллюстрированы соотношения между устойчивыми Q-шарами, неустойчивыми Q-клаудами и устойчивым скалярным конденсатом. Рассмотрим теорию (2.1) с потенциалом (2.3) в (1+1)-мерном пространстве-времени, обозначим пространственную координату буквой  $x$  и наложим следующие граничные условия

$$\phi(-L/2, t) = \phi(L/2, t), \quad \phi'(-L/2, t) = \phi'(L/2, t), \quad (2.9)$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ .

Полевой анзац для Q-шара, его энергия и заряд определяются следующими выражениями,

$$\phi(x, t) = f(x)e^{i\omega t}, \quad (2.10)$$

$$E = \int_{-L/2}^{L/2} dx (\omega^2 f^2 + f'^2 + V(f)), \quad Q = 2\omega \int_{-L/2}^{L/2} dx f^2. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в уравнения движения, получаем

$$f'' + \omega^2 f = \frac{dV}{d(f^2)} f. \quad (2.12)$$

Решение этого уравнения с потенциалом (2.3), удовлетворяющее условиям (2.9), имеет вид

$$f = \begin{cases} v \frac{\cos ax}{\cos ax_0}, & |f| > v, \quad a^2 = \omega^2 - m^2 > 0 \\ v \frac{\cosh bx}{\cosh bx_0}, & |f| < v, \quad b^2 = M^2 - \omega^2 > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь  $x_0$  — точка сшивки параболических ветвей потенциала (2.3). Уравнение на  $x_0$  определяется из требований непрерывности и гладкости решения в этой точке и имеет вид

$$a \tanh a(x_0 - L/2) = -b \tan bx_0 . \quad (2.14)$$

Вид профиля Q-шара  $f(x)$  зависит от его частоты  $\omega$ . Последняя удовлетворяет уравнению

$$m < \omega < M . \quad (2.15)$$

Записывая формально  $f = f(x, \omega)$ , из (2.11) можно получить хорошо известное соотношение между энергией и зарядом Q-шара [11, 71, 89]

$$\frac{dE}{d\omega} = \omega \frac{dQ}{d\omega} . \quad (2.16)$$

Это свойство можно использовать для проверки численных расчетов.

Перейдем теперь к скалярному конденсату. В интересующем нас случае,  $m^2 \geq 0$ , имеется два семейства однородных решений:

$$\phi = \begin{cases} C e^{iMt} , & |C| < v , \\ C e^{imt} , & |C| > v . \end{cases} \quad (2.17)$$

Решения первого семейства — это нерелятивистский газ частиц массы  $M$  с разными числами заполнения. Подобная интерпретация неприменима к решениям второго семейства, для которых независимость амплитуды конденсата  $C$  от частоты есть лишь следствие выбора потенциала. Энергия и заряд (2.11) конденсата даются выражениями

$$E = \begin{cases} 2C^2 M^2 L , & |C| < v , \\ (2C^2 m^2 + v^2(M^2 - m^2))L , & |C| > v , \end{cases} \quad (2.18)$$

$$Q = \begin{cases} 2C^2 M L , & |C| < v , \\ 2C^2 m L , & |C| > v . \end{cases} \quad (2.19)$$

Видно, что в случае  $m = 0$  конденсатные состояния второго семейства вырождены по энергии и имеют нулевой заряд.

Однородные конфигурации (2.17) дополняют допустимую область частот  $\omega$  до  $m \leq \omega \leq M$ . Можно ожидать, что в подходящих координатах имеется непрерывная кривая, содержащая все полученные решения. Такими удобными координатами оказываются энергия и заряд. На Рис. 2.2 представлены графики  $E(Q)$  для решений (2.13), (2.17). Видно, что упомянутая кривая содержит “каспы” — точки излома, в которых  $E$  и  $Q$  имеют одновременный экстремум.

Интересно отметить, что число каспов зависит от длины окружности  $L$ , на которой компактифицируется теория. При малых длинах окружность не может вместить  $Q$ -шары с  $dQ/d\omega < 0$ , и имеется единственная ветвь решений с положительным  $dQ/d\omega$  (см. Рис. 2.2 слева). В соответствии с условием Вахитова-Колоколова можно ожидать, что все эти решения неустойчивы (мы покажем это в следующей секции) и, следовательно, являются  $Q$ -клаудами. Для каждого  $Q$ -клауда есть два однородных решения с меньшей энергией, устойчивость которых была показана в предыдущей секции. Можно предположить поэтому, что  $Q$ -клауд находится на вершине энергетического барьера, разделяющего газ свободных частиц и однородное связанное состояние.

При  $L > L_*$ , где  $L_*$  — некоторая критическая длина, появляются новые решения для  $Q$ -шаров. В этом случае имеется три ветви неоднородных решений, разделенных каспами (см. Рис. 2.2 справа). Для центральной ветви выполняется  $dQ/d\omega < 0$  и мы ожидаем, что соответствующие  $Q$ -шары классически устойчивы. Над каждым устойчивым  $Q$ -шаром располагается  $Q$ -клауд, так что можно предположить, что  $Q$ -клауд с наибольшей энергией разделяет соответствующие  $Q$ -шар и конденсатное состояние. Критическая длина  $L_*$  находится из уравнений

$$\left. \frac{dQ}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_*, L=L_*} = \left. \frac{d^2Q}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_*, L=L_*} = 0, \quad (2.20)$$

которые также определяют частоту  $\omega_*$ , к которой сходятся точки каспов при



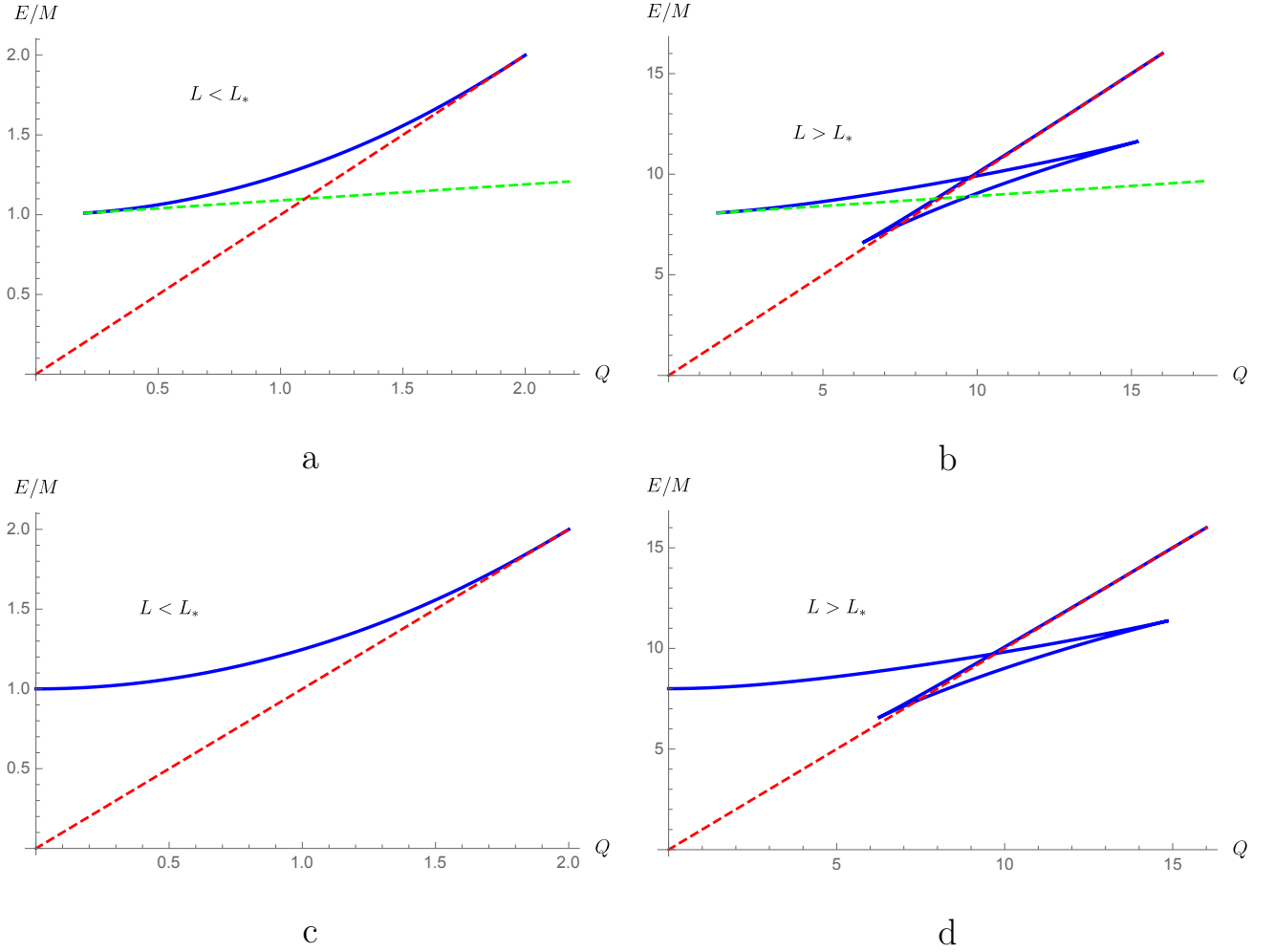


Рис. 2.2. Зависимость энергии  $E$  (в единицах  $M$ ) от заряда  $Q$  для решений вида (2.10). Сплошные линии отвечают  $Q$ -шарам (2.13), пунктирные — скалярному конденсату (2.17). Мы видим качественные отличия в случаях маленьких,  $L < L_*$ , и больших,  $L > L_*$ , длин окружности, на которой изучаются решения. Параметры теории:  $v = 1$ , а)  $m = 0.1M$ ,  $LM = 1$ , б)  $m = 0.1M$ ,  $LM = 8$ , в)  $m = 0$ ,  $LM = 1$ , д)  $m = 0$ ,  $LM = 8$ .

стремлении  $L$  к  $L_*$  (см. Рис. 2.4). Например, при  $m = 0$  мы имеем

$$L_*M \approx 2.14, \quad \omega_*/M \approx 0.76. \quad (2.21)$$

В пределе  $L \rightarrow \infty$  релевантными являются те решения, которые сохраняют конечные значения  $E$  и  $Q$ . Таковыми являются  $Q$ -шары в окрестности левого каспа (см. Рис. 2.2 справа). В самом деле, согласно (2.18), энергия и заряд конденсата расходятся, и вместе с ними расходятся энергия и заряд  $Q$ -шаров “верхних” ветвей, прикрепленных к соответствующим конденсатным ветвям.

Таким образом, в пределе больших длин воспроизводится Рис. 2.1.<sup>3</sup>

### 2.3.2. Многосолитонные решения

Для полноты анализа рассмотрим также решения, в которых амплитуда поля  $\phi$  пересекает точку сшивки параболических ветвей потенциала (2.3) более двух раз при  $x \in (-L/2, L/2)$ . Это двух- и более солитонные конфигурации. Для простоты ограничимся кратким рассмотрением двухсолитонных решений.<sup>4</sup>

Двухсолитонные решения уравнений (2.12) с граничными условиями (2.9) делятся на два класса. Конфигурации первого класса имеют знакопостоянную амплитуду поля и представляют собой два максимально удаленных друг от друга Q-шара (или “анти-Q-шара” при  $f < 0$ ), каждый из которых совпадает с решением (2.13), построенным на окружности вдвое меньшей длины. Соответственно, свойства таких решений (за исключением устойчивости) идентичны свойствам односолитонных решений. В частности, зависимости энергии от заряда имеют то же поведение.

Конфигурации второго класса имеют знакопеременную амплитуду и потому качественно отличаются от решений, изученных ранее. Это решения типа связанного состояния Q-шара и анти-Q-шара, расположенных на максимальном удалении друг от друга. Если поместить центр Q-шара в точку  $x = 0$ , то граничные условия (2.9) требуют  $f'(-L/2) = f'(L/2) = 0$  в случае знакопостоянной амплитуды. Это ограничивает сверху возможные значения энергии и заряда Q-шаров, как видно из Рис. 2.2. В случае системы Q-шара и анти-Q-шара, мы имеем  $f(-L/2) = f(L/2) = 0$ , в то время как производная амплитуды может принимать сколь угодно большие значения. Этим обусловлен тот факт,

<sup>3</sup> Для кусочно-параболического потенциала зависимости  $E(Q)$  качественно одинаковы в 1+1 и 3+1 измерениях [77].

<sup>4</sup> Системы нескольких взаимодействующих Q-шаров изучались аналитическими методами, например, в [90].

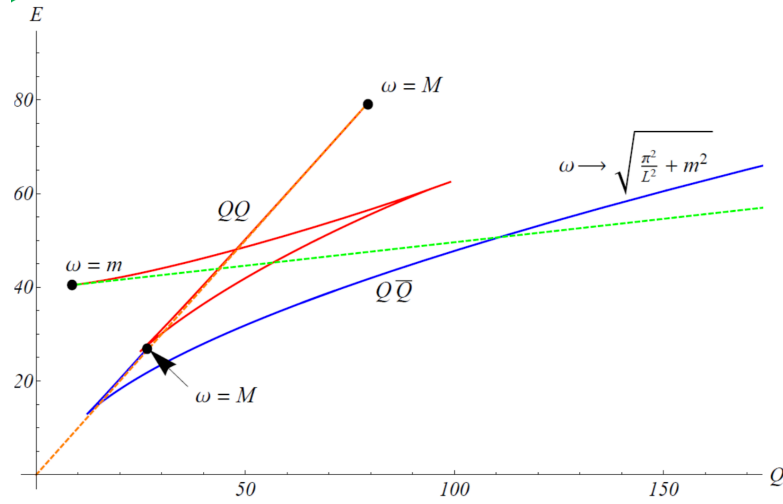


Рис. 2.3. Зависимость энергии  $E$  (в единицах  $M$ ) от заряда  $Q$  для системы из двух  $Q$ -шаров ( $QQ$ ) и для системы  $Q$ -шара и анти- $Q$ -шара ( $Q\bar{Q}$ ). Пунктирные линии соответствуют скалярному конденсату (2.17), точками показаны каспы. Параметры теории:  $m = 0.1M$ ,  $v = 1$ .

что для пары солитон-антисолитон максимально возможные энергия и заряд неограниченны, несмотря на конечный размер пространства, на котором локализована конфигурация. Далее, легко проверить, что допустимый интервал частот для такой пары дается выражением (ср. с (2.15))

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} + m^2} < \omega < M. \quad (2.22)$$

На Рис. 2.2 показаны  $E(Q)$ -зависимости для двухсолитонных решений. Стоит отметить, что двух- и многосолитонные решения классически неустойчивы, что ограничивает интерес к ним с точки зрения феноменологии. С другой стороны, некоторые из этих конфигураций могут быть достаточно долгоживущими. Например, ясно, что система из двух  $Q$ -шаров, каждый из которых классически устойчив, сама является асимптотически устойчивой в пределе  $L \rightarrow \infty$ .

## 2.4. Устойчивость Q-шаров на окружности

В предыдущей секции мы видели, что для большого интервала значений имеется вырождение по заряду решений уравнения (2.12), отвечающих Q-шарам и скалярному конденсату. Мы также видели, что конденсат в теории с потенциалом (2.3) классически устойчив. В этой секции мы покажем, что условие Вахитова-Колоколова для стабильности Q-шаров,  $\partial^2 E / \partial Q^2 < 0$ , применимо к изучаемым здесь периодическим решениям. Таким образом, в случае наличия двух Q-шаров с равным зарядом, решение с меньшей энергией устойчиво, а решение с большей энергией неустойчиво. Мы будем рассматривать только односолитонные решения. Отметим, что кусочно-параболический потенциал полезен при изучении устойчивости, так как позволяет провести анализ малых возмущений над классическим решением в аналитическом виде.

Выберем следующий анзац для возмущений [78],

$$h(x, t) = e^{i\omega t} (f_1(x)e^{i\alpha t} + f_2^*(x)e^{-i\alpha^* t}) , \quad (2.23)$$

где  $f_{1,2}$  — комплексные функции и  $\alpha = -i\gamma + \gamma'$ ,  $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$ . Для решения вида (2.10), линеаризованные уравнения для возмущений имеют вид

$$\begin{cases} f_1'' + (\omega + \alpha)^2 f_1 = U f_1 + (m^2 - M^2)\delta \left(1 - \frac{f^2}{v^2}\right) (f_1 + f_2) , \\ f_2'' + (\omega - \alpha)^2 f_2 = U f_2 + (m^2 - M^2)\delta \left(1 - \frac{f^2}{v^2}\right) (f_1 + f_2) , \end{cases} \quad (2.24)$$

где

$$U = M^2\theta(x_0 - x) + m^2\theta(x - x_0) . \quad (2.25)$$

Исследование этой системы сводится к исследованию системы линейных уравнений (ср. с секцией 1.3). Для этого мы ищем решения уравнений (2.24) независимо при  $|x| < x_0$  и при  $x_0 < |x| < L/2$ , а затем соединяем их в точке сшивки  $x = x_0$ . Из-за наличия дельта-функций полное решение непрерывно,

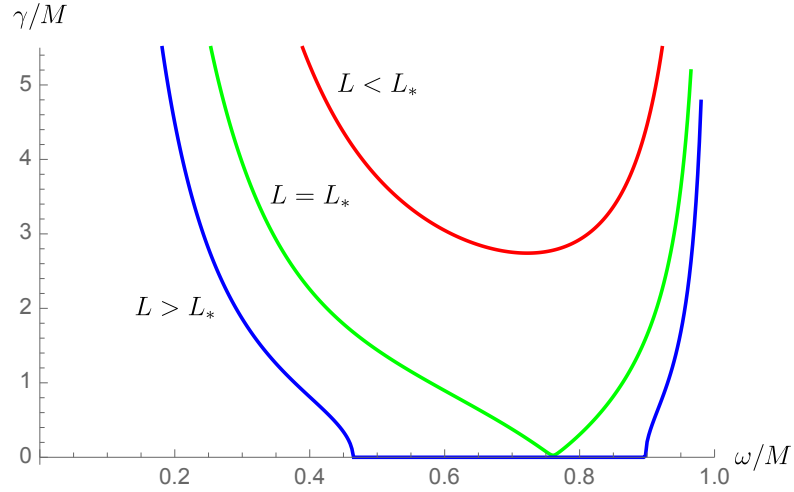


Рис. 2.4. Скорости распада Q-шаров при различных размерах компактификации  $L$ . Параметры теории:  $v = 1$ ,  $m = 0$ ,  $LM = 1, 2.14, 4$ .

но не гладко в этой точке. В каждом интервале общее решение содержит две произвольные константы. Одна из них фиксируется граничным условием (2.9). В точке сшивки (2.24) образуют систему линейных однородных уравнений на оставшиеся константы. Распадная мода существует, если определитель этой системы,  $\Delta = \Delta(\alpha)$ , равен 0 при некотором  $\gamma > 0$  и при  $\gamma' = 0$ .

Уравнение  $\Delta(\alpha) = 0$  имеет по крайней мере одно решение,  $\alpha = 0$ , отвечающее нулевым модам. Одна из них является голдстоуновской модой, соответствующей нарушенной  $U(1)$ -симметрии теории. Она имеет вид  $h \sim i\phi_0$ , где  $\phi_0$  — фоновое решение. Другие решения являются трансляционными голдстоуновскими модами, для них  $h \sim \phi'_0$ . Это означает, что  $\Delta(0) = \Delta'(0) = 0$ . Вычисления показывают, что существование решения с  $\gamma > 0$  коррелирует со знаком величины  $\partial^2 E / \partial Q^2$ . Именно, для Q-клауда,  $\partial^2 E / \partial Q^2 > 0$ , имеется единственный корень уравнения, в то время как для Q-шара,  $\partial^2 E / \partial Q^2 < 0$  такого корня нет. Таким образом, можно действительно говорить о стабильной и нестабильной ветвях решений для Q-шаров. В пределе  $L \rightarrow \infty$  этот вывод согласуется с имеющимися результатами [77].

Величина  $\gamma$  может быть ассоциирована со скоростью распада Q-клаудов. Зависимость  $\gamma$  от фоновой частоты  $\omega$  показана на Рис. 2.4. Мы видим, в част-

ности, что пространство с малым радиусом,  $L < L_*$ , не содержит стабильных решений. При стремлении  $\omega$  к частотам устойчивого конденсата,  $\omega \rightarrow m$  или  $\omega \rightarrow M$ , время жизни  $\tau \sim \gamma^{-1}$  решения стремится к 0. Это согласуется с предположением, что переход между классически устойчивыми Q-шаром и конденсатом осуществляется через промежуточный Q-клауд того же заряда.

## 2.5. О соответствии Q-клаудов сфалеронам

Как уже отмечалось, при достаточно больших  $L$  и  $Q$  имеется трехкратное вырождение классических решений по заряду. Это продемонстрировано явно на Рис. 2.5 слева. Два из трех решений устойчивы, а третье соответствует неустойчивому Q-клауду. Наличие единственной распадной моды у Q-клаудов позволяет трактовать их как сфалероны — седловые точки, находящиеся на вершине энергетического барьера, разделяющего стабильные решения. Как известно, сфалероны играют ключевую роль в переходах между стабильными конфигурациями при высоких температурах [91]. Здесь мы проведем лишь предварительное рассмотрение таких переходов; детальный анализ туннельных решений содержится в работе [31]. Напомним, что важную роль в возможности аналитического анализа сфалеронов играют граничные условия (2.9), регуляризирующие энергию и заряд конденсата. Отметим еще, что в работе [92] рассматривалась сфалеронная задача для статических вакуумов в аналогичной топологии, см. также [51].

Из Рис. 2.5 ясно, что при достаточно больших зарядах высота барьера между конденсатом и Q-шаром много меньше энергии конденсата. Данное свойство не является специфичным для кусочно-параболического потенциала или для теории в 1+1 измерениях. В реалистичной (3+1)-мерной задаче энергетический барьер между решениями точно так же может быть произвольно мал [77].

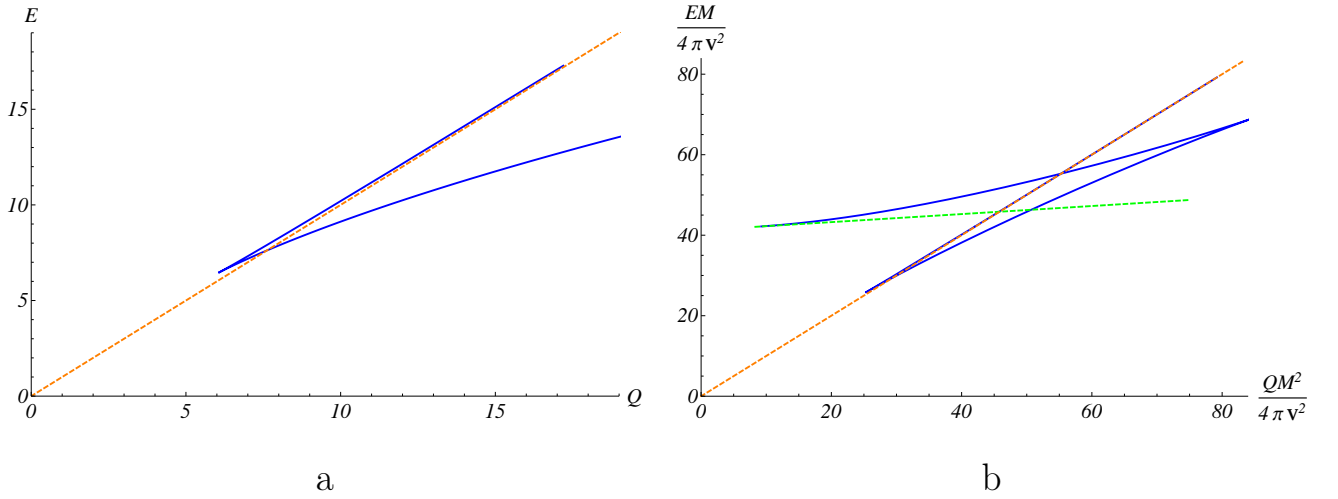


Рис. 2.5. а) Зависимость энергии (нормированной на массу частицы  $M$ ) от заряда для (1+1)-мерных компактифицированных  $Q$ -шаров с конечными  $E$  и  $Q$  в пределе больших  $L$ . Параметры теории:  $v = 1$ ,  $m = 0.1M$ ,  $LM = 20$ . б) Зависимость энергии от заряда для (3+1)-мерных компактифицированных  $Q$ -шаров с радиусом компактификации  $L = 10M$ , и  $m = 0.1M$ . Пунктирные линии соответствуют скалярному конденсату.

Поместим теперь систему в термальную баню с температурой  $T$ . Подберем заряд  $Q_0$  такой, что для него (и для всех  $Q > Q_0$ )  $T \gg \Delta E = E_{Q\text{-cloud}} - E_{\text{condensate}}$ . В этом случае доминирующим каналом распада конденсата в  $Q$ -шары является сфалеронный переход. В лидирующем порядке вероятность распада конденсата дается формулой Аррениуса,  $\Gamma \sim \exp(-\Delta E/T)$ . В пределе малых  $b$  она имеет вид

$$\Gamma_{1+1} \sim \exp\left(-\frac{v^2 b}{2T}\right). \quad (2.26)$$

Выше мы провели подробный анализ (1+1)-мерных периодических решений. Не составляет труда повторить рассмотрение для (3+1)-мерных решений. В интересующем нас режиме  $L \rightarrow \infty$  они представлены на Рис. 2.5 справа. При тех же предположениях, вероятность распада записывается как

$$\Gamma_{3+1} \sim \exp\left(-\frac{\pi^3 v^2 b}{2(M^2 - m^2)T}\right). \quad (2.27)$$

Уточним условия применимости формул (2.26) и (2.27). Во-первых, должны существовать классически устойчивые решения, между которыми происходит переход. Во-вторых, температура должна быть много больше высоты барьера

между решениями. Последнее также предполагает наличие термодинамического равновесия между полем  $\phi$  и частицами, составляющими термальную баню.

В заключение отметим, что формулы (2.26), (2.27) не зависят от размера компактификации  $L$ . Следовательно, они применимы к реалистичной задаче сфалеронных переходов в неограниченном пространстве при выполнении условий, изложенных выше.



## Глава 3

# Нелинейные разрежения и сгущения в заряженном скалярном конденсате

## 3.1. Введение к главе

Пространственно-однородные решения в теориях комплексного скалярного поля с глобальной  $U(1)$ -симметрией находят применение во многих областях современной физики. Возможно, наиболее известный пример их использования в космологии — это механизм бариогенезиса Аффлек-Дайна [26]. Эволюция однородного конденсата в ранней Вселенной, обычно изучаемая численно, должна подчиняться определенным условиям для реализации успешного космологического сценария [93]. К примеру, возможная пространственная неустойчивость конденсата приводит к его фрагментации с образованием локальных неоднородностей. В случае вещественного скалярного поля такими неоднородностями являются осциллоны [94], динамика которых может сопровождаться наблюдаемыми эффектами [95], например, гравитационными волнами [96–98]. В случае комплексного скалярного поля неоднородностями являются нетопологические солитоны — Q-шары.

Как обсуждалось во введении к диссертации, долгоживущие частице-подобные конфигурации имеются в системах, эволюция которых описывается нелинейным уравнением Шредингера. В нелинейной оптике такими конфигурациями являются (в зависимости от параметра в уравнении) яркие либо темные оптические солитоны. Эти объекты имеют топологическую природу в том смысле, что их невозможно деформировать в однородное решение (волну с постоянными амплитудой и фазой) с конечными энергетическими затратами. Тем не менее, Q-шары, возникающие в релятивистской теории поля, можно

рассматривать в качестве классических решений, аналогичных ярким солитонам. Естественным поэтому является вопрос о существовании и свойствах полевых объектов, аналогичных темным солитонам, в теориях с глобальной  $U(1)$ -симметрией, где они предположительно могут изучаться теми же методами, что и обычные Q-шары.

Наличие в скалярных теориях поля классических конфигураций, описывающих нелинейное разрежение плотности заряда, не является следствием неких специальных свойств теории. В действительности, подобные решения существуют в обычном потенциале типа “мексиканской шляпы”. Чтобы увидеть их, рассмотрим комплексное скалярное поле  $\phi$  с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi - v^2)^2 . \quad (3.1)$$

При  $\lambda > 0$  соответствующие уравнения движения имеют хорошо известное вещественное статическое решение — кинк. Оно записывается в виде

$$\phi = v \tanh \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v x \right) . \quad (3.2)$$

В теории с вещественным полем кинк является устойчивым топологическим солитоном. Если же поле комплексно, это решение становится неустойчивым: в его спектре появляется одна отрицательная мода.<sup>1</sup>

Помимо вещественного кинка, теория (3.1) содержит семейство стационарных, но не статических, конфигураций вида

$$\phi = e^{i\omega t} f(x) , \quad (3.3)$$

где  $\omega$  — постоянная (частота) и

$$f(x) = \sqrt{v^2 + \frac{\omega^2}{\lambda}} \tanh \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left( v^2 + \frac{\omega^2}{\lambda} \right) x \right) . \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup> Комплексный кинк можно интерпретировать как сфалерон в абелевой калибровочной версии теории (3.1); см., например, [51, 52].

Плотность  $U(1)$ -заряда  $\rho$  на этом решении имеет вид

$$\rho = 2\omega f^2 \quad (3.5)$$

и действительно описывает “яму” в однородном распределении заряда, локализованную в точке  $x = 0$ . Однако, полевая конфигурация стремится к разным однородным решениям при  $x \rightarrow \pm\infty$ , т.е. решение (3.3) остается топологическим. В частности, оно не может быть продеформировано в пространственно-однородный конденсат того же заряда или частоты с конечными затратами энергии. Заметим также, что при  $\lambda > 0$  конденсат, в который “погружено” решение (3.3), является классически устойчивым.

В данной главе мы изучим солитонно-подобные локализованные решения в теории с комплексным скалярным полем, которые описывают неоднородности (разрежения или сгущения) в распределении заряда конденсата и которые *могут* быть деформированы в пространственно-однородное решение той же частоты с конечными энергетическими затратами. Мы будем называть такие решения “Q-дырки” или “Q-балджи”, для того чтобы подчеркнуть их схожесть с обычными Q-шарами и с “дырками в конденсате духов” [60]. В секции 3.2 мы установим существование этих решений с помощью простой механической аналогии и изучим их общие свойства. Секции 3.3 и 3.4 посвящены изучению явных примеров Q-дырок в теории с кусочно-параболическим потенциалом в 1+1 и 3+1 измерениях и в теории с полиномиальным потенциалом в 1+1 измерениях. В секции 3.5 мы обсудим классическую (не)устойчивость Q-дырок и Q-балджей. Секция 3.6 содержит сводку основных результатов и заключение.

## 3.2. Общее рассмотрение

### 3.2.1. Q-шары

Рассмотрим теорию комплексного скалярного поля  $\phi$  в плоском  $(d+1)$ -мерном пространстве-времени с действием

$$S = \int dt d^d x (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(\phi^* \phi)) . \quad (3.6)$$

Предположим, что потенциал  $V(\phi^* \phi)$  имеет минимум (локальный или глобальный) в точке  $\phi = 0$ . В этом случае теория может допускать существование частице-подобных конфигураций — Q-шаров [20, 21]. Они являются решениями уравнений движения вида

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{i\omega t} f(\mathbf{x}) , \quad (3.7)$$

где  $f(\mathbf{x})$  — вещественная функция, такая что  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ . Если  $d > 1$ , мы предполагаем, что конфигурация обладает сферической симметрией:  $f(\mathbf{x}) = f(r)$ , где  $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ . Кроме того, мы считаем амплитуду поля всюду положительной:  $f(r) > 0$  для любого  $r$ . Требование гладкости в нуле приводит также к условию  $\partial_r f(r)|_{r=0} = 0$ .

Применяя анзац (3.7) к уравнению движения для поля  $\phi$  и его комплексно сопряженного, получаем уравнение на функцию  $f$ ,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{df}{dr} + \omega^2 f - \frac{1}{2} \frac{dV(f)}{df} = 0 . \quad (3.8)$$

Хорошо известно, что это уравнение можно рассматривать как уравнение движения точечной частицы единичной массы в классической механике, где координатой является амплитуда поля  $f$ , а временем — координата  $x$  (или  $r$ ). Частица движется в эффективном потенциале

$$U_\omega(f) = \frac{1}{2} (\omega^2 f^2 - V(f)) . \quad (3.9)$$

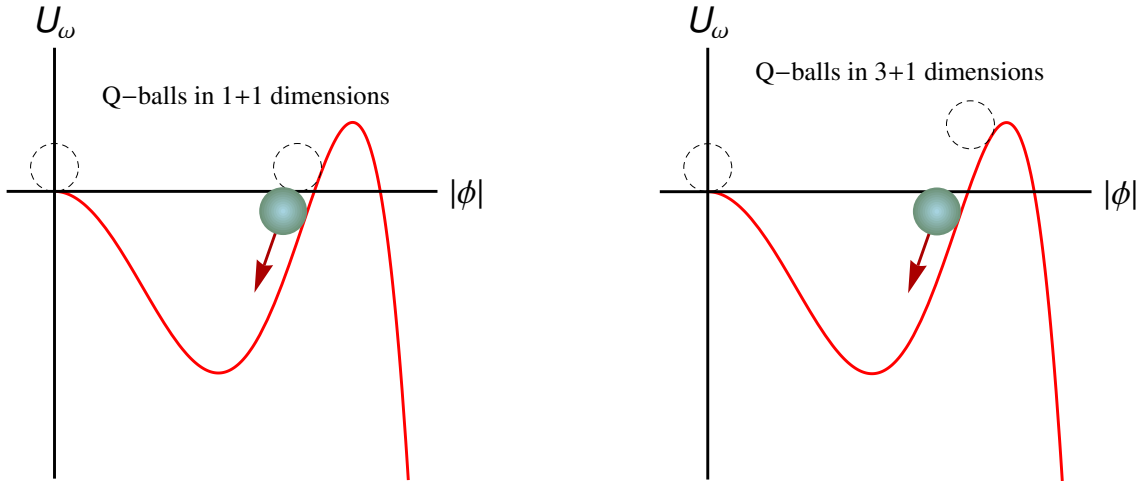


Рис. 3.1. Механическая аналогия для Q-шаров в 1 + 1 и 3 + 1 измерениях соответственно.

При  $d > 1$  на движение частицы оказывает влияние трение  $\propto \frac{1}{r} \frac{df}{dr}$ . Эта механическая аналогия для Q-шаров проиллюстрирована на Рис. 3.1. Частица, движение которой соответствует профилю Q-шара, стартует из точки  $f = f_{max}$  в момент времени  $x = 0$  (или  $r = 0$ ) и достигает точки  $f = 0$ , соответствующей классическому вакууму, в момент времени  $x \rightarrow \infty$  (или  $r \rightarrow \infty$ ).<sup>2</sup> Заметим, что при  $d > 1$  мы имеем  $U_\omega(f(0)) > U_\omega(0)$  в силу наличия трения.

Несмотря на достаточную очевидность, механическая аналогия помогает нам обнаружить новый класс решений в том случае, когда потенциал  $U_\omega(f)$  содержит иные локальные либо глобальные максимумы помимо того, что достигается в точке  $f = 0$ . В следующей секции мы применим этот метод для описания пространственно-однородных решений (заряженного скалярного конденсата) и нелинейных разрежений и сгущений на фоне этого конденсата (Q-дырок и Q-балджей соответственно).

<sup>2</sup> Заметим, что в одномерном случае эта аналогия определяет решение только при  $x \geq 0$ . Полное решение симметрично по  $x$ :  $f(-x) = f(x)$ .

### 3.2.2. Скалярный конденсат, Q-дырки и Q-балджи

Предположим, что для некоторых значений частоты  $\omega$ , эффективный потенциал  $U_\omega(f)$  имеет максимум,

$$\left. \frac{dU_\omega(f)}{df} \right|_{f=f_c} = 0, \quad (3.10)$$

в некоторой точке  $f_c \neq 0$ .<sup>3</sup> Тогда, в дополнение к вакуумному состоянию  $f = 0$ , в теории появляется семейство пространственно-однородных стационарных решений

$$\phi(t, \mathbf{x}) = f_c e^{i\omega t}, \quad f_c \neq 0. \quad (3.11)$$

Без ограничения общности мы считаем, что  $f_c$  вещественна и положительна. Решения (3.11) описывают классический конденсат скалярного поля. Как уже обсуждалось в главе 2, в бесконечном пространстве совокупные энергия и заряд конденсата также бесконечны. Там же мы аргументировали, что при определенном выборе скалярного потенциала конденсат может оказаться стабильным относительно малых флуктуаций. Далее мы покажем это явно на примере кусочно-параболического потенциала. Заметим также, что существование дополнительного максимума эффективного потенциала  $U_\omega(f)$  не означает наличие соответствующего минимума у исходного потенциала  $V(f)$ .

Мы можем использовать описанную ранее механическую аналогию для выявления новых неоднородных решений вида  $\phi(t, \mathbf{x}) = f(r)e^{i\omega t}$ .<sup>4</sup> Нас будут интересовать два типа таких решений. Механическая аналогия для конфигураций первого типа представлена на Рис. 3.2. Их характерное свойство заключается в том, что амплитуда поля в центре конфигурации меньше, чем его асимптотическое значение на бесконечности,

$$f(\infty) > f(0). \quad (3.12)$$

---

<sup>3</sup> В общем случае, положение максимума зависит от частоты. Можно, однако, подобрать потенциал таким образом, чтобы этой зависимости не было.

<sup>4</sup> Как и в случае с Q-шарами, мы считаем, что  $f(r)$  всюду вещественна и положительна.

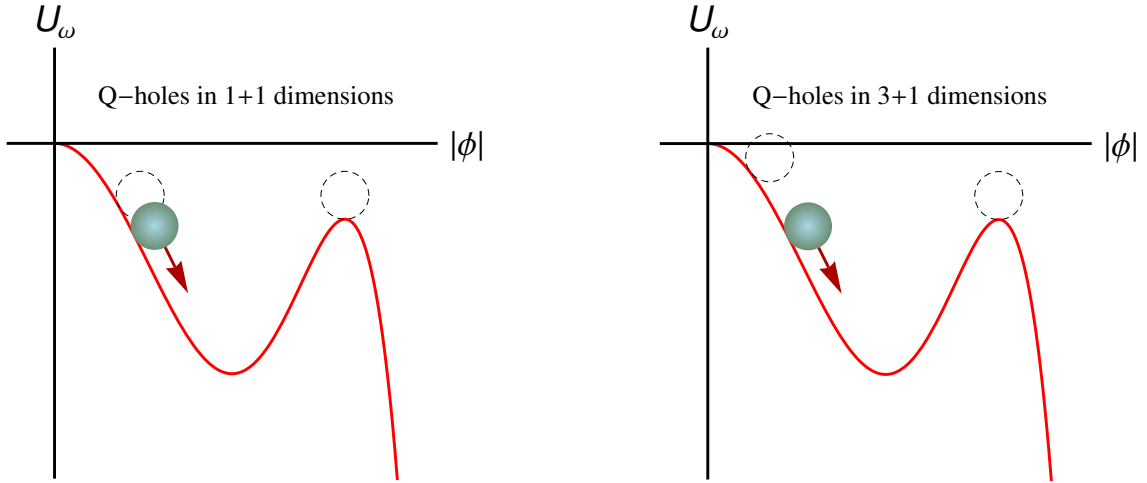


Рис. 3.2. Механическая аналогия для Q-дырок в 1 + 1 и 3 + 1 измерениях соответственно.

Таким образом, эти решения представляют собой разрежения или “ямы” в однородном заряженном конденсате частиц. Из-за этой их особенности, а также имея в виду их общие с Q-шарами свойства, в дальнейшем мы будем называть такие солитоны “Q-дырками”.

Механическая аналогия для решений второго типа показана на Рис. 3.3. Для них выполняется неравенство

$$f(\infty) < f(0) . \quad (3.13)$$

Следовательно, можно думать об этих солитонах как о локальных сгущениях заряженного конденсата. По этой причине мы будем называть их “Q-балджи”. Из Рис. 3.3 видно, что существование Q-балджей зависит от свойств эффективного потенциала при больших значениях поля. За исключением этой особенности, с механической точки зрения Q-балджи аналогичны Q-шарам.

Рассмотрим основные свойства Q-дырок и Q-балджей. Во-первых, из их асимптотики на бесконечности,

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow f_c , \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty , \quad (3.14)$$

следует, что частота  $\omega$  Q-дырки (Q-балджа) синхронизирована с частотой скалярного конденсата с амплитудой  $f_c$ , локальную неоднородность которого они

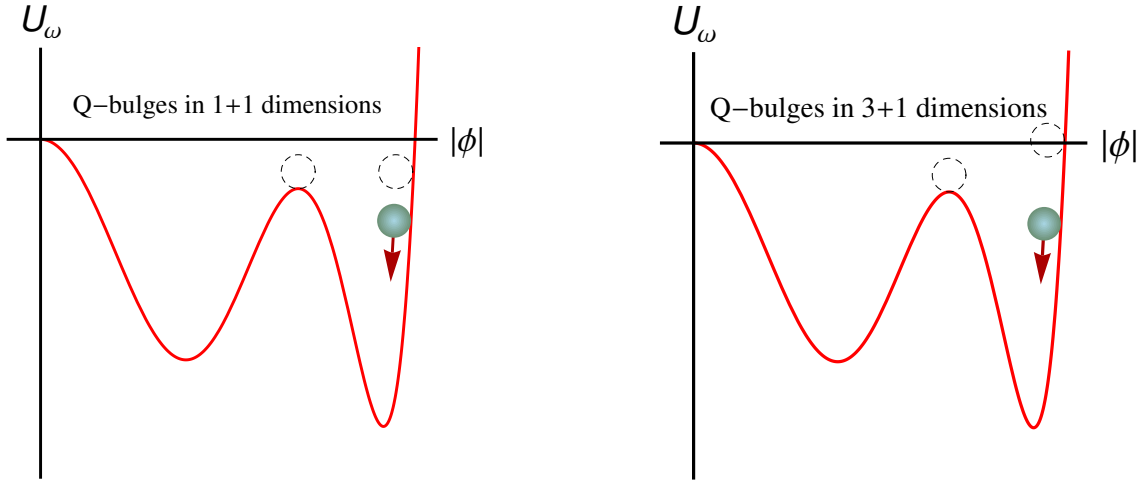


Рис. 3.3. Механическая аналогия для Q-балджей в 1 + 1 и 3 + 1 измерениях соответственно.

описывают. Во-вторых, заряд и энергия Q-дырки (Q-балджа) определяются стандартным образом,

$$Q = i \int d^d x \left( \phi \dot{\phi}^* - \phi^* \dot{\phi} \right) = 2\omega \int d^d x f^2, \quad (3.15)$$

$$E = \int d^d x \left( \omega^2 f^2 + \sum_{i=1}^d \partial_i f \partial_i f + V(f) \right). \quad (3.16)$$

Эти величины очевидно расходятся, так как расходятся соответствующие величины для однородного решения. Мы уже сталкивались с этой ситуацией в главе 2. Тогда, для того чтобы говорить о соотношениях между Q-шарами и конденсатом, мы регуляризовали энергию и заряд последнего путем наложения периодических граничных условий. В этой главе мы применим другой подход. Мы ожидаем, что энергия и заряд солитона, существующего на фоне конденсата, отличаются от энергии  $E_c$  и заряда  $Q_c$  самого конденсата на конечные величины. Эту разницу мы и примем за регуляризованные энергию и заряд Q-дырки (Q-балджа):

$$Q_{ren} = Q - Q_c = 2\omega \int d^d x (f^2 - f_c^2), \quad (3.17)$$

$$E_{ren} = E - E_c = \int d^d x \left( \omega^2 (f^2 - f_c^2) + \sum_{i=1}^d \partial_i f \partial_i f + V(f) - V(f_c) \right). \quad (3.18)$$

Ниже мы явно продемонстрируем, что формулы (3.17) действительно



определяют конечные величины для всех значений параметров теории. Далее, непосредственное вычисление приводит к равенству

$$E_{ren} = \omega Q_{ren} + \frac{2}{d} \int d^d x \partial_i f \partial_i f, \quad (3.19)$$

вполне аналогичному тому, что выполняется для энергии и заряда Q-шара.<sup>5</sup> Наконец, используя уравнения (3.17), можно показать, что для Q-дырок и Q-балджей выполняется ключевое соотношение, связывающее их регуляризованные энергию и заряд,

$$\frac{dE_{ren}}{d\omega} = \omega \frac{dQ_{ren}}{d\omega}, \quad (3.20)$$

идентичное соотношению между энергией и зарядом Q-шара. Таким образом, многие свойства Q-дырок и Q-балджей аналогичны свойствам Q-шаров. Формулы (3.19) и (3.20) подтверждают осмысленность использования  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$  для измерения заряда и энергии конфигурации относительно фонового конденсата.

Важно отметить, что, поскольку для Q-дырок неравенство  $f(\mathbf{x}) < f_c$  выполняется для всех  $|\mathbf{x}| < \infty$ , знак  $Q_{ren}$  противоположен знаку  $\omega$  и, таким образом, относительная энергия  $E_{ren}$  не является положительно определенной. Во избежание путаницы подчеркнем еще раз, что  $E_{ren}$  определяется относительно энергии конденсата и не имеет абсолютного смысла. В отличие от Q-шаров, мы не можем задать универсальную точку отчета энергии Q-дырок, так как для решений с разными частотами относительная энергия задается по-разному (это справедливо и для Q-балджей). Что касается Q-балджей, то для них  $\omega Q_{ren} > 0$ , так что  $E_{ren} > 0$ .

Последнее важное замечание касается асимптотического поведения солитонов на больших расстояниях. Отметим еще раз, что хотя  $\left. \frac{dU_\omega(f)}{df} \right|_{f=f_c} = 0$ , производная исходного потенциала  $V(f)$  может быть не равной нулю всюду, кроме точки  $f = 0$ . Следовательно, в общем случае, амплитуда поля Q-дырок

---

<sup>5</sup> Вывод этого соотношения также полностью аналогичен выводу для Q-шаров, см., например, [77].

(Q-балджей) на больших расстояниях не стремится к какому-либо вакуумному состоянию. Это свойство весьма контр-интуитивно, если принимать во внимание поведение обычных солитонов.

### 3.3. Некоторые точные примеры

В данной секции мы рассмотрим теорию, в которой как скалярный конденсат, так и Q-дырки могут быть исследованы аналитическими методами. Для этого мы используем модификацию кусочно-параболического потенциала [73], который уже применялся нами ранее для нахождения точных решений. Запишем потенциал в виде

$$V(|\phi|) = M^2 |\phi|^2 \theta \left( 1 - \frac{|\phi|^2}{v^2} \right) + M^2 (|\phi|^2 - 2\epsilon v |\phi| + 2\epsilon v^2) \theta \left( \frac{|\phi|^2}{v^2} - 1 \right), \quad (3.21)$$

где  $|\phi| = \sqrt{\phi^* \phi}$ ,  $M^2 > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $v > 0$ ,  $\theta$  — функция Хевисайда, такая что  $\theta(0) = \frac{1}{2}$ . Как мы увидим в дальнейшем, параметр  $\epsilon$  регулирует свойства потенциала, важные для существования солитонов. Потенциал (3.21) имеет по крайней мере один минимум в точке  $|\phi| = 0$ . Легко видеть, что при  $\epsilon < 1$  других минимумов нет, в то время как при  $\epsilon > 1$  второй (локальный или глобальный) минимум расположен в точке  $|\phi| = \epsilon v$ . Потенциал (3.21) можно обобщить, используя разные массовые параметры для малых и больших амплитуд поля  $\phi$ .

Легко видеть, что в теории с потенциалом (3.21) отсутствуют Q-балджи. Последние, однако, могут появиться при добавлении очередной параболической ветви при больших значениях  $|\phi|$ . В принципе, свойства Q-дырок и Q-балджей во многом идентичны, как следует, например, из уравнений (3.17) и (3.20). Между тем, в отличие от Q-балджей, энергия Q-дырок относительно конденсата может быть отрицательной, что делает их изучение сравнительно более интересным. По этой причине, в этой и следующей секциях мы сконцентрируемся на детальном анализе Q-дырок.

### 3.3.1. Скалярный конденсат и его устойчивость

Изучим для начала свойства стационарного скалярного конденсата в  $(d+1)$ -мерном пространстве-времени. Пространственно-однородные решения уравнения движения (3.8) с потенциалом (3.21) имеют вид

$$\phi = f_c e^{i\omega t}. \quad (3.22)$$

Если  $0 < f_c < v$ , уравнение (3.8) дает  $|\omega| = M$  и амплитуда  $f_c$  конденсата не зависит от  $\omega$ . При  $f_c > v$ , из (3.8) следует

$$f_c = \frac{v\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2}. \quad (3.23)$$

Из этого выражения видно, что значения частоты конденсата ограничены интервалом  $0 \leq |\omega| < M$ . С другой стороны, условие  $f_c > v$  означает, что  $\omega^2 > M^2(1 - \epsilon)$ , если  $\epsilon \leq 1$ , и  $\omega^2 \geq 0$  в противном случае. Учитывая все эти ограничения, мы получаем интервал допустимых значений  $\omega$ ,

$$\omega_{\min}^2 \leq \omega^2 < M^2, \quad (3.24)$$

где введено обозначение

$$\omega_{\min}^2 = \max(0, 1 - \epsilon)M^2. \quad (3.25)$$

Найдем теперь заряд и энергию конденсата. При  $0 < f_c < v$ , они записываются в виде

$$Q_c = \int d^d x \rho_q = \int d^d x 2M f_c^2, \quad (3.26)$$

$$E_c = \int d^d x \rho_e = \int d^d x 2M^2 f_c^2, \quad (3.27)$$

а для  $f_c > v$  мы имеем

$$Q_c = \int d^d x \frac{2\omega v^2 \epsilon^2 M^4}{(M^2 - \omega^2)^2}, \quad (3.28)$$

$$E_c = \int d^d x \frac{\epsilon v^2 M^2}{(M^2 - \omega^2)^2} ((2 - \epsilon)M^4 + (3\epsilon - 4)\omega^2 M^2 + 2\omega^4), \quad (3.29)$$

где  $\omega$  ограничена неравенством (3.24). Ясно, что полные заряд и энергия конденсата бесконечны вследствие бесконечного объема пространства.

Мы видим, что теория содержит два семейства однородных решений. Решения с  $f_c < v$  могут быть интерпретированы как конденсат частиц массы  $M$ . В самом деле, для них  $\rho_e = M\rho_q$ . Решения, для которых  $f_c > v$ , не могут быть представлены таким образом.

Изучим теперь классическую устойчивость конденсата под действием малых флуктуаций скалярного поля. Очевидно, что решения вида

$$\phi = f_c e^{iMt}, \quad 0 < f_c < v \quad (3.30)$$

являются стабильными, так как возмущения над ними удовлетворяют стандартному уравнению Клейна-Гордона. Для того, чтобы установить устойчивость решений другого семейства,

$$\phi = e^{i\omega t} \frac{v\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2}, \quad \omega_{\min}^2 \leq \omega^2 < M^2, \quad (3.31)$$

запишем скалярное поле в виде

$$\phi = e^{i\omega t} \frac{v\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2} + e^{i\omega t} (ae^{ik_0 t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} + be^{-ik_0 t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}), \quad (3.32)$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные числа и  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ . Подставляя (3.32) в уравнение движения для скалярного поля, получаем линеаризованное уравнение для возмущений. (Не)устойчивость конденсата проявляется в наличии (отсутствии) решений линеаризованного уравнения с мнимым  $k_0$ . Прямое вычисление приводит к следующему уравнению на  $k_0$  и  $\mathbf{k}$ ,

$$(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - M^2 + \omega^2) (k_0^2 - \mathbf{k}^2) - 4\omega^2 k_0^2 = 0. \quad (3.33)$$

Оно имеет следующие решения,

$$k_0^2 = \frac{M^2 + 3\omega^2 + 2\mathbf{k}^2 \pm \sqrt{(M^2 + 3\omega^2)^2 + 16\omega^2 \mathbf{k}^2}}{2}. \quad (3.34)$$

Так как

$$\begin{aligned} (M^2 + 3\omega^2 + 2\mathbf{k}^2)^2 &= (M^2 + 3\omega^2)^2 + 16\omega^2\mathbf{k}^2 + 4(M^2 - \omega^2)\mathbf{k}^2 + 4(\mathbf{k}^2)^2 \quad (3.35) \\ &\geq (M^2 + 3\omega^2)^2 + 16\omega^2\mathbf{k}^2, \end{aligned}$$

мы получаем, что  $k_0^2 \geq 0$ , и, таким образом, скалярный конденсат в нашей модели классически устойчив. Этот вывод находится в согласии с общим признаком классической неустойчивости однородного решения (2.7).

### 3.3.2. Q-дырки в (1+1)-мерном пространстве-времени

Мы приступаем к детальному анализу Q-дырок в (1+1)-мерном пространстве-времени. Соответствующие решения уравнения (3.8) имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} v \frac{\cosh(\sqrt{M^2 - \omega^2} x)}{\cosh(\sqrt{M^2 - \omega^2} X)}, & |x| < X, \\ v \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2} - v \left( \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2} - 1 \right) e^{\sqrt{M^2 - \omega^2}(X - |x|)}, & |x| \geq X, \end{cases} \quad (3.36)$$

где величина

$$X = \frac{1}{\sqrt{M^2 - \omega^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{(\epsilon - 1)M^2 + \omega^2}{M^2 - \omega^2} \right) \quad (3.37)$$

задает точку сшивки, в которой  $f(X) = v$ . Так как аргумент функции в (3.37) интерполирует между 0 и 1, допустимые значения частоты Q-дырки лежат в интервале

$$(1 - \epsilon)M^2 \leq \omega^2 < \omega_{\max}^2, \quad (3.38)$$

где мы обозначили

$$\omega_{\max}^2 = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) M^2. \quad (3.39)$$

Это неравенство легко понять с помощью механической аналогии. Из Рис. 3.2 мы видим, что если  $U_\omega(f_c) \geq 0$ , то частица не в состоянии достигнуть вершины эффективного потенциала. Следовательно, для существования солитона должно выполняться условие

$$\omega^2 f_c^2 - V(f_c) < 0. \quad (3.40)$$

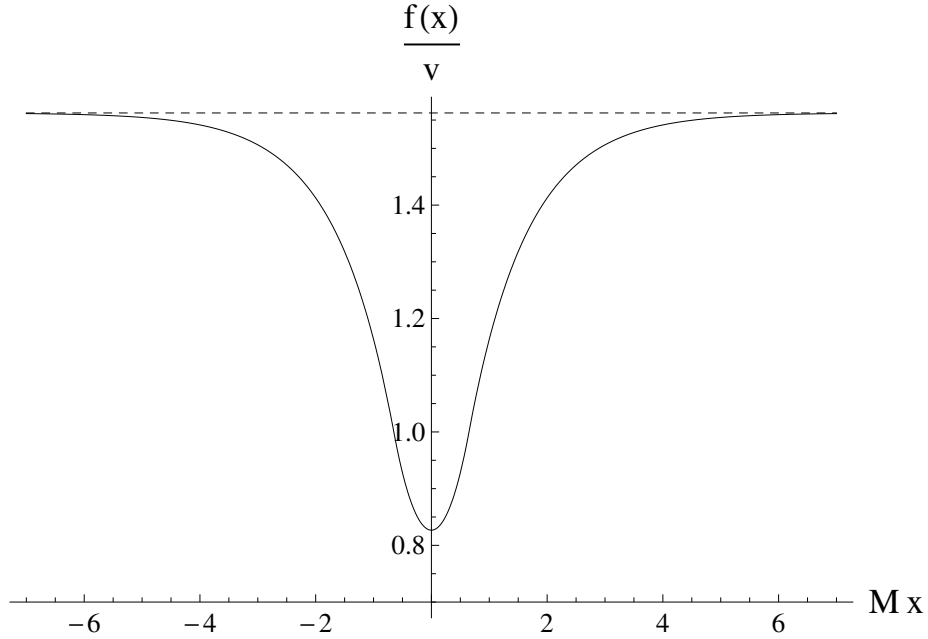


Рис. 3.4. Решение типа Q-дырки в (1+1)-мерном пространстве-времени. Параметры теории:  $\epsilon = 1.5$ ,  $\omega = 0.2M$ . Пунктирная линия задает амплитуду скалярного конденсата  $f_c$ , на фоне которого существует решение.

Используя уравнения (3.23) и (3.21), из (3.40) получаем правую часть неравенства (3.38). Что касается левой части, то она определяется требованием возрастания эффективного потенциала при  $|\phi| > v$ .

Из (3.38) видно, что при  $\epsilon \geq 2$  Q-дырки не существуют. Если же  $1 < \epsilon < 2$ , левую часть неравенства можно заменить на  $0 \leq \omega^2$ . Следовательно, область допустимых значений частот в теории с потенциалом (3.21) имеет вид (ср. (3.24))

$$\omega_{\min}^2 \leq \omega^2 < \omega_{\max}^2, \quad (3.41)$$

где  $\omega_{\min}$  определяется в (3.25).

На Рис. 3.4 представлен пример конфигурации типа Q-дырки. Мы видим, что  $f(x) \rightarrow f_c > v$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Очевидно, что решений с асимптотикой  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow f_c < v$  в теории с потенциалом (3.21) не существует.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Это утверждение остается справедливым и в  $(d+1)$ -мерном случае.

Регуляризованные заряд и энергия Q-дырки даются выражениями

$$Q_{ren} = \frac{2\omega v^2}{(M^2 - \omega^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \left( (2\epsilon - 3\epsilon^2)M^4 - 2\epsilon M^2 \omega^2 \right) \operatorname{arctanh} \left( \frac{(\epsilon - 1)M^2 + \omega^2}{M^2 - \omega^2} \right) - 3\epsilon M^2 ((\epsilon - 1)M^2 + \omega^2) \right), \quad (3.42)$$

$$E_{ren} = \frac{2v^2}{(M^2 - \omega^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \left( \epsilon^2 M^4 (M^2 - 4\omega^2) + \epsilon M^2 (M^2 - \omega^2) (4\omega^2 - 2M^2) \right) \times \operatorname{arctanh} \left( \frac{(\epsilon - 1)M^2 + \omega^2}{M^2 - \omega^2} \right) + \epsilon M^2 (M^2 - 4\omega^2) ((\epsilon - 1)M^2 + \omega^2) \right). \quad (3.43)$$

Перечислим некоторые свойства  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$ , следующие из этих выражений.

1.  $|Q_{ren}| \rightarrow \infty$  и  $|E_{ren}| \rightarrow \infty$ , когда  $\omega$  стремится к верхнему пределу в неравенстве (3.41). В этом случае точка сшивки параболических ветвей потенциала  $X$  неограниченно возрастает и решение представляет собой “пузырь” классического вакуума  $f = 0$ , отделенный от конденсата тонкой (по сравнению с областью, которую она ограничивает) стенкой, расположенной в точках  $x = \pm X$ . Применимость тонкостенного приближения также видна из механической аналогии: при  $\omega \rightarrow \omega_{\max}$  максимумы эффективного потенциала становятся вырожденными и время, проведенное частицей вблизи этих максимумов, неограниченно возрастает, тогда как время, затрачиваемое на движение в области, разделяющей максимумы, определяется кривизной потенциала в этой области и остается конечным.
2. Если  $\omega = 0$  (допустимое значение частоты при  $\epsilon > 1$ ), то  $Q_{ren} = 0$  и  $E_{ren} > 0$  вследствие уравнений (3.19).
3. Если же  $\omega = M\sqrt{1 - \epsilon}$  и при этом  $\epsilon < 1$ , мы имеем  $Q_{ren} = 0$  и  $E_{ren} = 0$ . Действительно, в этом пределе  $X = 0$  и решение сводится к конденсату  $f(x) \equiv f_c = v$ . Таким образом, при  $\epsilon < 1$  однопараметрическое семейство

солитонов содержит однородное решение в качестве предельного случая  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$ .

Характерные зависимости  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$  от  $\omega$  представлены на Рис. 3.5—3.7. Мы видим, что регуляризованная энергия солитона может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Как было отмечено в секции 3.2.2, этот результат ожидаем и не должен удивлять. В качестве дополнительной проверки вычислений можно показать численно, что уравнение (3.20) выполняется для  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$ , заданных формулами (3.42) и (3.43).

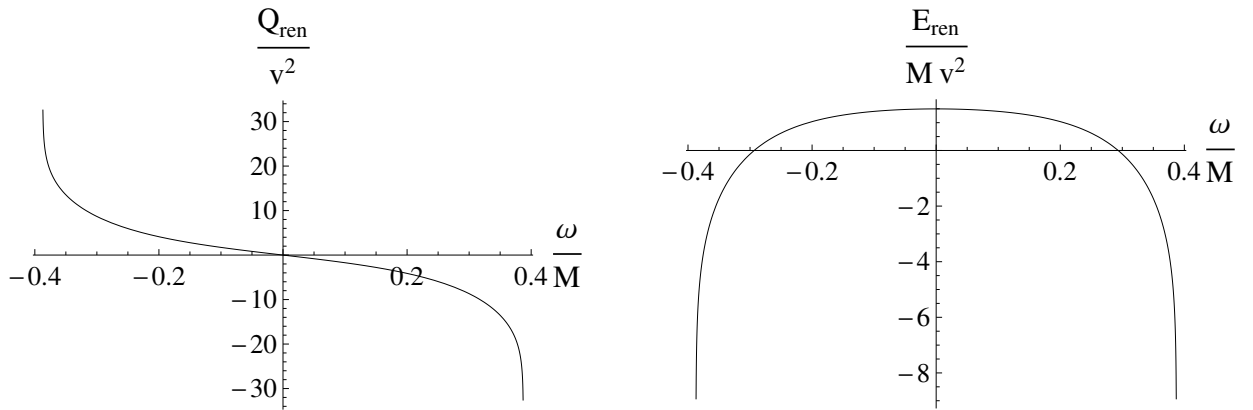


Рис. 3.5.  $Q_{ren}(\omega)$  и  $E_{ren}(\omega)$  при  $\epsilon = 1.7$  в (1+1)-мерном случае.

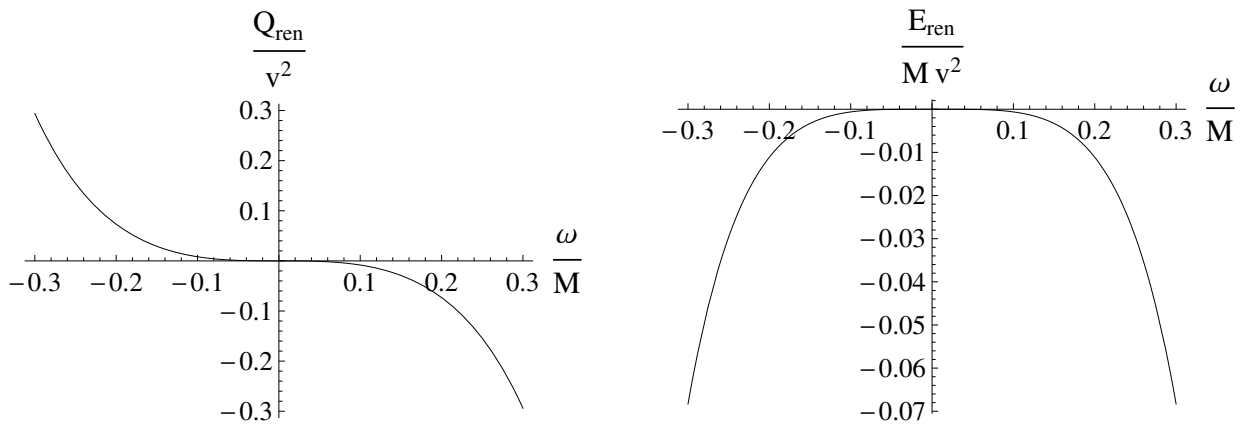


Рис. 3.6.  $Q_{ren}(\omega)$  и  $E_{ren}(\omega)$  при  $\epsilon = 1$  в (1+1)-мерном случае.

Сделаем важное замечание, касающееся свойств решений, обсуждаемых выше. Формально, они были получены в рамках конкретного способа регуляризации энергии и заряда солитона. Мы видели, что  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$ , полученные в результате такой регуляризации, обладают всеми свойствами, которые



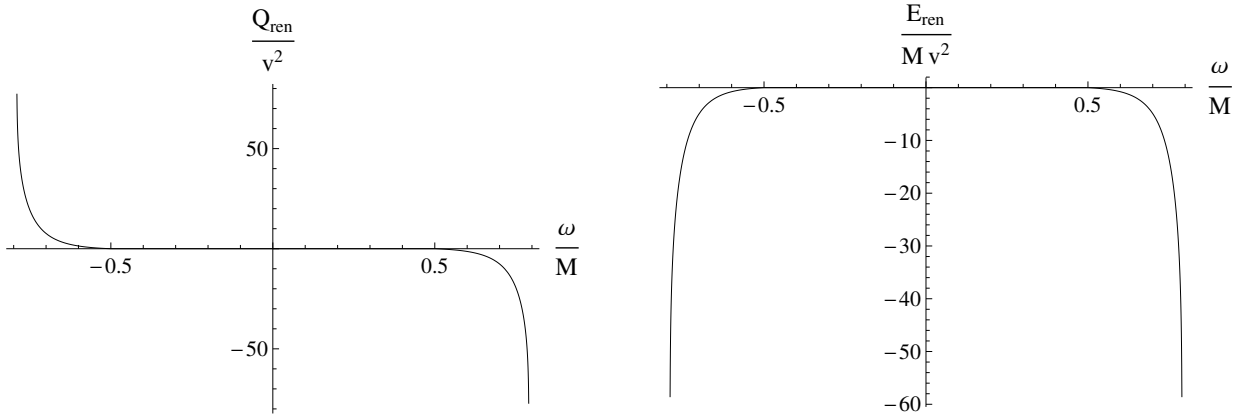


Рис. 3.7.  $Q_{ren}(\omega)$  и  $E_{ren}(\omega)$  при  $\epsilon = 0.75$  в (1+1)-мерном случае.

ожидаются от “заряда” и “энергии” решения. Можно предположить, что, в действительности, способ регуляризации не важен (коль скоро он согласован, например, с уравнениями (3.19) и (3.20)) и свойства решений одинаковы вне зависимости от его выбора. К примеру, следуя рассуждениям главы 2, можно ограничить пространственные размеры задачи параметром  $L$ , после чего все величины, относящиеся к конденсату, Q-дыркам и (в случае их наличия) Q-балджам будут конечными по построению. Относительные энергия и заряд в этом случае определяются однозначно как разности соответствующих конечных величин. В пределе  $L \rightarrow \infty$  мы возвращаемся к формулам (3.17). Таким образом величинам  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$  можно придать точный смысл. Мы заключаем, что отсутствие положительной определенности  $E_{ren}$  является не артефактом выбранной регуляризации, но неотъемлемым свойством Q-дырок в теории с потенциалом (3.21).

### 3.3.3. Q-дырки в (3+1)-мерном пространстве-времени

Анализ Q-дырок в теории с тремя пространственными измерениями аналогичен исследованию (1+1)-мерного случая. Сферически-симметричный анзац для скалярного поля записывается в виде

$$\phi(t, \mathbf{x}) = f(r)e^{i\omega t}, \quad (3.44)$$

где  $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ . Решения уравнения движения (3.8) с потенциалом (3.21) имеют вид

$$f(r) = \begin{cases} v \frac{\sinh(\sqrt{M^2 - \omega^2} r) R}{\sinh(\sqrt{M^2 - \omega^2} R) r}, & r < R, \\ v \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2} - v \left( \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2} - 1 \right) \frac{R}{r} e^{\sqrt{M^2 - \omega^2} (R-r)}, & r \geq R, \end{cases} \quad (3.45)$$

где точка сшивки параболических ветвей  $R$  задается уравнением

$$\sqrt{M^2 - \omega^2} \coth(\sqrt{M^2 - \omega^2} R) = \frac{1}{R} + \left( \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2} - 1 \right) \left( \sqrt{M^2 - \omega^2} + \frac{1}{R} \right). \quad (3.46)$$

В отличие от (1+1)-мерной задачи, уравнение на положение точки сшивки не решается аналитически. Значение  $R$  может быть найдено численно.

Действуя в точности так же, как в предыдущей секции, мы пользуемся механической аналогией для установления интервала разрешенных значений  $\omega$ . Это приводит к соотношению (3.41), где  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  даны в (3.25) и (3.39) соответственно. Заметим еще раз, что, как следует из этого неравенства, Q-дырки не существуют при  $\epsilon \geq 2$ . Несмотря на то, что уравнение (3.46) сложнее своего (1+1)-мерного аналога (3.37), ограничение (3.41) все также может быть выведено напрямую из (3.46), см. Дополнение А.

Важно заметить, что, как в (1+1)-мерном, так и в (3+1)-мерном случаях теория допускает наличие Q-шаров в определенном диапазоне частот.<sup>7</sup> Используя механическую аналогию, можно заключить, что Q-шары существуют при  $\omega$ , ограниченной в интервале

$$\omega_{\max}^2 < \omega^2 < M^2. \quad (3.47)$$

Это условие дополнительно условию (3.41). Таким образом, коль скоро  $\omega_{\max} > 0$  (то есть  $\epsilon < 1$ ), спектр классических решений теории с кусочно-параболи-

---

<sup>7</sup> Точные (3+1)-мерные решения для Q-шаров в теории с кусочно-параболическим потенциалом были найдены в работе [73].

ческим потенциалом (3.21) содержит семейство Q-шаров, две ветви конденсатных решений и семейство Q-дырок, соответствующих одной из конденсатных ветвей. Пример решения типа Q-дырки в 3+1 измерениях представлен на Рис. 3.8.

Регуляризованные заряд и энергия Q-дырки даются выражениями

$$Q_{ren} = \frac{v^2}{M^2} 8\pi\tilde{\omega} \left( \frac{\tilde{R}}{2(1-\tilde{\omega}^2)} \left( \tilde{R}^2(1-\tilde{\omega}^2) + \frac{1}{4} - \left( \tilde{f}_c + \sqrt{1-\tilde{\omega}^2} \tilde{R}(\tilde{f}_c - 1) - \frac{1}{2} \right)^2 \right) - \frac{\tilde{R}^3 \tilde{f}_c^2}{3} + \frac{\tilde{R}^2 (\tilde{f}_c - 1)^2}{2\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}} - 2\tilde{f}_c(\tilde{f}_c - 1) \left( \frac{\tilde{R}^2}{\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}} + \frac{\tilde{R}}{1-\tilde{\omega}^2} \right) \right), \quad (3.48)$$

$$E_{ren} = \frac{v^2}{M} 8\pi \left( \frac{(4\tilde{\omega}^2 - 1)\tilde{R}}{6(1-\tilde{\omega}^2)} \left( \tilde{R}^2(1-\tilde{\omega}^2) + \frac{1}{4} - \left( \tilde{f}_c + \sqrt{1-\tilde{\omega}^2} \tilde{R}(\tilde{f}_c - 1) - \frac{1}{2} \right)^2 \right) - \frac{\tilde{\omega}^2 \tilde{R}^3 \tilde{f}_c^2}{3} + \frac{(4\tilde{\omega}^2 - 1)\tilde{R}^2 (\tilde{f}_c - 1)^2}{6\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}} - \frac{(7\tilde{\omega}^2 - 1)\tilde{f}_c(\tilde{f}_c - 1)}{3} \left( \frac{\tilde{R}^2}{\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}} + \frac{\tilde{R}}{1-\tilde{\omega}^2} \right) \right), \quad (3.49)$$

где введены обозначения

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{M}, \quad \tilde{R} = MR, \quad \tilde{f}_c = \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2}. \quad (3.50)$$

Ниже представлены некоторые свойства  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$ , следующие из уравнений (3.48) и (3.49).

1.  $|Q_{ren}| \rightarrow \infty$  и  $|E_{ren}| \rightarrow \infty$  при  $|\omega| \rightarrow \omega_{\max}$ . Действительно, в этом случае  $R \rightarrow \infty$ , тогда как  $f(r)$  стремится к вакуумному значению  $f \equiv 0$  при  $r < R$ . Решение описывается тонкостенным приближением, как и в случае 1+1 измерений.

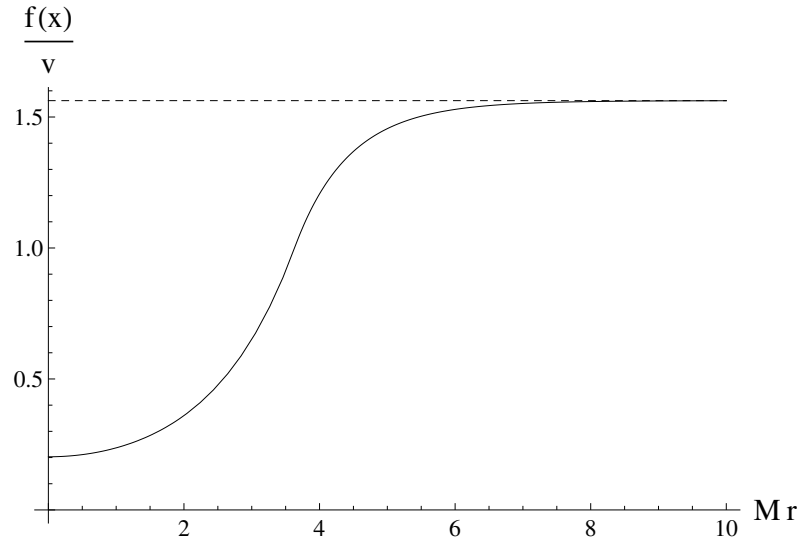


Рис. 3.8. Решение типа Q-дырки в (3+1)-мерном пространстве-времени. Здесь мы положили  $\epsilon = 1.5$ ,  $\omega = 0.2M$ . Пунктирная линия соответствует скалярному конденсату с амплитудой  $f_c$ .

2. При  $\omega = 0$  (что возможно при  $\epsilon > 1$ ), мы имеем  $Q_{ren} = 0$  и  $E_{ren} > 0$  вследствие (3.19), что снова аналогично (1+1)-мерному случаю. Это ожидаемый результат для статического решения, которое может быть отождествлено со сфалероном.
3. При  $\omega = M\sqrt{1 - \epsilon}$  и  $\epsilon < 1$ , мы имеем  $Q_{ren} = 0$  и  $E_{ren} = 0$ . В самом деле, в этом случае  $R = 0$  и солитон вырождается в конденсат с  $f(r) \equiv f_c = v$ .

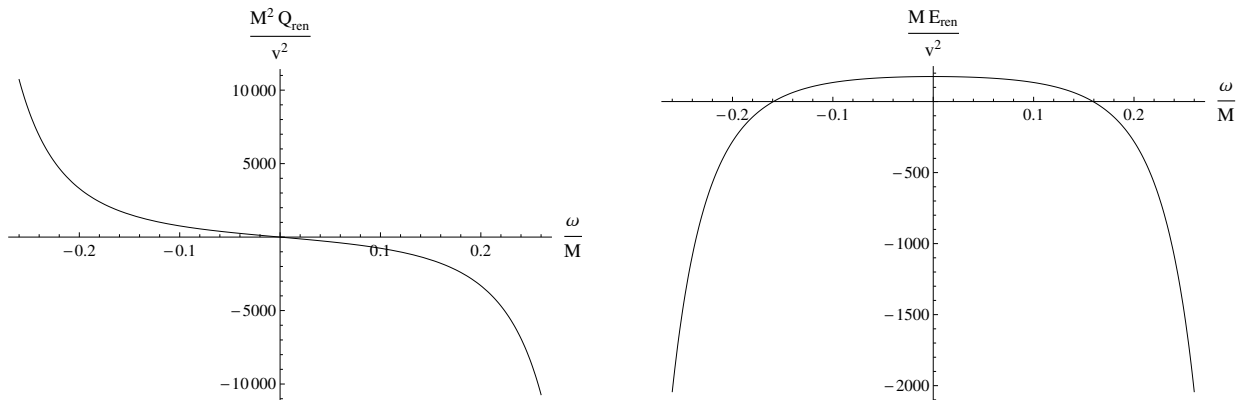


Рис. 3.9.  $Q_{ren}(\omega)$  и  $E_{ren}(\omega)$  при  $\epsilon = 1.7$  в (3 + 1)-мерном случае.

Некоторые характерные примеры зависимостей  $Q_{ren}(\omega)$  и  $E_{ren}(\omega)$  показаны на Рис. 3.9–3.11. Мы видим опять, что  $E_{ren}$  может быть положительной,

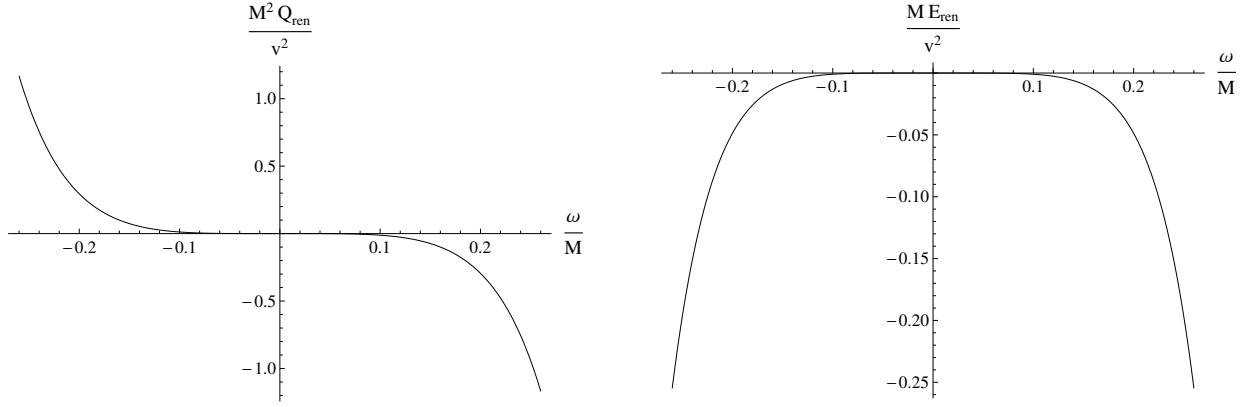


Рис. 3.10.  $Q_{ren}(\omega)$  и  $E_{ren}(\omega)$  при  $\epsilon = 1$  в  $(3 + 1)$ -мерном случае.

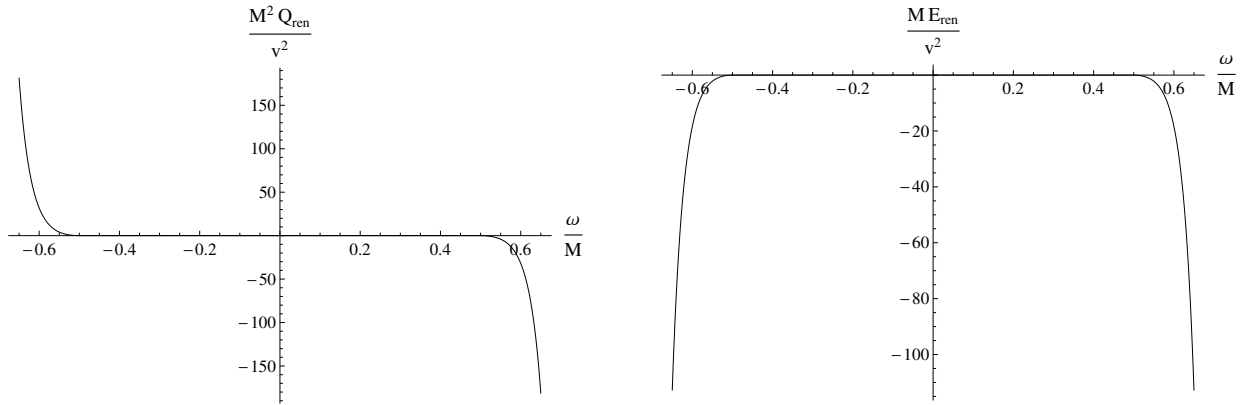


Рис. 3.11.  $Q_{ren}(\omega)$  и  $E_{ren}(\omega)$  при  $\epsilon = 0.75$  в  $(3 + 1)$ -мерном случае.

отрицательной или равной 0. Тот факт, что при некоторых частотах относительная энергия солитона отрицательна, ставит естественный вопрос о возможности их спонтанного образования из окружающего конденсата. Мы коснемся вкратце этого вопроса при обсуждении классической устойчивости Q-дырок и Q-балджей в секции 3.5.<sup>8</sup> Как и в  $(1+1)$ -мерном случае, можно убедиться численно, что соотношение (3.20) выполняется для  $Q_{ren}$  и  $E_{ren}$ , заданных формулами (3.48) и (3.49) соответственно.

<sup>8</sup> Малые возмущения конденсата, на фоне которого существуют изучаемые нами солитоны, не являются плоскими волнами, см. секцию 3.3.1. В силу этого, вопрос о том, какие возмущения уносят избыточные энергию и заряд при образовании Q-дырки, предстает весьма непростым.

## 3.4. Дальнейшие примеры: Q-шары и Q-дырки в теории с полиномиальным потенциалом

### 3.4.1. Потенциал и существование решений

В этой секции мы изучим классические решения, возникающие в теории с полиномиальным потенциалом. Из механической аналогии очевидно, что для существования Q-шаров старшая степень потенциала должна быть не ниже 6-й [21]. Это же условие справедливо и для Q-дырок. Что касается Q-балджей, то для их наличия требуются более высокие степени  $|\phi|$ .

Q-шары, возникающие в модели с потенциалом 6-й степени в 1+1 измерениях, были исследованы аналитическими методами в работе [99]. Для полноты картины здесь мы кратко рассмотрим их основные свойства. Мы затем обсудим скалярный конденсат и Q-дырки, свойства которых окажутся во многом идентичны свойствам солитонов в модели с кусочно-параболическим потенциалом. Существенное отличие, однако, состоит в том, что регуляризованная энергия  $E_{ren}$  Q-дырок в полиномиальном потенциале оказывается всюду неотрицательной.

Следуя [99], запишем потенциал в виде

$$V(|\phi|) = M^2|\phi|^2 - \frac{1}{2}\mu^2|\phi|^4 + \frac{1}{3}\lambda|\phi|^6, \quad (3.51)$$

где  $\lambda > 0$ . Как и в предыдущей секции, будем использовать механическую аналогию для установления областей параметров, в которых существуют различные классические решения (если решение известно аналитически, ограничения на параметры можно вывести напрямую из его вида). Изучая движение частицы в эффективном потенциале (3.9), легко получить интервал допустимых значений частоты  $\omega$  для Q-шаров

$$\omega_{\max} < \omega < M, \quad (3.52)$$

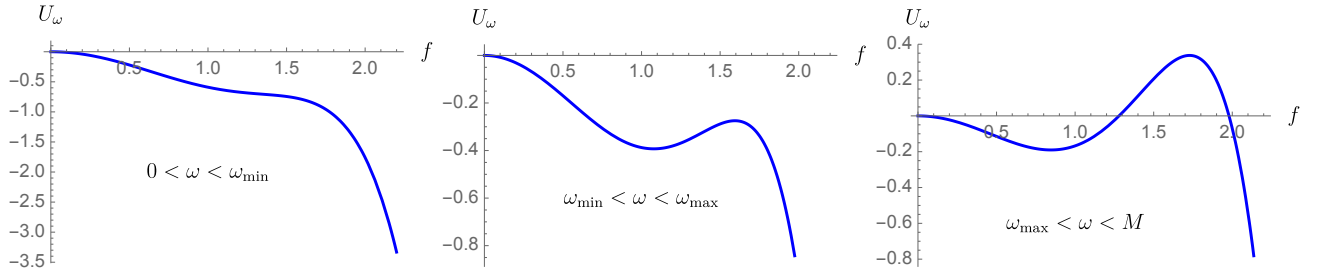


Рис. 3.12. Эффективный потенциал (3.9), соответствующий потенциалу (3.51), при различных значениях  $\omega$ . Параметры теории:  $\mu = M$ ,  $\lambda = 0.27M^2$ .

где

$$\omega_{\max} = \max \left( 0, M \sqrt{1 - \frac{3\mu^4}{16\lambda M^2}} \right). \quad (3.53)$$

Неравенство (3.52) аналогично (3.47). Правая его часть следует из условия  $U''_{\omega}(0) > 0$ , в то время как левая — из требования, чтобы второй максимум эффективного потенциала находился выше локального максимума при  $f = 0$ . Для Q-дырок  $\omega$  принимает значения в диапазоне

$$\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}, \quad (3.54)$$

где

$$\omega_{\min} = \max \left( 0, M \sqrt{1 - \frac{\mu^4}{4\lambda M^2}} \right). \quad (3.55)$$

Как и в случае кусочно-параболического потенциала, это условие дополнительно неравенству (3.52). На Рис. 3.12 представлены графики эффективного потенциала  $U_{\omega}$  при различных значениях частоты. Для иллюстрации мы выбрали параметры потенциала таким образом, что обе граничные частоты,  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$ , положительны.

### 3.4.2. Q-шары

Рассмотрим вкратце свойства Q-шаров, возникающих в теории с потенциалом (3.51). На Рис. 3.13 представлены характерные профили этих солитонов при различных значениях частоты. Отметим, что в случае  $\omega_{\max} > 0$ , в пределе

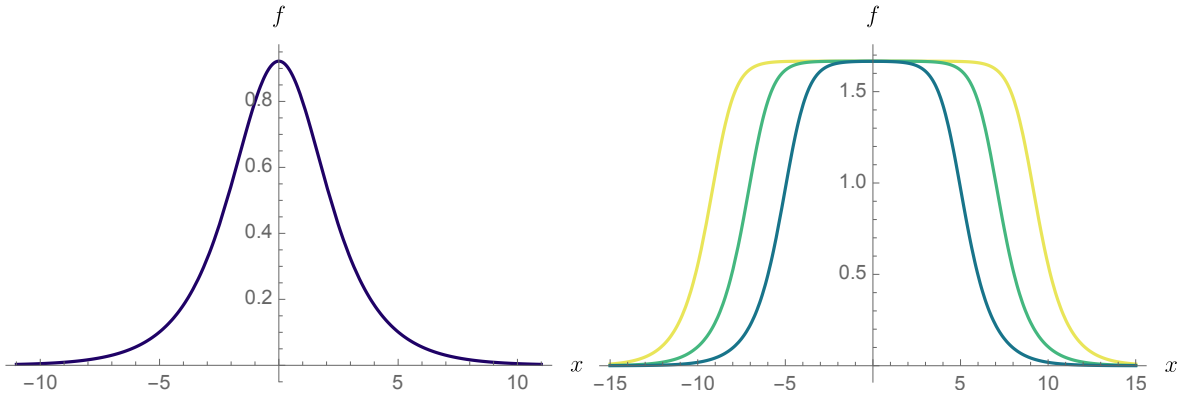


Рис. 3.13. Q-шары в теории с потенциалом (3.51) в 1+1 измерениях. Параметры теории:  $\mu = M$ ,  $\lambda = 0.27M^2$ . На левом графике показано решение с  $\omega = 0.8M$ . На правом графике показаны решения с  $(\omega - \omega_{\max})/M = 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$ . Видно, что эти решения можно исследовать в рамках тонкостенного приближения.

$\omega \rightarrow \omega_{\max}$  решение хорошо описывается в рамках тонкостенного приближения. “Стенка” (область, где амплитуда поля быстро меняется) разделяет области, в которых поле принимает значения, соответствующие (локальным) максимумам эффективного потенциала (в главе 4 мы обсудим в деталях тонкостенное приближение для Q-шаров в полиномиальном потенциале в 3+1 измерениях). Если же  $\omega_{\max} = 0$ , то решения типа тонкой стенки отсутствуют; вместо них имеется статическая конфигурация с конечной энергией и нулевым зарядом.

Энергия и заряд Q-шара даются стандартными выражениями (3.15). Рис. 3.14 демонстрирует параметрические зависимости  $E$  от  $Q$  (параметром является частота  $\omega$ ) в случаях  $\omega_{\max} = 0$  и  $\omega_{\max} > 0$ . Отметим, что в первом случае энергия и заряд решения ограничены сверху, и на графике  $E(Q)$  имеется “правый касп”, в противоположность ситуации с кусочно-параболическим потенциалом, для которого характерен “левый касп”. Можно также видеть, что в пределе  $\omega \rightarrow M$  Q-шар вырождается в классический вакуум с  $f = 0$ . Нам будет интересен случай  $\omega_{\max} > 0$ , в котором помимо Q-шаров в теории также имеются Q-дырки.



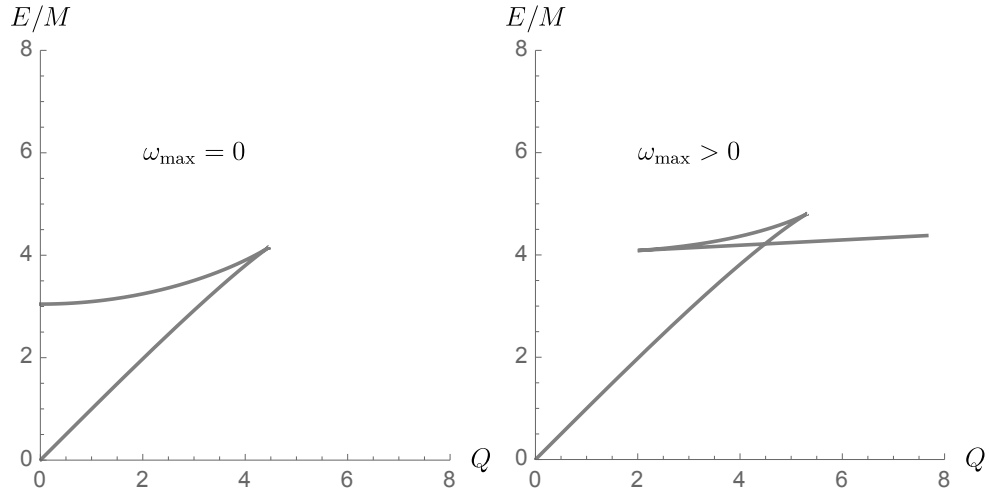


Рис. 3.14. Параметрические зависимости энергии и заряда  $Q$ -шара от частоты в теории с потенциалом (3.51) в 1+1 измерениях. Параметры теории:  $\mu = M$  и  $\lambda = 0.1M^2$  (слева),  $\lambda = 0.188M^2$  (справа).

### 3.4.3. Конденсат

Потенциал (3.51) допускает наличие двух семейств однородных решений вида (3.22). При  $\omega_{\min} < \omega < M$  оба семейства решений сосуществуют, их амплитуды равны

$$f_{c1,2} = \sqrt{\frac{\mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - 4\lambda(1 - \omega^2)}}{2\lambda}}. \quad (3.56)$$

Согласно условию классической стабильности конденсата (2.7), решение с меньшей амплитудой неустойчиво, решение с большей амплитудой — устойчиво (это можно проверить и непосредственным вычислением). Важно отметить, что решения типа  $Q$ -дырок существуют на фоне классически устойчивого конденсата. При  $\omega > M$  в теории имеется одно семейство однородных решений, которые также являются устойчивыми.

### 3.4.4. $Q$ -дырки

Рассмотрим теперь решения типа  $Q$ -дырок. Характерные профили этих решений показаны на Рис. 3.15 для различных значений параметров теории. Мы видим, что в пределе  $\omega \rightarrow \omega_{\max}$  для  $Q$ -дырок справедливо тонкостенное

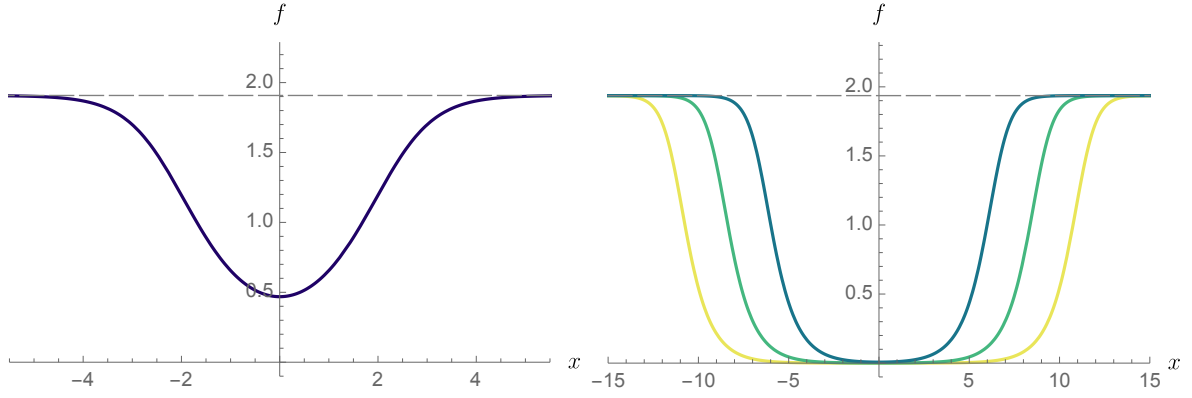


Рис. 3.15. Q-дырки в теории с потенциалом (3.51) в 1+1 измерениях. Параметры теории:  $\mu = M$ ,  $\lambda = 0.2M^2$ . На левом графике показано решение с  $\omega = 0.1M$ . На правом графике показаны решения с  $(\omega_{\max} - \omega)/M = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ . Пунктирная линия означает конденсат, на фоне которого существует солитон.

приближение. Из вида эффективного потенциала следует, что если  $\omega_{\min} = 0$ , то существует статическое решение с нулевым зарядом и положительной регуляризованной энергией. Если же  $\omega_{\min} > 0$ , то в пределе  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$  решение вырождается в конденсат с частотой  $\omega_{\min}$  и амплитудой  $f_c = \mu/\sqrt{2\lambda}$ ; следовательно, в этом пределе  $E_{ren} \rightarrow 0$ ,  $Q_{ren} \rightarrow 0$ .

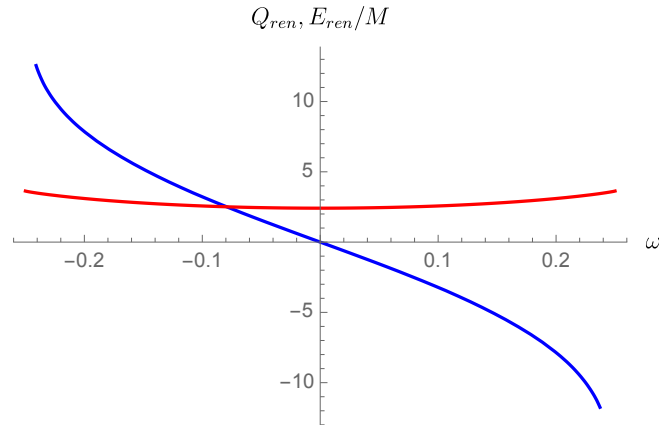


Рис. 3.16. Зависимости регуляризованных энергии (красная линия) и заряда (синяя линия) Q-дырки от частоты в теории с потенциалом (3.51) в 1+1 измерениях. Параметры теории:  $\mu = M$  и  $\lambda = 0.12M^2$ .

Зависимости регуляризованных энергии и заряда от  $\omega$  представлены на Рис. 3.16 и 3.17. Они подтверждают проведенные выше рассуждения. Заметим, что  $E_{ren}$  неотрицательна при всех допустимых значениях частоты. Это важ-

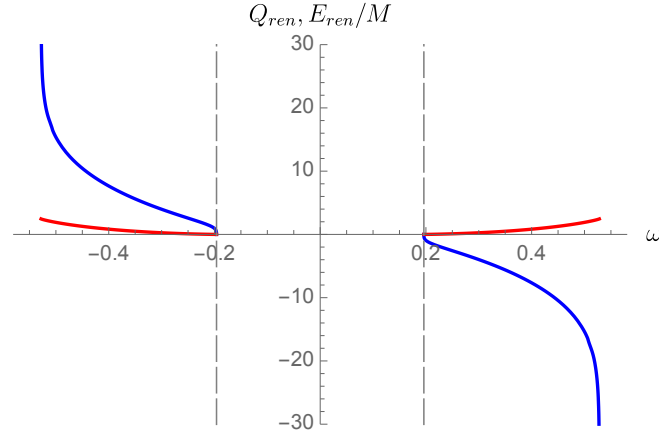


Рис. 3.17. Зависимости регуляризованных энергии (красная линия) и заряда (синяя линия) Q-дырки от частоты в теории с потенциалом (3.51) в 1+1 измерениях. Параметры теории:  $\mu = M$  и  $\lambda = 0.26M^2$ . Пунктиром обозначены значения  $|\omega| = \omega_{\min} = 0.2M$ .

ное отличие Q-дырок в теории с полиномиальным потенциалом от Q-дырок в кусочно-параболическом потенциале, изученных в предыдущей секции.

### 3.5. Классическая (не)устойчивость Q-дырок и Q-балджей

Нетрудно понять, что метод, использующийся для установления условия классической устойчивости Q-шаров  $\partial^2 E / \partial Q^2 < 0$  (так же как и схожий подход, примененный в [70] для исследования устойчивости решений нелинейного уравнения Шредингера), не может быть очевидным образом обобщен на случай Q-дырок и Q-балджей. В самом деле, в отличие от Q-шаров, асимптотики которых при  $r \rightarrow \infty$  одинаковы для любого значения  $\omega$ , асимптотическое поведение Q-дырок и Q-балджей различно при различных  $\omega$ . Более того, как уже отмечалось, их полные энергия и заряд бесконечны в бесконечном пространстве. Несмотря на эти сложности, можно представить некоторые аргументы в пользу классической неустойчивости этих солитонов, что мы и сделаем в данной секции.

Как отмечалось в секции 3.3, можно ограничить пространственные раз-

меры задачи и рассматривать  $Q_{ren}$  как разницу  $Q - Q_c$  между конечными зарядом солитона и зарядом конденсата, вычисленными в ограниченном объеме. Для постановки задачи в конечном объеме требуется наложить граничные условия на поля. К примеру, в 1+1 измерениях можно требовать периодические граничные условия,  $f(-L/2) = f(L/2)$  и  $\frac{df}{dx}|_{x=-L/2} = \frac{df}{dx}|_{x=L/2} = 0$ , где  $L$  — длина промежутка, на котором изучаются решения. Эти решения легко получить аналитически в теории с потенциалом (3.21) (см. главу 2, где это было проделано для Q-шаров в кусочно-параболическом потенциале). Также не составляет труда проверить, что решения являются монотонными функциями и стремятся к (3.36) при  $L \rightarrow \infty$ . Следовательно, можно ожидать, что, коль скоро характерный размер солитона  $l$  много меньше размера компактификации  $L$ , значение  $Q_{ren}$  лежит близко к соответствующему значению в пределе  $L \rightarrow \infty$ . Так как  $Q_{ren}/Q \ll 1$  при  $l \ll L$ , для таких решений  $Q \approx Q_c$ .

Так как в задаче с конечной границей  $Q$  также конечно, у нас нет препятствий для применения условия устойчивости [11, 71]. Выбирая размер  $L$  достаточно большим, мы имеем

$$\frac{dQ}{d\omega} \approx \frac{dQ_c}{d\omega} . \quad (3.57)$$

Видно, что знак  $dQ/d\omega$ , определяющий (не)устойчивость решения, следует из знака  $dQ_c/d\omega$ . Выясним теперь, каков знак  $dQ_c/d\omega$ .

Нас будет интересовать случай классически стабильного конденсата (такого как, например, (3.31)), для которого выполняется условие (2.7):

$$\frac{d^2V}{df^2} \Big|_{f=f_c} - \frac{1}{f_c} \frac{dV}{df} \Big|_{f=f_c} \geq 0 . \quad (3.58)$$

Заряд конденсата дается выражением

$$Q_c = 2\omega f_c^2 V^{(d)} , \quad (3.59)$$

где  $V^{(d)} \sim L^d$  — объем пространства. Таким образом,

$$\frac{dQ_c}{d\omega} = 2V^{(d)} \left( f_c^2 + 2\omega f_c \frac{df_c}{d\omega} \right) . \quad (3.60)$$

Дифференцируя уравнение (3.10) по  $\omega$ , используя (3.9) и домножая результат на  $df_c/d\omega$ , мы получаем

$$2\omega f_c \frac{df_c}{d\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2V}{df^2} \Big|_{f=f_c} - \frac{1}{f_c} \frac{dV}{df} \Big|_{f=f_c} \right) \left( \frac{df_c}{d\omega} \right)^2. \quad (3.61)$$

Подстановка (3.61) в (3.60) дает

$$\frac{dQ_c}{d\omega} = 2V^{(d)} \left( f_c^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2V}{df^2} \Big|_{f=f_c} - \frac{1}{f_c} \frac{dV}{df} \Big|_{f=f_c} \right) \left( \frac{df_c}{d\omega} \right)^2 \right). \quad (3.62)$$

Мы видим, что при выполнении условия стабильности конденсата (3.58) выполняется также соотношение (для (3.28) это можно проверить явно)

$$\frac{dQ_c}{d\omega} > 0. \quad (3.63)$$

Таким образом, неоднородные решения, для которых выполняется (3.57), неустойчивы.<sup>9</sup> В частности, в спектре возмущений решения типа Q-дырки или Q-балджа имеется мода вида  $\varphi(\mathbf{x})e^{i\omega t}e^{\gamma t}$ , где  $\gamma > 0$  — вещественная константа. Можно предположить далее, что Q-дырки и Q-балджи остаются неустойчивыми и в пределе  $V^{(d)} \rightarrow \infty$ .

Здесь следует сделать важное замечание. Неравенство  $dQ_c/d\omega > 0$  выполняется для классически *стабильного* конденсата, что, в силу критерия устойчивости для солитонов  $dQ/d\omega < 0$ , может показаться контр-интуитивным. Однако, здесь нет противоречия, так как метод установления данного критерия, использующийся в [11, 71], основан на существовании отрицательного собственного значения определенного оператора (говоря точнее, это оператор  $h_R$ , задаваемый уравнением (3.39) в [11]), который возникает при рассмотрении возмущений над Q-шаром. Можно убедиться, что для скалярного конденсата, удовлетворяющего (3.58), этот оператор не может иметь отрицательных собственных значений. Таким образом, критерий Вахитова-Колоколова неприменим к пространственно-однородным решениям.

<sup>9</sup> Так как  $\frac{1}{V^{(d)}} \frac{dQ_c}{d\omega} \geq 2f_c^2 > 0$  для стабильного конденсата (см. (3.62)), для любого конечного  $\frac{dQ_{ren}}{d\omega}$  можно подобрать большой пространственный объем  $V^{(d)}$ , такой что  $\frac{dQ}{d\omega} > 0$ .

Вывод о классической неустойчивости Q-дырок и Q-балджей также согласуется с результатами аналитического анализа, проведенного в секции 3.3. В самом деле, мы видели, что при определенных значениях параметров теории существуют статические решения с  $E_{ren} \neq 0$ , которые могут быть отождествлены со сфалеронами. Между тем, последние всегда классически неустойчивы [51, 100]. Следовательно, можно ожидать, что по крайней мере решения с  $\omega$  близкими к 0 также неустойчивы.

Классическая неустойчивость Q-дырок и Q-балджей интересна с точки зрения феноменологии. В частности, этот результат может найти применение при исследовании фрагментации конденсата. К примеру, в теории с потенциалом (3.21) существуют как стабильные Q-шары [73], так и стабильный конденсат. Можно поэтому предположить, что Q-дырки и Q-балджи являются промежуточным состоянием в процессе распада конденсата. В этом случае они могут формироваться в результате взаимодействия конденсата с другими частицами.

Аналитическое исследование устойчивости Q-дырок и Q-балджей затруднено тем фактом, что потенциал (3.21), в отличие от кусочно-параболического потенциала, введенного в [73], содержит член вида  $\propto \sqrt{\phi^*\phi}$ . Тем не менее, остается возможность для численного изучения стабильности в этой и других теориях. Численный анализ может также прояснить вопрос о роли Q-дырок и Q-балджей во фрагментации скалярного конденсата в Q-шары.

### 3.6. Заключение к главе

В этой главе мы описали два класса локализованных решений, возникающих в теориях комплексного скалярного поля с глобальной  $U(1)$ -симметрией и представляющих собой нелинейные разрежения и сгущения в пространственно-однородном стационарном заряженном скалярном конденсате. Важное свой-

ство этих решений состоит в том, что они могут быть деформированы в окружающий конденсат с конечными затратами энергии. Это свойство отличает их от решений типа “комплексного кинка”, асимптотики которого на бесконечности соответствуют топологически разным состояниям. Можно ожидать, что неоднородности этого типа являются важным элементом нелинейной динамики конденсата в ранней Вселенной, в частности, его фрагментации в Q-шары.

Мы провели аналитический анализ Q-дырок в теории с потенциалом кучечно-параболического типа и нашли численное решение в теории с полиномиальным потенциалом. Было показано, что энергия Q-дырки относительно окружающего ее конденсата может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

В данной главе мы не обсуждали вопрос о квантовой стабильности Q-дырок и Q-балджей. Можно ожидать, что, если новые частицы взаимодействуют с полем солитона через квадратичную комбинацию полей  $\phi^*\phi$ , которая не зависит от времени, то солитон с  $E_{ren} > 0$  распадается в эти частицы. Можно также предположить, что Q-дырки и Q-балджи могут образовываться спонтанно в процессах с участием этих частиц.

Однако, исследование возмущений непосредственно скалярного поля  $\phi$  над конденсатом не является простой задачей. Для обычных Q-шаров можно определить вакуум стандартным образом вдали от центра солитона и применить стандартную процедуру квантования для возмущений над этим вакуумом. Для зависящего же от времени скалярного конденсата возмущения над фоновым решением имеют нетривиальные дисперсионные соотношения, такие как, например, (3.33). Более того, легко убедиться, что заряд таких возмущений относительно конденсата также имеет нестандартный вид. Это делает обычный метод квантования неприменимым к таким возмущениям. Было бы интересно исследовать, что можно принять в качестве “частиц”, когда речь идет о флуктуациях вида (3.32) над времене-зависимым фоновым решением.

## Глава 4

# Вибрационные моды Q-шаров: аналитический анализ

## 4.1. Введение к главе

Изучение линейных флуктуаций над компактными объектами является общей задачей, которая может представлять интерес с точки зрения феноменологии. Недавние примеры включают исследование квазинормальных мод черных дыр, которые играют значительную роль при анализе гравитационно-волновых сигналов [101, 102]. Возмущения над телами, состоящими из обычной барионной материи, сильно зависят от внутренней физики (уравнения состояния и т.д.). Кроме того, наличие диссипации обычно оставляет возможность исключительно для численного анализа задачи в реалистичных моделях.

Для избежания проблем, связанных с диссипацией, можно ограничиться изучением замкнутых систем, динамика которых формулируется в терминах лагранжиана. Например, нерелятивистская физика предоставляет интересную возможность для исследования неоднородного конденсата Бозе-Эйнштейна, см., например, обзор [103]. Замечательно, что возбуждения в таком конденсате могут изучаться как теоретически, так и экспериментально в приближении разреженного газа. Релятивистские теории комплексного скалярного поля также могут содержать компактные объекты, анализ которых проводится в квазиклассическом приближении.

Примеры локализованных стационарных конфигураций с динамической гравитацией включают различные типы бозонных звезд (их свойства обсуждаются, к примеру, в обзорных работах [35, 36]) и другие похожие объекты, например, аксионные миникластеры [104]. В недавнее время анализ связан-



ных состояний бозонных звезд проводился в [105]. Несмотря на несомненную важность с точки зрения феноменологии, аналитическое исследование возмущений бозонных звезд затруднено из-за наличия гравитации. Объектами, более подходящими для точного анализа, являются (солитонные) бозонные звезды в пределе плоского пространства-времени. В этом пределе они представляют собой обычные Q-шары, возникающие в теориях комплексного скалярного поля с глобальной  $U(1)$ -симметрией и с потенциалом специального типа.

Мы начнем данную главу с обсуждения условий применимости квазиклассического описания солитонов (секция 4.2). Далее, в секции 4.3 мы изучим линейные возмущения Q-шаров в теории с кусочно-параболическим потенциалом с плоским направлением. В этой теории возмущения могут быть найдены аналитически при всех частотах фонового решения. В секции 4.4 мы рассмотрим возмущения над Q-шарами в полиномиальном потенциале и в тонкостенном приближении. Это рассмотрение в некотором смысле дополняет анализ теории с плоским потенциалом, в которой тонкостенное приближение неприменимо.

## 4.2. Квазиклассическое приближение

Рассмотрим  $U(1)$ -инвариантную теорию комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - V(|\phi|) . \quad (4.1)$$

Скалярный потенциал  $V(|\phi|)$  предполагается гладкой функцией  $|\phi|^2$  с абсолютным минимумом в точке  $|\phi| = 0$ , в которой без ограничения общности можно положить  $V(0) = 0$ . Для того чтобы квазиклассическое описание солитонов было справедливым [11], потенциал должен быть представим в виде

$$V(|\phi|) = \frac{1}{g^2} U(g|\phi|) , \quad (4.2)$$

где  $g$  — малая безразмерная константа связи. В этом случае после подходящего переобозначения полей действие теории становится пропорционально большо-

му фактору  $g^{-2}$ , что и обосновывает применимость квазиклассики. Вид потенциала (4.2) характерен для (1+1)-мерной теории, в которой поле  $\phi$  безразмерно. В случае трех пространственных измерений предположим, что релевантный масштаб теории задается массой  $m$  частиц на фоне вакуумного решения  $\phi = 0$ . Тогда уравнение (4.2) переписывается как

$$V(|\phi|) = \frac{m^4}{g^2} U(g|\phi|/m) . \quad (4.3)$$

В данной главе мы будем рассматривать два потенциала, которые приводят к существенно разному виду классически устойчивых Q-шаров. Одним из них является кусочно-параболический потенциал [20], уже изучавшийся в предыдущих главах. Запишем его в следующем виде

$$V(|\phi|) = m^2 |\phi|^2 \theta \left( 1 - \frac{|\phi|^2}{v^2} \right) + m^2 v^2 \theta \left( \frac{|\phi|^2}{v^2} - 1 \right) . \quad (4.4)$$

Напомним, что как классические решения, так и возмущения над ними можно исследовать аналитически в этом потенциале [77]. Уравнение (4.4) приводится к виду (4.3), где  $g = m/v$  и

$$U(x) = x^2 \theta(1 - x^2) + \theta(x^2 - 1) . \quad (4.5)$$

Потенциал (4.4) используется в качестве приближения к реалистичным моделям с плоскими направлениями, которые нашли применение, к примеру, при описании темной материи Q-шарами [28]. Как обсуждалось в главе 2, гладкость потенциала может быть восстановлена подходящей регуляризацией функций Хевисайда,

$$U(x) \rightarrow U_\alpha(x) , \quad (4.6)$$

где предполагается, что параметр регуляризации  $\alpha$  не слишком большой и

$$g \ll \alpha . \quad (4.7)$$

Другой класс теорий, содержащих нетопологические солитоны, имеет потенциал полиномиального вида. Как было показано в [21], для существования

Q-шаров в теории одного скалярного поля в 3+1 измерениях, потенциал обязан содержать неперенормируемые члены с самодействием. При этом достаточно ограничиться членом 6-й степени  $\propto |\phi|^6$ . В работе [106] было проведено детальное исследование Q-шаров в полиномиальном потенциале 6-й степени. В целях удобства можно положить  $m = g = 1$  путем подходящего переопределения переменных. Конечно, это не означает, что теория находится в режиме сильной связи, и общий множитель  $g^{-2}$  перед действием должен подразумеваться.

Выпишем снова анзац для сферически-симметричного Q-шара в 3+1 измерениях,

$$\phi_0(\mathbf{x}, t) = f(r)e^{i\omega t}, \quad (4.8)$$

и выражение для сохраняющегося  $U(1)$ -заряда,

$$Q = -i \int d^3x (\phi_0^* \dot{\phi}_0 - \phi_0 \dot{\phi}_0^*) = 8\pi\omega \int dr r^2 f^2(r). \quad (4.9)$$

Мы будем рассматривать случай положительного заряда, так что  $\omega > 0$ . Напомним, что сохранение заряда не означает устойчивость для нетопологических солитонов. Последние разбиваются на два семейства, одно из которых содержит классически устойчивые Q-шары, а другое — неустойчивые Q-клауды [57]. Кроме того, классические устойчивые Q-шары могут быть метастабильными в определенном диапазоне параметров [31].

Мы будем изучать малые возмущения над решением,

$$\phi = \phi_0 + \chi, \quad \chi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t)e^{i\omega t}, \quad (4.10)$$

где фазовый множитель Q-шара выделен для того, чтобы избежать явной зависимости от времени линеаризованных уравнений движения. Последние имеют вид

$$\begin{aligned} (\partial_0 + i\omega)^2 \psi - \Delta\psi &= -h(r)\psi^* - g(r)\psi, \\ (\partial_0 - i\omega)^2 \psi^* - \Delta\psi^* &= -h(r)\psi - g(r)\psi^*, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} h(r) &= \left( z \frac{d^2 V}{dz^2} \right) \Big|_{z=f^2(r)}, \\ g(r) &= \left( z \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{dV}{dz} \right) \Big|_{z=f^2(r)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

и мы обозначили  $z = |\phi|^2$ . Заметим, что в общем случае уравнения на  $\psi$  и его комплексно сопряженное не разделяются. Уравнения (4.11) не являются задачей на собственные значения эрмитова оператора, и при исследовании связанных состояний над Q-шаром аналогия с уравнением Шредингера, строго говоря, неприменима. В примерах ниже мы будем использовать специальный вид потенциала (в случае (4.4)) или специальный режим теории (в случае полиномиального потенциала), чтобы преодолеть это затруднение.

### 4.3. Возмущения в кусочно-параболическом потенциале

В этой секции будут рассмотрены возмущения над Q-шарами в трех пространственных измерениях в теории с кусочно-параболическим потенциалом с плоским направлением. В этом потенциале функции  $h$ ,  $g$ , определенные согласно (4.12), имеют вид

$$\begin{aligned} h(r) &= -\frac{m^2}{2} \delta \left( \frac{f(r)}{v} - 1 \right) \\ g(r) &= m^2 \theta \left( 1 - \frac{f^2(r)}{v^2} \right) + h(r). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Мы будем интересоваться главным образом дискретным спектром мод над классически устойчивыми решениями, которые существуют при  $\omega < \omega_c$ , где  $\omega_c$  — критическая частота, соответствующая “каспу” (см. подробности в главе 2). Мы будем в дальнейшем называть их вибрационными или осцилляционными модами. Для полноты картины, распадная мода, существующая для решений с  $\omega > \omega_c$ , также будет рассмотрена. Как мы увидим, аналитическое

продолжение распадной моды в классически устойчивую область дает выделенную вибрационную моду, которая имеется в спектре Q-шаров с частотами, близкими к критической.

Из уравнений (4.13) видно, что масса  $m$  частицы является релевантным размерным параметром теории. По этой причине, в данной секции мы нормируем физические величины на эту массу, полагая  $m = 1$ . Прямое вычисление показывает, что  $\omega_c \approx 0.960$ .

### 4.3.1. Вибрационные моды

Анзац, описывающий динамику малых возмущений над классически устойчивым Q-шаром, имеет вид [32]<sup>1</sup>

$$\psi(\mathbf{x}, t) = (\psi_1^{(l)}(r)e^{i\gamma t} + \psi_2^{(l)}(r)e^{-i\gamma t})Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (4.14)$$

где  $\gamma > 0$  и  $\psi_1, \psi_2$  являются вещественными функциями радиальной координаты. Подставляя (4.14) в уравнение (4.11) и приравнивая члены с равными фазовыми факторами, получаем

$$\begin{aligned} \left( \Delta_r - \frac{l(l+1)}{r^2} + (\omega + \gamma)^2 - g(r) \right) \psi_1^{(l)}(r) - h(r)\psi_2^{(l)*}(r) &= 0, \\ \left( \Delta_r - \frac{l(l+1)}{r^2} + (\omega - \gamma)^2 - g(r) \right) \psi_2^{(l)}(r) - h(r)\psi_1^{(l)*}(r) &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Уравнения для возмущений дополняются граничными условиями

$$\psi_{1,2}^{(l)}(\infty) = 0, \quad \left. \frac{d\psi_{1,2}^{(l)}}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (4.16)$$

Для того чтобы решение уравнений (4.15) удовлетворяло граничным условиям (4.16) (т.е., для получения дискретного спектра), необходимо также потребовать

$$\omega + \gamma < 1. \quad (4.17)$$

---

<sup>1</sup> Заметим, что этот анзац не позволяет учесть все возможные возмущения. Например, им не описываются  $U(1)$ -моды, если только  $\gamma$  не равно 0.

Уравнения (4.15) решаются точно в диапазонах амплитуды Q-шара  $f(r) > v$  и  $f(r) < v$  (соответственно,  $r < R$  и  $r > R$ ). Решение имеет вид

$$\psi_1^{(l)}(r) = \begin{cases} A \frac{J_{l+1/2}(\omega_+ r)}{\sqrt{r}}, & r < R \\ B \frac{K_{l+1/2}(\lambda_+ r)}{\sqrt{r}}, & r > R \end{cases} \quad (4.18)$$

и

$$\psi_2^{(l)}(r) = \begin{cases} C \frac{J_{l+1/2}(\omega_- r)}{\sqrt{r}}, & r < R \\ D \frac{K_{l+1/2}(\lambda_- r)}{\sqrt{r}}, & r > R \end{cases} \quad (4.19)$$

где  $J_{l+1/2}$  ( $K_{l+1/2}$ ) — (модифицированная) функция Бесселя первого (второго) рода порядка  $l + 1/2$ ,  $l$  — целое число, и мы обозначили

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \omega \pm \gamma, \\ \lambda_{\pm} &= \sqrt{1 - (\omega \pm \gamma)^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Решения (4.18) и (4.19) необходимо гладко сшить в точке  $r = R$ , равной

$$R = \frac{1}{\omega} \left( \pi - \arctan \frac{\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} \right). \quad (4.21)$$

Выражение (4.21) задает точку сшивки фонового решения (см., например, главу 2 и [77]). Можно считать, что внутри этого радиуса скалярный потенциал плоский, а снаружи — квадратичный. Заметим еще раз, что именно это свойство кусочно-параболического потенциала позволяет исследовать профиль Q-шара (и линейных возмущений над ним) аналитически.

Уравнения на константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  определяются требованием непрерывности возмущения в точке сшивки (этот вопрос подробно обсуждался в главе 2 в контексте устойчивости Q-трубок). Условие разрешимости этих уравнений и приводит к возникновению дискретной области значений  $\gamma$ . В нашем случае

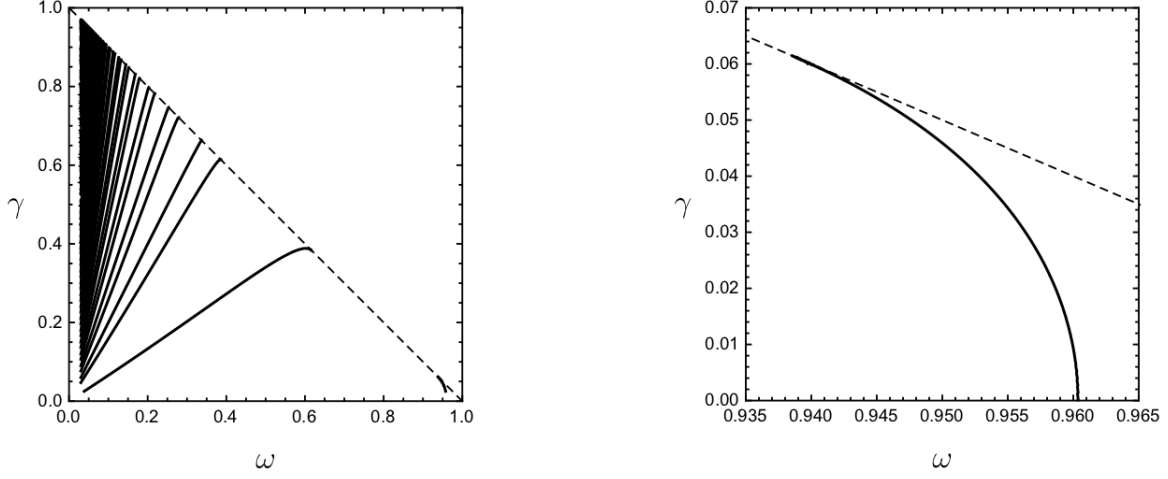


Рис. 4.1. Дискретный спектр линейных возмущений классически устойчивых Q-шаров в потенциале (4.4) при  $l = 0$ . Пунктирная линия обозначает граничное условие (4.17), разделяющее связанные состояния и непрерывный спектр. Все величины нормированы на  $m$ . Левый рисунок показывает общий вид спектра, правый рисунок показывает детально вибрационную моду вблизи критической точки.

условие разрешимости имеет вид

$$\left( \frac{K'_{l+1/2}(\lambda+R)}{K_{l+1/2}(\lambda+R)} - \frac{J'_{l+1/2}(\omega+R)}{J_{l+1/2}(\omega+R)} + \frac{\Lambda}{2} \right) \left( \frac{K'_{l+1/2}(\lambda-R)}{K_{l+1/2}(\lambda-R)} - \frac{J'_{l+1/2}(\omega-R)}{J_{l+1/2}(\omega-R)} + \frac{\Lambda}{2} \right) - \frac{\Lambda^2}{4} = 0, \quad (4.22)$$

где

$$\Lambda = \frac{R}{R\sqrt{1-\omega^2} + 1}. \quad (4.23)$$

Уравнения (4.17) и (4.22) определяют спектр вибрационных мод над Q-шаром. При заданной частоте  $\omega$ , имеется конечное число мод, характеризуемых  $l$  и целым числом  $n$ , нумерующим различные решения (4.22). Помимо этого, при заданных  $l$  и  $n$  имеется  $(2l+1)$ -кратное вырождение каждой моды по проекции углового момента.

Рассмотрим подробнее сферически-симметричные возмущения, для которых  $l = 0$ . Они представлены на Рис. 4.1. Видно, что число связанных состояний возрастает при  $\omega \rightarrow 0$  и относительные частоты осциллирующих мод  $\gamma$  могут быть сколь угодно малыми. В этом пределе заряд фонового решения

также растет,  $Q \rightarrow \infty$ , при этом  $\omega$  становится много меньше массы свободной частицы. Таким образом, в спектре  $Q$ -шаров с большим зарядом имеются мягкие моды. Этот вывод подтверждается тем фактом, что внутри  $Q$ -шара, на расстояниях порядка  $\omega^{-1}$ , скалярный потенциал становится плоским. Интересно также отметить, что  $Q$ -шары с достаточно большими частотами не имеют связанных состояний. Однако, вблизи критической частоты одна вибрационная мода появляется снова. Как мы увидим ниже, эта мода продолжается в область  $\omega > \omega_c$ , где превращается в распадную моду.

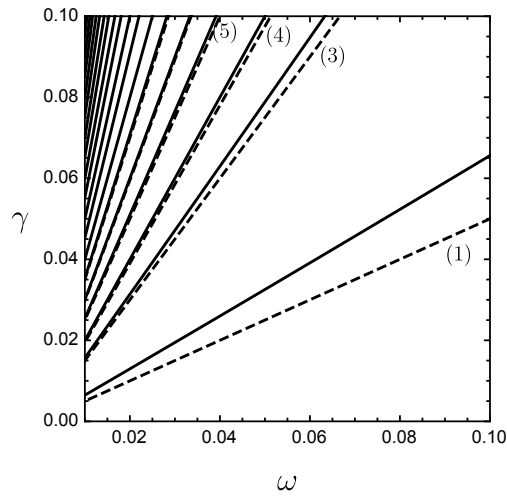


Рис. 4.2. Дискретный спектр сферически-симметричных возмущений  $Q$ -шаров при малых частотах. В этом режиме частота осцилляций  $\gamma$  линейно зависит от  $\omega$ . Сплошные линии показывают точное решение, пунктирные линии соответствуют приближенной формуле  $\gamma = k\omega$  с  $k$  заданным согласно (4.25). Число  $(n)$  обозначает моду на  $n$ -м “энергетическом уровне”.

Из Рис. 4.1 следует, что значение  $\gamma$  фиксированного связанного состояния зависит линейно от  $\omega$  в пределе  $\omega \rightarrow 0$ . Чтобы установить явно эту зависимость, в уравнении (4.22) (при  $l = 0$ ) сделаем подстановку  $\gamma = k\omega$ . Тогда, в первом порядке по  $\omega$ , (4.22) сводится к

$$(k\pi \cos k\pi - \sin k\pi) \sin k\pi = 0. \quad (4.24)$$

Решение этого уравнения хорошо аппроксимируется формулой

$$k_n \approx \frac{n\omega}{2}, \quad n = 1, 3, 4, 5, \dots \quad (4.25)$$



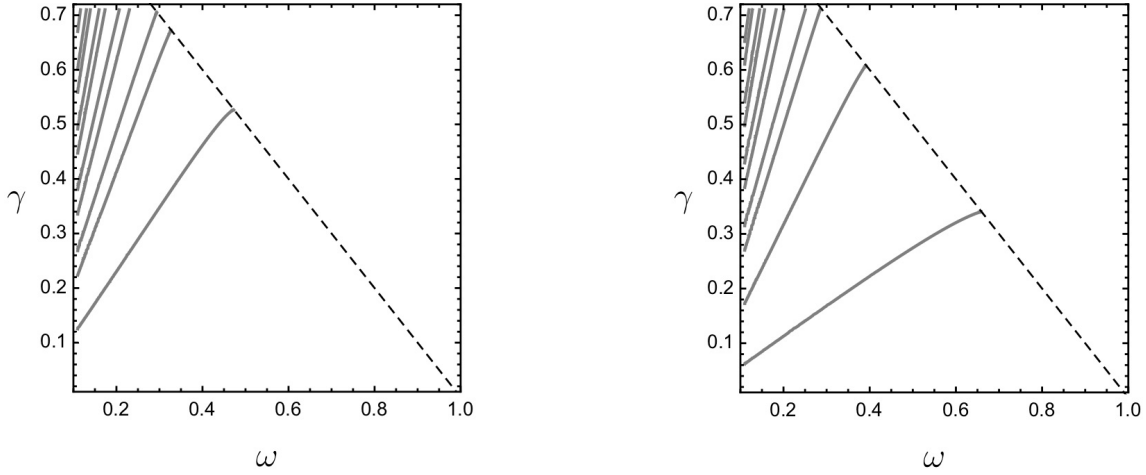


Рис. 4.3. Дискретный спектр линейных возмущений классически устойчивых Q-шаров в потенциале (4.4) при  $l = 1$  (левый рисунок) и  $l = 2$  (правый рисунок), ср. Рис. 4.1.

где мы исключили корень с  $n = 2$ , так как соответствующая мода сингулярна и не присутствует в спектре; см. Рис. 4.2 для сравнения (4.25) с точным решением. Что касается вибрационной моды, существующей в противоположной части спектра, при  $\omega \rightarrow \omega_c$ , то для нее имеем

$$\gamma \sim \sqrt{\omega_c - \omega}. \quad (4.26)$$

Заметим, что, коль скоро  $\gamma$  мала (по сравнению с  $\omega_c$ ), можно воспользоваться теорией возмущений по  $\gamma$  и получить простые выражения для возмущений в этом режиме,

$$\psi_1 \sim f + \gamma \frac{\partial f}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad \psi_2 \sim -f + \gamma \frac{\partial f}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.27)$$

Из Рис. 4.1 видно, что, помимо области малых частот, теория возмущений по  $\gamma$  работает для описания вибрационной моды вблизи каспа. Заметим также, что разложение (4.27), в действительности, имеет общий характер и не зависит от выбора потенциала для скалярного поля. Для проверки этого утверждения, в приложении Б мы рассматриваем точно решаемую модель, раскладываем аналитическое решение вблизи критической точки и убеждаемся в справедливости формул (4.27).

Структура спектра возмущений с ненулевыми орбитальными моментами схожа с таковой для сферически-симметричных мод. Это продемонстрировано на Рис. 4.3, где нарисованы моды с  $l = 1, 2$ . Заметим, что в секторах с ненулевым  $l$  вибрационные моды вблизи каспа отсутствуют. Это согласуется с тем фактом, что Q-шар распадается через сферически-симметричное возмущение [32].

### 4.3.2. Распадная мода

Распадная мода описывается следующим анзацем для возмущений с  $l = 0$ ,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \zeta(r)e^{\gamma t}, \quad (4.28)$$

где  $\gamma$  считается вещественной и положительной. Изучение условий, при которых существует эта мода, приводит к условию Вахитова-Колоколова  $dQ/d\omega < 0$  [70] неустойчивости Q-шаров [57]. Подставляя (4.28) в (4.11), получаем

$$\begin{aligned} (\Delta_r - (\gamma + i\omega)^2 + g(r))\zeta(r) + h(r)\zeta^*(r) &= 0, \\ (\Delta_r - (\gamma - i\omega)^2 + g(r))\zeta^*(r) + h(r)\zeta(r) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Граничные условия имеют вид

$$\zeta'(0) = 0, \quad \zeta(\infty) = 0. \quad (4.30)$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям, записывается следующим образом,

$$\zeta(r) = \begin{cases} A \frac{\sin(\lambda r)}{r}, & r < R, \\ B \frac{e^{-\vartheta r}}{r}, & r > R, \end{cases} \quad (4.31)$$

и аналогично записывается выражение для  $\zeta^*$ . Здесь мы ввели обозначения

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \omega^2 - \gamma^2 - 2i\gamma\omega, \\ \vartheta^2 &= m^2 + \gamma^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega, \end{aligned} \quad (4.32)$$

и точка  $R$  вычисляется согласно (4.21). Константы  $A$ ,  $B$  и  $\lambda$  можно найти из условий непрерывной сшивки решения при  $r = R$ . Уравнение для  $\lambda$  имеет следующий вид,

$$\begin{aligned} & (|\lambda|^2 - |\vartheta|^2 + \vartheta_R \Lambda) \cos(2\lambda_R R) + (|\lambda|^2 + |\vartheta|^2 - \vartheta_R \Lambda) \cosh(2\lambda_I R) \\ & + (2\vartheta_I \lambda_I + 2\vartheta_R \lambda_R - \lambda_R \Lambda) \sin(2\lambda_R R) \\ & + (2\vartheta_R \lambda_I - 2\vartheta_I \lambda_R - \lambda_I \Lambda) \sinh(2\lambda_I R) = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где индекс  $I$  ( $R$ ) означает взятие мнимой (вещественной) части и  $\Lambda$  определена в (4.23).<sup>2</sup>

Решение уравнения (4.33) показано на Рис. 4.4. Видно, что  $\gamma \rightarrow 0$  при стремлении  $\omega$  к критическому значению. Легко показать, что вблизи этого значения

$$\gamma \sim \sqrt{\omega - \omega_c}. \quad (4.34)$$

Сравнивая с (4.26), мы заключаем, что распадное решение продолжается аналитически под критическую точку, где оно становится выделенной вибрационной модой в спектре устойчивых Q-шаров с большими частотами. Это явно

---

<sup>2</sup> В случае когда потенциал не позволяет решать задачу аналитически, уравнения (4.29) могут решаться численно, см., например, [31].

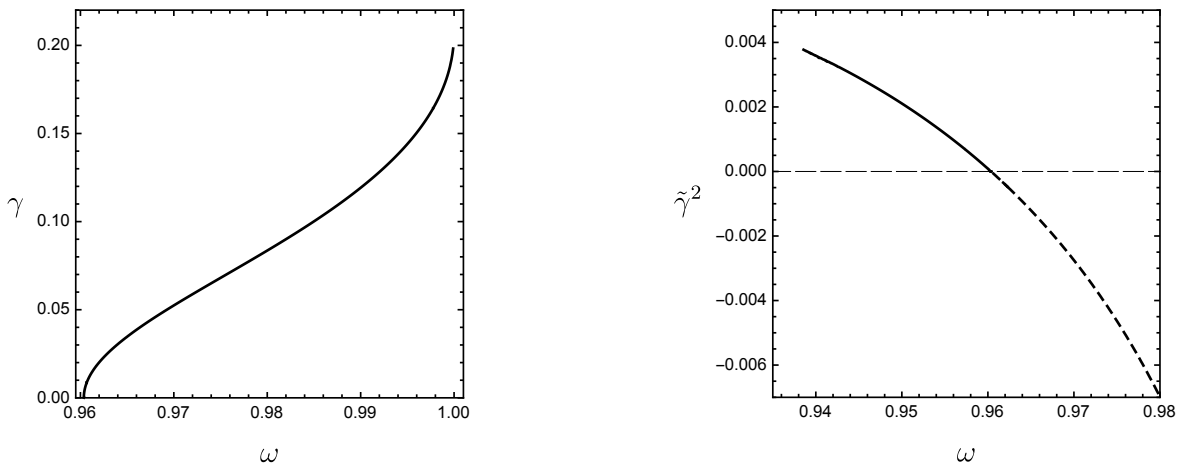


Рис. 4.4. Левый рисунок: распадная мода неустойчивых Q-шаров в потенциале (4.4). Правый рисунок: переход между распадными и вибрационными модами. Величина  $\tilde{\gamma}$  определена в (4.35), ср. Рис. 4.1.

показано в правой части Рис. 4.4, где введено обозначение

$$\tilde{\gamma}^2 \equiv \gamma^2 \quad \text{при} \quad \omega < \omega_c, \quad \tilde{\gamma}^2 \equiv -\gamma^2 \quad \text{при} \quad \omega \geq \omega_c. \quad (4.35)$$

Заметим, что всюду кроме непосредственной окрестности точки  $\omega = 1$  частота распада  $\gamma$  достаточно мала, что делает применимой теорию возмущений по  $\gamma$ . Например, выражение для распадной моды в первом порядке по  $\gamma$  имеет вид

$$\psi e^{-\gamma t} \sim i f + \gamma \frac{\partial f}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.36)$$

Первый член в этом выражении есть не что иное, как голдстоуновская мода, соответствующая глобальной  $U(1)$ -симметрии теории.

## 4.4. Тонкостенное приближение для Q-шаров в полиномиальном потенциале

### 4.4.1. Анзац

В общем случае, в теории комплексного скалярного поля с полиномиальным потенциалом в  $3+1$  измерениях классические решения типа Q-шаров не могут быть найдены аналитически. Тем не менее, аналитический анализ как Q-шаров, так и линейных возмущений над ними можно провести в определенных пределах параметров теории. Одним из таких пределов является тонкостенное приближение [21]. В режиме тонкой стенки свойства Q-шара вполне описываются небольшим числом параметром — расстоянием  $R$  до стенки, разделяющей области, в которых амплитуда поля стремится к локальным максимумам эффективного потенциала, и значением амплитуды  $f_0$  в центре конфигурации. Следовательно, тонкостенное приближение позволяет свести теоретико-полевую вариационную задачу к задаче на нахождение (условного) экстремума функции, зависящей от конечного набора параметров.

Чтобы обосновать переход от описания солитона в терминах скалярного поля к описанию в терминах конечного набора переменных, необходимо использовать подходящий полевой анзац, содержащий эти переменные в качестве свободных параметров. Анзац должен быть совместим с уравнениями движения исходной теории. Тонкостенное приближение подразумевает наличие малого параметра  $\epsilon$ , которым определяется разница между точным решением и выбранным анзацем. Можно затем искать характеристики решения (такие как  $R$  и  $f_0$ ) в рамках теории возмущений по  $\epsilon$ . Теория возмущений обеспечивает независимость параметров решения в лидирующем порядке от детальной структуры анзаца.

В этой секции мы рассмотрим теорию с простейшим ограниченным снизу полиномиальным потенциалом 6-й степени. Удобно записать его в следующем виде,

$$V(|\phi|) = \left( \delta (|\phi|^2 - v^2)^2 + \omega_{\min}^2 \right) |\phi|^2, \quad (4.37)$$

где  $\delta > 0$ . В этом потенциале частота Q-шара ограничена интервалом (см. секцию 3.4, где подобное ограничение было выведено для (1+1)-мерного случая)

$$\omega_{\min} < \omega < m \equiv \sqrt{\omega_{\min}^2 + \delta v^4}. \quad (4.38)$$

Приближение тонкой стенки справедливо для устойчивых Q-шаров вблизи нижней границы частот  $\omega_{\min} > 0$ , и мы ожидаем, что параметр  $\epsilon$ , определяемый согласно

$$\epsilon = \omega - \omega_{\min}, \quad (4.39)$$

является подходящим малым параметром приближения.

Анзац для Q-шара можно выбрать множеством способов. К примеру, можно воспользоваться знанием точного решения для Q-шара в 1+1 измерениях [99] и записать его в следующем виде,

$$f(r) = \begin{cases} f_0, & r < R, \\ f_0(\cosh^2 a(r - R) + b \sinh^2 a(r - R))^{-\frac{1}{2}}, & r \geq R, \end{cases} \quad (4.40)$$

где  $a, b > 0$ . Это выражение пригодно для вычисления в том числе толщины стенки  $l$ , которая остается конечной в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ , и, следовательно, является суб-лидирующей по отношению к размеру солитона  $R$ . Так происходит потому, что значение  $l$  определяется кривизной эффективного потенциала между локальными максимумами (см. обсуждение механической аналогии для солитонов в секции 3.2). Анзац (4.40) не проходит полностью через уравнение движения в (3+1)-мерной задаче ввиду наличия в последнем члена с трением. Однако, этот член мал в окрестности стенки, что и обосновывает применимость (4.40). Заметим еще, что, поскольку  $l$  и  $R$  являются величинами разных порядков по  $\epsilon$ , можно вычислять  $l$  в пренебрежении кривизной решения, то есть, эффективно, в рамках (1+1)-мерной задачи, что опять приводит нас к анзацу (4.40). С другой стороны, для изучения линейных возмущений над  $Q$ -шаром нет необходимости учитывать эффекты, связанные с конечной толщиной стенки. В этом случае достаточно ограничиться вычислением радиуса  $Q$ -шара в лидирующем порядке по  $\epsilon$ , что можно делать в приближении  $l = 0$ . Это рассуждение приводит нас к хорошо известному тонкостенному анзацу

$$f(r) = f_0 \theta \left( 1 - \frac{r}{R} \right) . \quad (4.41)$$

Далее в этой секции мы сначала найдем значения  $f_0$  and  $R$  в лидирующем порядке по  $\epsilon$ , а затем приступим к изучению дискретного спектра возмущений над конфигурацией вида (4.41).

#### 4.4.2. $Q$ -шары в режиме тонкой стенки

Для конфигурации (4.41)  $U(1)$ -заряд равен

$$Q = \frac{8}{3} \pi R^3 \omega f_0^2 . \quad (4.42)$$

Далее, энергия солитона записывается в виде [21],

$$E = E_{\text{surf}} + E_{\text{vol}} , \quad (4.43)$$

где поверхностная энергия стенки дается выражением

$$E_{\text{surf}} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_{\min}} \int d^3x \left( (\nabla f)^2 + V(f) - \omega^2 f^2 \right) = 8\pi R^2 \sqrt{\delta} v^4, \quad (4.44)$$

а объемная энергия внутренней области Q-шара равна

$$E_{\text{vol}} = \int d^3x \left( \omega^2 + \omega_{\min}^2 \right) f^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \left( \omega^2 + \omega_{\min}^2 \right) f_0^2. \quad (4.45)$$

Размер  $R$  Q-шара и амплитуда  $f_0$  поля во внутренней области находятся через отыскание минимума энергии при фиксированном заряде. В лидирующем порядке по  $\epsilon$  мы имеем

$$f_0 = v + \mathcal{O}(\epsilon), \quad R = \frac{\sqrt{\delta} v^2}{2\omega_{\min} \epsilon} + \mathcal{O}(1). \quad (4.46)$$

Как и ожидалось,  $R$  расходится степенным образом при стремлении  $\epsilon$  к 0.

Величины (4.46) совпадают с аналогичными величинами, полученными в работе [106] (после подходящего переопределения параметров потенциала (4.37)). В качестве дополнительной проверки вычислений, можно убедиться, что соотношение (2.16), связывающее энергию и заряд Q-шара, выполняется при подстановке (4.46) в выражения для  $Q$  и  $E$  и дифференцировании по  $\omega$ .

#### 4.4.3. Вибрационные моды в режиме тонкой стенки

Действуя аналогично случаю теории с кусочно-параболическим потенциалом, мы выбираем анзац для возмущений согласно (4.14) и подставляем его в уравнения (4.11), где функции  $h$ ,  $g$  принимают вид

$$\begin{aligned} h(r) &= -4\delta v^2 f^2(r) + 6\delta f^4(r), \\ g(r) &= m^2 - 8\delta v^2 f^2(r) + 9\delta f^4(r), \end{aligned} \quad (4.47)$$

и  $f(r)$  определяется согласно (4.41), (4.46). Полученные линеаризованные уравнения решаются аналитически в промежутках  $r > R$  и  $r < R$ , и соответствующие решения должны удовлетворять граничным условиям (4.16) и требованию гладкости в точке сшивки  $r = R$ .

Во внешней области Q-шара,  $r > R$ , прямое вычисление дает ответ

$$\begin{aligned}\psi_1^{(l)}(r) &= C \frac{k_{l+\frac{1}{2}} \left( \sqrt{m^2 - (\omega + \gamma)^2} r \right)}{r}, \\ \psi_2^{(l)}(r) &= D \frac{k_{l+\frac{1}{2}} \left( \sqrt{m^2 - (\omega - \gamma)^2} r \right)}{r},\end{aligned}\tag{4.48}$$

где

$$k_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} K_{l+\frac{1}{2}}(x).\tag{4.49}$$

Внутри Q-шара,  $r < R$ , компоненты  $\psi$  и  $\psi^*$  возмущения в уравнениях (4.11) не могут быть разделены. Введем обозначение  $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ . Тогда, в матричной записи, мы имеем

$$\left( (\Delta + \omega^2 + \gamma^2 - \alpha) \times 1_{2 \times 2} + 2\omega\gamma\sigma_3 - 2\beta\sigma_1 \right) \Psi = 0,\tag{4.50}$$

где  $\sigma_{1,3}$  — матрицы Паули и были введены константы

$$\alpha = g(r < R) = m^2 + \delta v^4, \quad \beta = \frac{h(r < R)}{2} = \delta v^4.\tag{4.51}$$

Пусть  $U$  — матрица, диагонализующая последние два слагаемых оператора в левой части уравнения (4.50). Введем вектор  $\Xi$  такой что

$$\Psi = U \Xi.\tag{4.52}$$

Подставляя (4.52) в (4.11), получаем отдельные уравнения для компонент  $\xi_1$  и  $\xi_2$  вектора  $\Xi$ . Их решение дает

$$\begin{aligned}\xi_1^{(l)} &= A \frac{j_{l+\frac{1}{2}} \left( r \sqrt{\omega^2 + \gamma^2 - \alpha + 2\sqrt{(\omega\gamma)^2 + \beta^2}} \right)}{r}, \\ \xi_2^{(l)} &= B \frac{i_{l+\frac{1}{2}} \left( r \sqrt{\alpha + 2\sqrt{(\omega\gamma)^2 + \beta^2} - \omega^2 - \gamma^2} \right)}{r},\end{aligned}\tag{4.53}$$

где

$$\begin{aligned}j_{l+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{x} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \\ i_{l+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{x} I_{l+\frac{1}{2}}(x),\end{aligned}\tag{4.54}$$



и  $I_{l+\frac{1}{2}}(x)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $l+1/2$ . Зная (4.53) и явный вид матрицы  $U$ ,

$$U = \begin{pmatrix} -\omega\gamma - \sqrt{\omega^2\gamma^2 + \beta^2} & -\omega\gamma + \sqrt{\omega^2\gamma^2 + \beta^2} \\ \beta & \beta \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

можно найти компоненты  $\psi_1^{(l)}$  и  $\psi_2^{(l)}$  возмущения.

Уравнения на константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяются требованием гладкости возмущения в точке, где расположена стенка,  $r = R$ . Как и в предыдущей секции, условие разрешимости уравнений приводит к ограничению на возможные значения  $\gamma$ . Это условие записывается следующим образом,

$$\begin{aligned} & \left( -2\lambda_+ \lambda_- \frac{k'_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_+ R) k'_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_- R)}{k_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_+ R) k_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_- R)} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2} \right. \\ & \quad + \omega_+ \lambda_- \frac{j'_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R) k'_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_- R)}{j_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R) k_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_- R)} \left( \gamma\omega + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \\ & \quad \left. + \omega_+ \lambda_+ \frac{j'_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R) k'_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_+ R)}{j_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R) k_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_+ R)} \left( -\gamma\omega + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \right) \\ & + \omega_- \frac{j'_{l+\frac{1}{2}}(\omega_- R)}{j_{l+\frac{1}{2}}(\omega_- R)} \left( -2\omega_+ \frac{j'_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R)}{j_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R)} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2} \right. \\ & \quad + \lambda_- \frac{k'_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_- R)}{k_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_- R)} \left( -\gamma\omega + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \\ & \quad \left. + \lambda_+ \frac{k'_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_+ R)}{k_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_+ R)} \left( \gamma\omega + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \sqrt{2\sqrt{\omega^2\gamma^2 + \beta^2} \pm (\omega^2 + \gamma^2 - \alpha)}, \\ \lambda_{\pm} &= \sqrt{m^2 - (\omega \pm \gamma)^2}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

На Рис. 4.5 показаны значения  $\gamma$ , которые решают уравнение (4.56) для различных частот  $\omega$  фонового решения и при определенном выборе параметров потенциала. Мы видим, что спектр вибрационных мод над Q-шаром в

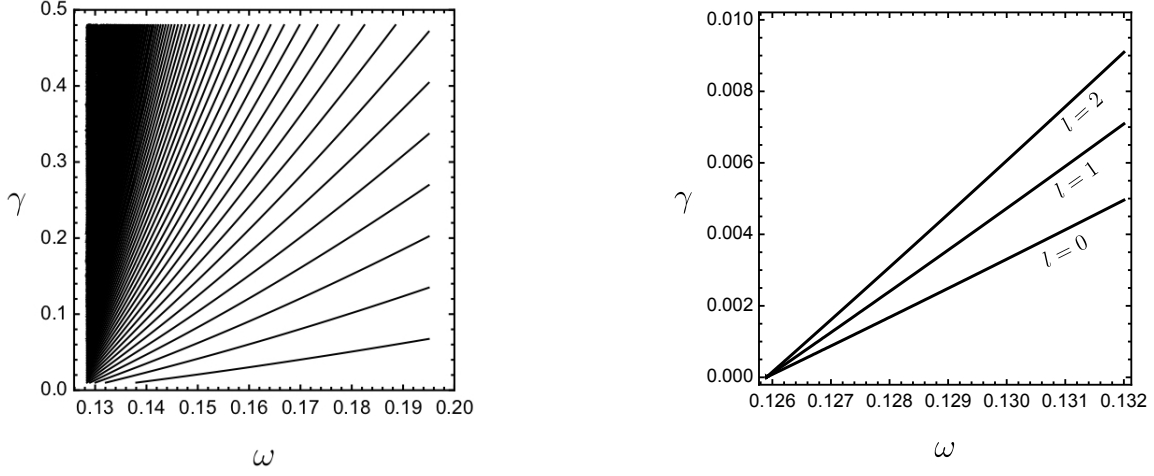


Рис. 4.5. Спектр вибрационных мод классически устойчивых Q-шаров в теории с потенциалом (4.37) в тонкостенном приближении. Параметры потенциала:  $\delta = 1.5$ ,  $v = 0.9$ ,  $\omega_{\min} = 0.126$ . Все величины нормированы на  $m$ . Левый рисунок показывает спектр сферически-симметричных мод,  $l = 0$ . На правом рисунке приводится сравнение мод, отвечающих одному “энергетическому уровню”  $n = 1$  и разным угловым моментам. Для иллюстрации показана область вблизи  $\omega_{\min}$ .

полиномиальном потенциале имеет качественно то же поведение, что и в кусочно-параболическом потенциале. В частности, все “энергетические уровни” стремятся к 0 при стремлении  $\omega$  к  $\omega_{\min}$  и вблизи  $\omega_{\min}$  спектр линейризуется.

Уравнение (4.56) существенно упрощается в пределе больших  $R$ . Используя свойства специальных функций [107], можно написать

$$-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k'_{l+\frac{1}{2}}(x)}{k_{l+\frac{1}{2}}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{i'_{l+\frac{1}{2}}(x)}{i_{l+\frac{1}{2}}(x)} = 1. \quad (4.58)$$

Используя (4.58), из (4.56) получаем

$$\frac{j_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R)}{j'_{l+\frac{1}{2}}(\omega_+ R)} = -\frac{\omega_+}{\omega_-} \frac{\gamma\omega(\lambda_- - \lambda_+) + (\lambda_- + \lambda_+ + 2\omega_-) \sqrt{\beta^2 + \gamma^2\omega^2}}{\gamma\omega(-\lambda_- + \lambda_+) + \left((\lambda_- + \lambda_+) + \frac{2\lambda_- \lambda_+}{\omega_-}\right) \sqrt{\beta^2 + \gamma^2\omega^2}}. \quad (4.59)$$

Из Рис. 4.5 видно, что для любой фиксированной вибрационной моды

$$\gamma = k\epsilon. \quad (4.60)$$

Коэффициент  $k$  можно найти, подставляя (4.60) в (4.59). Ответ записывается

в виде

$$k_{n,l} = \frac{2\omega_{\min}}{m} \mu_{n,l+\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.61)$$

где  $\mu_{n,l+\frac{1}{2}}$  обозначает  $n$ -й нуль функции Бесселя первого рода порядка  $l + 1/2$ .

В завершение секции оценим число  $N$  связанных состояний на фоне Q-шара в тонкостенном приближении. Это число конечно в силу ограничения

$$\gamma + \omega < m, \quad (4.62)$$

разделяющего связанные состояния и непрерывный спектр. Используя асимптотики нулей функции Бесселя,

$$\begin{aligned} \mu_{n,l+\frac{1}{2}} &= \pi \left( n + \frac{l}{2} \right) + \mathcal{O}(n^{-1}), & l \text{ фиксировано,} \\ \mu_{n,l+\frac{1}{2}} &= l + \mathcal{O}(l^{1/3}), & n \text{ фиксировано,} \end{aligned} \quad (4.63)$$

мы имеем

$$N \sim \left( \frac{m - \omega_{\min}}{\epsilon} \frac{m}{\omega_{\min}} \right)^3 \sim R^3, \quad (4.64)$$

где во второй оценке использовались уравнения (4.46). Таким образом, число уровней в дискретном спектре пропорционально внутреннему объему Q-шара. Это естественный результат, и можно ожидать его выполнения в общем случае. В частности, аналогичное вычисление показывает, что в случае кусочно-параболического потенциала число уровней подчиняется этому же правилу,  $N \sim R^3$ , где  $R$  отождествляется в радиусом сшивки (4.21), при условии что заряд Q-шара достаточно большой.

## 4.5. Заключение к главе

В данной главе нашей целью было исследование возмущений классически устойчивых Q-шаров в теориях комплексного скалярного поля. Мотивацией для выбора конкретных моделей для изучения являлась возможность аналитического анализа фоновых решений и малых возмущений над ними. Мы обсудили теорию с кусочно-параболическим потенциалом, содержащим плоское

направление, интересное с точки зрения феноменологии. Дополнением к этому случаю являются модели, потенциал которых имеет полиномиальное поведение. Мы рассмотрели простейший потенциал 6-й степени, допускающий наличие Q-шаров, и проанализировали возмущения в приближении тонкой стенки для фоновых решений.

Мы обнаружили, что спектры малых осцилляций Q-шаров в наших примерах имеют общие свойства. Это позволяет предположить, что эти свойства не зависят от выбора скалярного потенциала. Было показано, что Q-шары с большим зарядом в теории с плоским потенциалом содержат мягкие моды с частотами  $\omega \sim \gamma \rightarrow 0$ , много меньше массы бозона в вакууме. Что касается полиномиального потенциала, то в нем Q-шары с большим зарядом не имеют мягких мод в силу того, что частота Q-шара ограничена снизу конечной величиной  $\omega_{\min} > 0$ . Далее, мы продемонстрировали, что Q-шары с частотами, близкими к критической, содержат сферически-симметричную вибрационную моду, которая связана с рападной модой Q-клаудов. Также важно отметить, что в этом режиме возмущения над (в общем случае, релятивистскими) солитонами анализируются с помощью теории возмущений по относительной частоте  $\gamma$  возмущения. Этот результат может представлять интерес для изучения бозонных звезд, для которых возможность аналитического исследования ограничена.

## Заключение

Подведем итоги. В данной диссертации были решены следующие задачи.

1. В Главе 1 была исследована классическая устойчивость  $Q$ -трубок в теории с кусочно-параболическим потенциалом относительно возмущений, не нарушающих аксиальную симметрию солитона. Было показано, что условие Вахитова-Колоколова классической устойчивости применимо к трубкам с нулевым угловым моментом. Мы продемонстрировали также, что трубки с  $J > 0$  неустойчивы относительно возмущений, меняющих угловой момент, при всех допустимых значениях заряда. При этом неустойчивость может развиваться из возбужденного состояния, а распадная мода не единственна. Эти результаты отличают  $Q$ -трубки от  $Q$ -шаров, распад которых осуществляется из основного состояния единственной сферически-симметричной модой.
2. В Главе 2 были изучены скалярный конденсат и  $Q$ -шары в моделях, допускающих точное решение, с периодическими граничными условиями, наложенными на систему. Мы продемонстрировали, что при определенном выборе скалярного потенциала в теории могут существовать стабильный конденсат и стабильные  $Q$ -шары. При этом для классических решений характерно тройное вырождение по заряду  $Q$  (при больших  $Q$ ), и решение с наибольшей энергией является  $Q$ -клаудом. Мы аргументировали, что в таких ситуациях  $Q$ -клауд является сфалероном — седловой точкой барьера, разделяющего устойчивые  $Q$ -шар и конденсат.
3. В Главе 3 были исследованы новые виды  $Q$ -вещества —  $Q$ -дырки и  $Q$ -балджи. На нескольких простых примерах мы убедились, что  $Q$ -дырки обычно существуют в тех же теориях, что и обычные  $Q$ -шары. Было показано, что энергия  $Q$ -дырки относительно энергии окружающего ее конденсата

может быть как положительной, так и отрицательной. Мы аргументировали, что решения типа  $Q$ -дырок и  $Q$ -балджей классически неустойчивы.

4. Глава 4 была посвящена изучению дискретного спектра линейных возмущений устойчивых  $Q$ -шаров. Мы сделали акцент на изучении мод  $Q$ -шаров с большим зарядом. Было показано, что в теории с плоским потенциалом большие  $Q$ -шары содержат мягкие моды. Далее, мы исследовали  $Q$ -шары и возмущения над ними в тонкостенном приближении в теории с полиномиальным потенциалом. Было обнаружено, что у решений, находящихся у границы области классической устойчивости, имеется выделенная сферически-симметричная вибрационная мода, соответствующая распадной моде  $Q$ -клаудов. Мы отметили применимость теории возмущений для выделенной моды и для мягких мод  $Q$ -шаров.

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю благодарность научному руководителю Э. Я. Нугаеву за многолетнюю плодотворную работу и большую научную и личную поддержку.

Автор благодарит соавторов М. Н. Смолякова и А. В. Ковтуна, а также Д. С. Горбунова, М. В. Либанова и И. Я. Арефьеву за многочисленные полезные обсуждения и творческую атмосферу.

## Приложение А

### Допустимые значения $\omega$ для Q-дырок в (3+1)-мерном пространстве-времени

Выведем условие (3.41) напрямую из (3.46). Для этого в (3.46) сделаем подстановку  $Y = \sqrt{M^2 - \omega^2}R$  и перепишем в виде

$$\frac{Y (\coth(Y) + 1)}{Y + 1} = \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2}. \quad (\text{A.1})$$

Левая часть этого уравнения есть монотонная функция, такая что

$$1 \leq \frac{Y (\coth(Y) + 1)}{Y + 1} < 2. \quad (\text{A.2})$$

Следовательно,

$$1 \leq \frac{\epsilon M^2}{M^2 - \omega^2} < 2, \quad (\text{A.3})$$

что совпадает с (3.41).

## Приложение Б

### О поведении мод вблизи критической точки

Приведем дополнительный аргумент в пользу того, что уравнения (4.27) описывают форму линейных возмущений вида (4.14) над Q-шаром вблизи критической точки  $\omega = \omega_c$ . Для этого рассмотрим еще один потенциал, допускающий аналитические решения для Q-шаров. Он записывается следующим образом [108],

$$V(|\phi|) = -m^2|\phi|^2 \ln \left( \frac{\lambda|\phi|^2}{m^2} \right), \quad (\text{Б.1})$$

где  $m, \lambda > 0$ . Профиль Q-шара дается выражением

$$f_0(r) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{(mr)^2}{2} - \frac{\omega^2}{2m^2} + 1}. \quad (\text{Б.2})$$

Линейные возмущения, описываемые анзацем (4.14), также могут быть найдены аналитически. После его применения, уравнения (4.15) становятся похожи на уравнение для 1-мерного гармонического осциллятора, и компоненты  $\psi_1$  и  $\psi_2$  суть собственные функции этого осциллятора [108].

Относительная частота осцилляций вблизи каспа равна

$$\gamma = 2\sqrt{\omega^2 - \frac{m^2}{2}}, \quad (\text{Б.3})$$

и соответствующая вибрационная мода записывается как

$$\psi_1 \sim \left(1 - \frac{\gamma\omega}{m^2}\right) f_0, \quad \psi_2 \sim \left(1 - \frac{\gamma\omega}{m^2}\right) \left(1 + \frac{2\gamma\omega}{m^2} + \frac{\gamma^2}{m^2}\right) f_0, \quad (\text{Б.4})$$

с точностью до общего множителя. В линейном порядке по  $\gamma$ , получаем

$$\psi_1 \sim f_0 + \gamma \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad \psi_2 \sim -f_0 + \gamma \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (\text{Б.5})$$

в согласии с (4.27). Таким образом, теория возмущений по малому параметру  $|\omega - \omega_c|^{1/2}$  применима в потенциале (Б.1).



Заметим в скобках, что, поскольку масса свободных частиц в этом потенциале расходится, критическая точка  $\omega = \omega_c$  на параметрическом графике  $E(Q)$  расположена справа. Это отличает потенциал (Б.1) от кусочно-параболического потенциала, для которого характерен касп слева, устанавливающий минимально возможные энергию и заряд солитона. Касп справа более характерен для бозонных звезд (см., например, [109]).

## Литература

1. Zabusky N. J. Kruskal M. D. Interaction of 'Solitons' in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States // Phys. Rev. Lett. 1965. Т. 15. С. 240–243.
2. Coleman Sidney R. Classical Lumps and their Quantum Descendents // Subnucl. Ser. 1977. Т. 13. С. 297.
3. Hasegawa A., Matsumoto M. Optical Solitons in Fibers. Springer, Berlin, Heidelberg. Т. 9.
4. Akhmediev N., Ankiewicz A. Dissipative Solitons. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
5. A.R. Bishop J.A. Krumhansl S.E. Trullinger. Solitons in condensed matter: A paradigm // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1980. Т. 1, № 1. С. 1 – 44.
6. Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. М.: УРСС, 1999.
7. Горбунов Д.С. Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: теория горячего Большого взрыва. М.: УРСС, 2008.
8. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория групп и квантованные поля. М.: Наука, 1977.
9. Боголюбов Н.Н. Ширков Д.В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
10. Rajaraman R. Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. 1982.
11. Lee T. D., Pang Y. Nontopological solitons // Phys. Rept. 1992. Т. 221. С. 251–350. [169(1991)].
12. Christ N. H., Lee T. D. Quantum Expansion of Soliton Solutions // Phys. Rev. 1975. Т. D12. С. 1606.
13. Selected papers, with commentary, of Tony Hilton Royle Skyrme / под ред. G. E. Brown. 1995.
14. Coleman Sidney R. The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive

- Thirring Model // Phys. Rev. 1975. Т. D11. С. 2088. [128(1974)].
15. Tsumagari Mitsuo I. The Physics of Q-Balls. Ph.D. thesis: Nottingham U. 2009.
  16. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем // Усп. физ. наук. 2012. Т. 182, № 6. С. 569–592.
  17. Kusenko Alexander. Phase transitions precipitated by solitosynthesis // Phys. Lett. 1997. Т. B406. С. 26–33.
  18. The Evaporation of  $Q$  Balls / Andrew G. Cohen, Sidney R. Coleman, Howard Georgi [и др.] // Nucl. Phys. 1986. Т. B272. С. 301–321.
  19. Kovtun A. V., Nugaev E. Ya. Radiative corrections and instability of large  $Q$ -Balls // Mod. Phys. Lett. 2017. Т. A32, № 37. С. 1750198.
  20. Rosen G. Particlelike Solutions to Nonlinear Complex Scalar Field Theories with Positive-Definite Energy Densities // J.Math.Phys. 1968. Т. 9. С. 996–999.
  21. Coleman Sidney R.  $Q$  Balls // Nucl. Phys. 1985. Т. B262. С. 263. [Erratum: Nucl. Phys.B269,744(1986)].
  22. Gauged  $q$  Balls / Ki-Myeong Lee, Jaime A. Stein-Schabes, Richard Watkins [и др.] // Phys. Rev. 1989. Т. D39. С. 1665.
  23. Gulamov I. E., Nugaev E. Ya., Smolyakov M. N. Theory of  $U(1)$  gauged  $Q$ -balls revisited // Phys. Rev. 2014. Т. D89, № 8. С. 085006.
  24. Kusenko Alexander. Solitons in the supersymmetric extensions of the standard model // Phys. Lett. 1997. Т. B405. С. 108.
  25. Dvali G. R., Kusenko Alexander, Shaposhnikov Mikhail E. New physics in a nutshell, or  $Q$  ball as a power plant // Phys. Lett. 1998. Т. B417. С. 99–106.
  26. Affleck Ian, Dine Michael. A New Mechanism for Baryogenesis // Nucl. Phys. 1985. Т. B249. С. 361–380.
  27. Solitogenesis: Primordial Origin of Nontopological Solitons /

- Joshua A. Frieman, G. B. Gelmini, Marcelo Gleiser [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 1988. T. 60. C. 2101.
28. Kusenko Alexander, Shaposhnikov Mikhail E. Supersymmetric Q balls as dark matter // *Phys. Lett.* 1998. T. B418. C. 46–54.
29. Troitsky Sergey. Supermassive dark-matter Q-balls in galactic centers? // *JCAP.* 2016. T. 1611, № 11. C. 027.
30. Bunkov Yu. M., Volovik G. E. Magnons condensation into Q-ball in He-3 - B // *Phys. Rev. Lett.* 2007. T. 98. C. 265302.
31. Levkov Dmitry, Nugaev Emin, Popescu Andrei. The fate of small classically stable Q-balls // *JHEP.* 2017. T. 12. C. 131.
32. Smolyakov Mikhail N. Perturbations against a Q-ball: Charge, energy, and additivity property // *Phys. Rev.* 2018. T. D97, № 4. C. 045011.
33. Panin A. G., Smolyakov M. N. Problem with classical stability of U(1) gauged Q-balls // *Phys. Rev.* 2017. T. D95, № 6. C. 065006.
34. Loiko V., Perapechka I., Shnir Ya. Q-balls without a potential. 2018.
35. Schunck F. E., Mielke E. W. General relativistic boson stars // *Class. Quant. Grav.* 2003. T. 20. C. R301–R356.
36. Liebling Steven L., Palenzuela Carlos. Dynamical Boson Stars // *Living Rev. Rel.* 2012. T. 15. C. 6. [Living Rev. Rel.20,no.1,5(2017)].
37. Mielke Eckehard W., Schunck Franz E. Boson stars: Alternatives to primordial black holes? // *Nucl. Phys.* 2000. T. B564. C. 185–203.
38. Boson Stars from Self-Interacting Dark Matter / Joshua Eby, Chris Kouvaris, Niklas Gronlund Nielsen [и др.] // *JHEP.* 2016. T. 02. C. 028.
39. Amin Mustafa A., Easther Richard, Finkel Hal. Inflaton Fragmentation and Oscillon Formation in Three Dimensions // *JCAP.* 2010. T. 1012. C. 001.
40. Nonperturbative Dynamics Of Reheating After Inflation: A Review / Mustafa A. Amin, Mark P. Hertzberg, David I. Kaiser [и др.] // *Int. J. Mod. Phys.* 2014. T. D24. C. 1530003.

41. Volkov Mikhail S., Wohnert Erik. Spinning Q balls // Phys. Rev. 2002. T. D66. C. 085003.
42. Copeland Edmund J., Saffin Paul M., Zhou Shuang-Yong. Charge-Swapping Q-balls // Phys. Rev. Lett. 2014. T. 113, № 23. C. 231603.
43. Split Q-Balls / D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques [и др.] // Phys. Lett. 2017. T. B765. C. 359–364.
44. Compact Q-balls / D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques [и др.] // Phys. Lett. 2016. T. B758. C. 146–151.
45. Kivshar Y.S., Agrawal G. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. Elsevier Science, 2003.
46. Kumar Ajit. Soliton dynamics in a monomode optical fibre // Physics Reports. 1990. T. 187, № 2. C. 63 – 108.
47. Wise F. Di Trapani P. The hunt for light bullets - Spatiotemporal solitons. 2002. 02. T. 13. C. 28–32.
48. Blair S. Wagner K. Gated Logic with Optical Solitons. Springer, London, 2002.
49. Zakharov V. E., Shabat A. B. // JETP. 1973. T. 37, № 5. C. 823.
50. Kivshar Y. S. Dark solitons in nonlinear optics // IEEE Journal of Quantum Electronics. 1993. T. 29, № 1. C. 250–264.
51. Manton N. S., Sutcliffe P. Topological solitons. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
52. Bochkarev A. I., Shaposhnikov M. E. Anomalous fermion number nonconservation at high temperatures: two-dimensional example // Mod. Phys. Lett. 1987. T. A2. C. 991. [Erratum: Mod. Phys. Lett.A4,1495(1989)].
53. Kasuya S., Kawasaki M. Q ball formation through Affleck-Dine mechanism // Phys. Rev. 2000. T. D61. C. 041301.
54. Brihaye Yves, Hartmann Betti. Interacting Q-balls // Nonlinearity. 2008. T. 21. C. 1937.

55. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14(1). С. 123–180.
56. Bogomolny E. B., Vainshtein A. I. Stability of Strings in Gauge Abelian Theory // Sov. J. Nucl. Phys. 1976. Т. 23. С. 588–591.
57. Alford Mark G. Q clouds // Nucl. Phys. 1988. Т. B298. С. 323–332.
58. Observation of a kink soliton on the surface of a liquid / Bruce Denardo, William Wright, Seth Putterman [и др.] // Phys. Rev. Lett. 1990. Mar. Т. 64. С. 1518–1521.
59. Microwave magnetic-envelope dark solitons in yttrium iron garnet thin films / Ming Chen, Mincho A. Tsankov, Jon M. Nash [и др.] // Phys. Rev. Lett. 1993. Mar. Т. 70. С. 1707–1710.
60. Holes in the ghost condensate / D. Krotov, C. Rebbi, V. A. Rubakov [и др.] // Phys. Rev. 2005. Т. D71. С. 045014.
61. Kusenko Alexander. Small Q balls // Phys. Lett. 1997. Т. B404. С. 285.
62. Gleiser Marcelo. Stability of Boson Stars // Phys. Rev. 1988. Т. D38. С. 2376. [Erratum: Phys. Rev.D39,no.4,1257(1989)].
63. Seidel Edward, Suen Wai-Mo. Dynamical Evolution of Boson Stars. 1. Perturbing the Ground State // Phys. Rev. 1990. Т. D42. С. 384–403.
64. Nugaev E., Shkerin A. Investigation of Q-tubes stability using the piecewise parabolic potential // Phys. Rev. 2014. Т. D90, № 1. С. 016002.
65. Nugaev Emin, Shkerin Andrey. Toward the correspondence between Q-clouds and sphalerons // Phys. Lett. 2015. Т. B747. С. 287–291.
66. Nugaev E., Shkerin A., Smolyakov M. Q-holes // JHEP. 2016. Т. 12. С. 032.
67. Kovtun A., Nugaev E., Shkerin A. On vibrational modes of Q-balls. 2018.
68. Sakai Nobuyuki, Ishihara Hideki, Nakao Ken-ichi. Q-tubes and Q-crusts // Phys. Rev. 2011. Т. D84. С. 105022.
69. Tamaki Takashi, Sakai Nobuyuki. Unified pictures of Q-balls and Q-tubes // Phys. Rev. 2012. Т. D86. С. 105011.

70. Vakhitov N. G., Kolokolov A. A. Stationary Solutions of the Wave Equation in a Medium with Nonlinearity Saturation // Radiophysics and Quantum Electronics. 1973. T. 16. C. 783–789.
71. Friedberg R., Lee T. D., Sirlin A. A Class of Scalar-Field Soliton Solutions in Three Space Dimensions // Phys. Rev. 1976. T. D13. C. 2739–2761.
72. Лифшиц Е.М. Питаевский Л.П. Статистическая физика. Часть II: теория конденсированного состояния. Физматлит, 2004.
73. Theodorakis Stavros. Analytic Q ball solutions in a parabolic-type potential // Phys. Rev. 2000. T. D61. C. 047701.
74. Bezrukov Fedor L., Shaposhnikov Mikhail. The Standard Model Higgs boson as the inflaton // Phys. Lett. 2008. T. B659. C. 703–706.
75. Bezrukov F., Shaposhnikov M. Standard Model Higgs boson mass from inflation: Two loop analysis // JHEP. 2009. T. 07. C. 089.
76. Mai Manuel, Schweitzer Peter. Radial excitations of Q-balls, and their D-term // Phys. Rev. 2012. T. D86. C. 096002.
77. Gulamov I. E., Nugaev E. Ya., Smolyakov M. N. Analytic Q-ball solutions and their stability in a piecewise parabolic potential // Phys. Rev. 2013. T. D87, № 8. C. 085043.
78. Anderson D. L. T., Derrick G. H. Stability of time-dependent particlelike solutions in nonlinear field theories. 1. // J. Math. Phys. 1970. T. 11. C. 1336–1346.
79. Ade P. A. R. [и др.]. Planck 2013 results. XXV. Searches for cosmic strings and other topological defects // Astron. Astrophys. 2014. T. 571. C. A25.
80. Kasuya S., Kawasaki M. Q Ball formation in the gravity mediated SUSY breaking scenario // Phys. Rev. 2000. T. D62. C. 023512.
81. Khlebnikov S., Tkachev I. Quantum dew // Phys. Rev. 2000. T. D61. C. 083517.
82. Amin Mustafa A. Inflaton fragmentation: Emergence of pseudo-stable inflaton

- lumps (oscillons) after inflation. 2010.
83. Krylov E., Levin A., Rubakov V. Cosmological phase transition, baryon asymmetry and dark matter Q-balls // *Phys. Rev.* 2013. T. D87, № 8. C. 083528.
  84. Zakharov V. E. Instability of Self-focusing of Light // *Sov. Phys. JETP*. 1968. T. 26. C. 994.
  85. Lee Ki-Myeong, Weinberg Erick J. tunneling without barriers // *Nucl. Phys.* 1986. T. B267. C. 181–202.
  86. Multamaki Tuomas, Vilja Iiro. Q Ball collisions in the MSSM: Gravity mediated supersymmetry breaking // *Phys. Lett.* 2000. T. B482. C. 161–166.
  87. Multamaki Tuomas, Vilja Iiro. Q ball collisions in the MSSM: Gauge mediated supersymmetry breaking // *Phys. Lett.* 2000. T. B484. C. 283–288.
  88. Nugaev E. Ya., Smolyakov M. N. Particle-like Q-balls // *JHEP*. 2014. T. 07. C. 009.
  89. Tsumagari Mitsuo I., Copeland Edmund J., Saffin Paul M. Some stationary properties of a Q-ball in arbitrary space dimensions // *Phys. Rev.* 2008. T. D78. C. 065021.
  90. Bowcock Peter, Foster David, Sutcliffe Paul. Q-balls, Integrability and Duality // *J. Phys.* 2009. T. A42. C. 085403.
  91. Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E. Electroweak baryon number nonconservation in the early universe and in high-energy collisions // *Usp. Fiz. Nauk*. 1996. T. 166. C. 493–537. [*Phys. Usp.*39,461(1996)].
  92. Manton N. S., Samols T. M. Sphalerons on a circle // *Phys. Lett.* 1988. T. B207. C. 179–184.
  93. Doddato Francesca, McDonald John. Affleck-Dine Baryogenesis, Condensate Fragmentation and Gravitino Dark Matter in Gauge-Mediation with a Large Messenger Mass // *JCAP*. 2011. T. 1106. C. 008.
  94. Oscillons After Inflation / Mustafa A. Amin, Richard Easther, Hal Finkel



- [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2012. Т. 108. С. 241302.
95. Cotner Eric, Kusenko Alexander, Takhistov Volodymyr. Primordial Black Holes from Inflaton Fragmentation into Oscillons. 2018.
  96. Zhou Shuang-Yong. Gravitational waves from Affleck-Dine condensate fragmentation // JCAP. 2015. Т. 1506, № 06. С. 033.
  97. Antusch Stefan, Cefala Francesco, Orani Stefano. Gravitational waves from oscillons after inflation // Phys. Rev. Lett. 2017. Т. 118, № 1. С. 011303.
  98. Katz Andrey, Riotto Antonio. Baryogenesis and Gravitational Waves from Runaway Bubble Collisions // JCAP. 2016. Т. 1611, № 11. С. 011.
  99. Stability regions of one-dimensional solitons of a charged scalar field / T. I. Belova, N. A. Voronov, N. B. Konyukhova [и др.] // Phys. Atom. Nucl. 1994. Т. 57. С. 2028–2035. [Yad. Fiz.57,2105(1994)].
  100. Derrick G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles // J. Math. Phys. 1964. Т. 5. С. 1252–1254.
  101. Konoplya Roman, Zhidenko Alexander. Detection of gravitational waves from black holes: Is there a window for alternative theories? // Phys. Lett. 2016. Т. B756. С. 350–353.
  102. Gravitational-wave signatures of exotic compact objects and of quantum corrections at the horizon scale / Vitor Cardoso, Seth Hopper, Caio F. B. Macedo [и др.] // Phys. Rev. 2016. Т. D94, № 8. С. 084031.
  103. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases / Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii [и др.] // Rev. Mod. Phys. 1999. Т. 71. С. 463–512.
  104. Kolb Edward W., Tkachev Igor I. Axion miniclusters and Bose stars // Phys. Rev. Lett. 1993. Т. 71. С. 3051–3054.
  105. Eby Joshua, Suranyi Peter, Wijewardhana L. C. R. Expansion in Higher Harmonics of Boson Stars using a Generalized Ruffini-Bonazzola Approach, Part 1: Bound States // JCAP. 2018. Т. 1804, № 04. С. 038.

106. Mai Manuel, Schweitzer Peter. Energy momentum tensor, stability, and the D-term of Q-balls // Phys. Rev. 2012. Т. D86. С. 076001.
107. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963.
108. Marques Gil C., Ventura Ivan. Resonances Within Nonperturbative Methods in Field Theories // Phys. Rev. 1976. Т. D14. С. 1056.
109. Friedberg R., Lee T. D., Pang Y. Mini-soliton stars // Phys. Rev. 1987. Т. D35. С. 3640.