

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО СОВЕТА Д 002.119.01
НА БАЗЕ Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН)
ПО ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

ДОКТОРА НАУК

аттестационное дело № _____

решение диссертационного совета от **30.06.2022** г. № **6/79**

О присуждении **Слепцову Алексею Васильевичу**, гражданину РФ, ученой степени доктора физико-математических наук.

Диссертация «Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых б_j-символов» по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика, – принята к защите 24 марта 2022 года, протокол № 2/75, диссертационным советом Д 002.119.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН), 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 7а., приказ Министерства образования и науки России № 75/нк от 15 февраля 2013 года.

Соискатель Слепцов Алексей Васильевич, 1987 года рождения, диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «Сравнительный анализ различных представлений корреляционных функций в теории Черна-Саймонса» защитил в 2014 году, в диссертационном совете, созданном на базе Федерального государственного бюджетного учреждения «Государственный научный центр Российской Федерации – Институт Теоретической и Экспериментальной Физики». А.В. Слепцов работает старшим научным сотрудником в Курчатовском комплексе теоретической и экспериментальной физики Федерального государственного бюджетного учреждения "Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт".

Диссертация выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении «Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» (Лаборатория методов математической физики).

Официальные оппоненты:

1. **Решетихин Николай Юрьевич**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет", кафедра квантовой механики физического факультета, главный научный сотрудник;
2. **Славнов Никита Андреевич**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук, отдел теоретической физики, заведующий;
3. **Спиридонов Вячеслав Павлович**, доктор физико-математических наук, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория теоретической физики, начальник сектора; дали положительные отзывы на диссертацию.

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН), (г.Москва) в своем положительном отзыве, подписанном Семихатовым Алексеем Михайловичем (доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории теории фундаментальных взаимодействий ФИАН); утвержденном Рябовым Владимиром Алексеевичем (доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе ФИАН) указала, что диссертация Слепцова Алексея Васильевича «Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых б_j-символов» соответствует всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а её автор Алексей Васильевич Слепцов заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика.

Соискатель имеет 46 опубликованных работ, в том числе по теме диссертации 21 работу, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях. Целью диссертации явилось построение методов вычисления квантовых инвариантов

узлов и квантовых $6j$ -символов, а также описание и исследование их различных свойств, в первую очередь, симметрий.

В диссертации представлены результаты, опубликованные в российских и зарубежных журналах в период с 2015 по 2021 гг. Представленные соискателем сведения об опубликованных им работах, в которых изложены основные научные результаты диссертации, достоверны. Текст опубликованных работ полностью соответствует тематике диссертации, они написаны либо при решающем участии соискателя, либо им самостоятельно. Наиболее значимые работы по теме диссертации:

1. Mironov A., Morozov A., Sleptsov A. Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links // *Journal of High Energy Physics*. — 2015. — Т. 2015, No 7. — С. 1—35.
2. Mironov A., Morozov A., Morozov And., Sleptsov A. Racah matrices and hidden integrability in evolution of knots // *Physics Letters B*. — 2016. — Т. 760. — С. 45—58.
3. Mironov A., Morozov A., Sleptsov A. On $6j$ -symbols for symmetric representations of $U_q(\mathfrak{su}_N)$ // *JETP Letters*. — 2017. — Т. 106, No 10. — С. 630—636.
4. Mironov A., Mironov S., Mishnyakov V., Morozov A., Sleptsov A. Coloured Alexander polynomials and KP hierarchy // *Physics Letters B*. — 2018. — Т. 783. — С. 268—273.
5. Morozov A., Sleptsov A. New Symmetries for the $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ $6j$ Symbols from the Eigenvalue Conjecture // *JETP Letters*. — 2018. — Т. 108, No 10. — С. 697—704.
6. Alekseev V., Morozov A., Sleptsov A. Multiplicity-free $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ $6j$ symbols: Relations, asymptotics, symmetries // *Nuclear Physics B*. — 2020. — Т. 960. — С. 115164.
7. Lanina E., Sleptsov A., Tselousov N. Chern-Simons perturbative series revisited // *Physics Letters B*. — 2021. — Т. 823. — С. 136727.
8. Mishnyakov V., Sleptsov A., Tselousov N. A Novel Symmetry of Colored HOMFLY Polynomials Coming from $\mathfrak{sl}(N|M)$ Superalgebras // *Communications in Mathematical Physics*. — 2021. — Т. 384, No 2. — С. 955—969.

9. Mishnyakov V., Sleptsov A., Tselousov N. A new symmetry of the colored Alexander polynomial // *Annales Henri Poincaré*. Т. 22. —Springer. 2021. — С. 1235—1265.
10. Mishnyakov V., Sleptsov A. Perturbative analysis of the colored Alexander polynomial and KP soliton τ -functions // *Nuclear Physics B*. — 2021. — Т. 965. — С. 115334.
11. Alekseev V., Morozov A., Sleptsov A. Interplay between symmetries of quantum b_j -symbols and the eigenvalue hypothesis // *Letters in Mathematical Physics*. — 2021. — Т. 111, No 2. — С. 1—29.
12. Shakirov S., Sleptsov A. Quantum Racah matrices and 3-strand braids in representation [3,3] // *Journal of Geometry and Physics*. — 2021. — Т. 166. — С. 104273.

На диссертацию и автореферат поступили отзывы оппонентов и ведущей организации. В них отмечено, что работа посвящена актуальным научным проблемам и выполнена на высоком уровне. Полученные А.В. Слепцовым результаты являются новыми и оригинальными. В качестве критических замечаний указаны:

1. Симметрическая группа S_n часто называется симметричной, аналогичная путаница с представлениями. Непонятен термин «отступы S_n » (с.177) и «преобразование пробелов в производящие функции» (с.178).
2. Имеются проблемы с используемыми терминами. Например, в пределах одного абзаца из шести строк на с.51 зацепление названо ссылкой, затем звеном и далее связкой, без каких-либо пояснений.
3. Из фразы «Как результат, запишем следующую производящую функцию [формула (3.11)]» неясно, в каком смысле запись является результатом, и результатом чего именно.
4. Фраза «можно записать набор ограничений на представления» (с.59) никак не поясняет, откуда следуют приводимые (и существенные для дальнейшего) ограничения.
5. Формула (2.20), помещенная в рамку на с.89, характеризуется там как «Наш основной результат». Но на с.100 эта же формула (2.20) названа «нашей

- основной гипотезой». Подобные неоднозначности в модальности затрудняют восприятие как текста самого по себе, так и полученных результатов.
6. В главу 4 включены, как сказано на с.174, «две части из учебников». Неясно, каким образом обзорно-педагогический материал разделов 4.7.1 и 4.7.2 связан с результатами диссертации.
 7. Гипотеза о собственных значениях формулируется заново в главе 5 на с.242 как Гипотеза 3, как будто она не обсуждалась в предшествовавшей части диссертации.
 8. В рамках главы 5 гипотеза о собственных значениях обсуждается дважды без очевидной связи этих двух экскурсов, и определения коэффициентов Рака и b_j -символов даны дважды: это Определения 7 и 8 (с.207) и Определения 16 и 17 (с.239).
 9. В главе 5 дано доказательство гипотезы о собственных значениях для симметрических представлений; было бы нелишним обсудить возможные следствия отсюда для рассмотрения в главе 1, где симметрические представления явным образом присутствуют, но, например, результату в формуле (1.47) предпослано замечание «Если гипотеза о собственных значениях верна, ...»
 10. Связь между b_j -символами $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ обсуждается в главе 5 без отсылки к предыдущим главам диссертации.
 11. Текст изобилует несогласованиями в падеже и роде, типичны такие фразы, как «собственные значения квантового R-матрица, составленного из...» (с.83). Путаются слова «отношение» и «соотношение» (с.80), «величины» названы «количествами», сокращения (такие как ЛМОВ) многократно употребляются без указания, как они раскрываются, ряд определений повторяется более одного раза, с легкой вариацией в обозначениях (например, определение квантового следа на с.52 и с.80; формулы для собственных значений R-матриц сообщаются многократно).
 12. Непонятна фраза «для достаточно больших k , превышающих A-способности определенных $h(q,A)$, не может быть одного звонка...» (с.185); при этом в диссертации не дается определения A-способностей и звонка.

13. Результаты главы 4 не упомянуты среди результатов диссертационной работы.
14. В главе 4 дана ссылка [150] на веб-сайт www.knotebook.org, а там в разделе «Current participants of the project» в настоящий момент указаны 15 участников, в связи с чем полезны были пояснения о «нашем» сайте.
15. На с.151 заявлено, что приведенные на сайте «таблицы ЛМОВ – это в точности результаты настоящей работы», что едва ли должно относиться ко всем результатам диссертации.
16. В оформлении литературы формат «Автор-Заглавие» произвольно чередуется с форматом «Заглавие/Автор»; при цитировании ряда работ ([43], [48], [50], [219]), на которые согласно перечислению работ автора, на с.42, опирается диссертация, фамилии и самого диссертанта, и некоторых соавторов почему-то не приведены, а заменены сокращением «et all»
17. Ни в результатах, ни во введении не упомянуты тау-функции Гурвица, которым посвящено немало места в главе 4.
18. В тексте есть небрежности, например, на с.64 предлагается использовать «результаты разделов 3 и 4», но в диссертации есть только глава 3 и глава 4, относящиеся к другому кругу вопросов.
19. В тексте диссертации встречаются повторы, опечатки, стилистические погрешности и специализированное изложение материала в некоторых местах.

В отзывах указано, что отмеченные недостатки не влияют на качество представленных результатов и не снижают общий уровень диссертации. Во всех отзывах сделан вывод о том, что диссертация соответствует всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а её автор Алексей Васильевич Слепцов заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика.

Выбор официальных оппонентов и ведущей организации обосновывается их высокой научной квалификацией, полученными ими научными результатами

мирового уровня и многолетним опытом научных исследований по сходной тематике.

Диссертационный совет отмечает, что **на основании выполненных соискателем исследований:**

1. Разработан алгоритм (метод старшего веса) вычисления квантовых b_j -символов произвольных конечномерных представлений алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ для произвольного N и при общих значениях параметра квантовой деформации q . Алгоритм опирается на развитый автором подход с использованием пространств кратностей представлений и построением специальных ортонормированные базисов в этих пространствах. Применение алгоритма позволило впервые вычислить квантовые матрицы b_j -символов для ряда представительных примеров несимметрических представлений с кратностями.
2. Предложенный алгоритмический метод старшего веса использован для явного вычисления квантовых инвариантов узлов и зацеплений в частном, но представительном классе, для которого эти инварианты ранее не были известны (3-нитевые узлы и зацепления, раскрашенные несимметрическими представлениями алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ для любых N , отвечающими диаграммам Юнга с двумя крюками и не более чем шестью клетками). Результаты согласуются с несколькими известными, но остающимися недоказанными, гипотезами о квантовых инвариантах 3-нитевых узлов, раскрашенных несимметрическими представлениями: гипотеза факторизации, гипотеза универсальности, дифференциальное разложение и разложение эт Хофта.
3. Предложен метод, позволяющий установить наличие бесконечного числа симметрий b_j -символов для конечномерных представлений $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ при $N \geq 3$.
 - 3.1 Для представлений без кратностей показано, что найденные симметрии содержат нетривиальные обобщения конечной группы симметрий, известной для $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (симметрии тетраэдра и Редже, продолжение которых на общий случай $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ ранее не ожидалось).
 - 3.2 Для представлений с кратностями выдвинута гипотеза о существовании симметрий b_j -символов, которые индуцируются двухпараметрическим семейством перестроек диаграмм Юнга, определяющих представления

$U_q(\mathfrak{sl}_N)$. Эти перестройки, названные тяни-крюк в соответствии с их диаграммной реализацией, порождают отображения между шестерками представлений, оставляющие b_j -символы инвариантными. Для семейства перестроек тяни-крюк найдены явные формулы.

4. Установлено, что квантовые b_j -символы для симметрических и сопряженных к ним $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -представлений при произвольном N пропорциональны квантовым b_j -символам для представлений алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, определяемых перестройками диаграмм Юнга, которые отвечают исходным $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -представлениям. Коэффициенты пропорциональности, вообще говоря, нетривиальны и зависят от q , от N и от представлений; установлено, тем не менее, что указанные b_j -символы при произвольном N обладают тем же набором свойств, что и в случае $N=2$. В частности, они являются ортогональными многочленами q -Рака и обладают асимптотикой Понцано-Редже, что открывает возможности приложения полученных в диссертации результатов к теории специальных функций и трехмерной квантовой гравитации.
5. Для обширного класса g -параметрических крендельных узлов найдена конструкция их квантовых инвариантов в виде сверток универсальных R -матриц, которые реализуют представление 2-нитевых узлов на косах специального вида (ширины 4). В сочетании с полученными в диссертации результатами для b_j -символов отсюда получены явные аналитические формулы квантовых инвариантов всех крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими представлениями алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_N)$.
6. Показано, что симметрии b_j -символов тяни-крюк индуцируют класс симметрий квантовых инвариантов узлов и зацеплений, раскрашенных $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -представлениями. Установлено происхождение этих симметрий в пертурбативном и непертурбативном построении вильсоновских средних в теориях Черна-Саймонса соответственно с калибровочной группой $SU(N)$ и супергруппой $SU(N+M|M)$. Это дает прямое описание открытых нами новых симметрий квантовых инвариантов через известные симметрии в соответствующих теориях Черна-Саймонса, а также дополнительное свидетельство в поддержку сформулированной нами гипотезы о b_j -символах.

7. Построенные симметрии квантовых инвариантов типа тяни-крюк позволили установить взаимно однозначное соответствие между групповыми структурами квантовых инвариантов узлов в конкретной специализации и подмножеством дисперсионных соотношений для солитонных решений в интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили. С использованием методов теории интегрируемых систем отсюда получены явные аналитические выражения для всех групповых структур в теории Черна-Саймонса в специализации, отвечающей цветным полиномам Александра. Это, в частности, дает аналитическую зависимость групповых структур от представлений $SU(N)$, что существенно облегчает вычисления важных классов инвариантов узлов и зацеплений (инвариантов Васильева).

Совокупность перечисленных результатов можно квалифицировать как крупное научное достижение.

Теоретическая значимость исследования обоснована тем, что в работе рассмотрены фундаментальные вопросы, касающиеся симметрий в квантовой теории поля. Разработаны методы вычисления квантовых b_j -символов для произвольных конечномерных представлений квантовой алгебры $sl(N)$ для произвольных N и при общих значениях параметра квантовой деформации q ; разработаны методы построения симметрий квантовых b_j -символов. На основе полученных результатов для квантовых b_j -символов разработаны методы вычисления квантовые инварианты узлов и зацеплений, раскрашенные произвольными конечномерными представлениями квантовой алгебры $sl(N)$ и получены явные аналитические формулы для квантовых инвариантов различных представительных классов узлов и зацеплений. Найдены новые симметрии квантовых инвариантов узлов и зацеплений.

Значение полученных соискателем результатов исследования для практики подтверждается тем, что полученные результаты могут быть использованы для построения топологического квантового компьютера и разработки алгоритмов квантового программирования, для описания заузленных молекул ДНК и некоторых протеинов, для создания переплетенных молекул.

Оценка достоверности результатов выявила, что достоверность полученных результатов обеспечивается обоснованностью применяемых

методов исследования и их сравнением с другими подходами, а также публикациями в престижных международных журналах со строгой рецензионной политикой. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами. Работа прошла апробацию на всероссийских и международных конференциях, ее результаты опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Личный вклад соискателя состоит в том, что все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Полученные результаты представлены в виде статей и докладов на семинарах и конференциях. В диссертацию вошли результаты работ, поддержанных грантами под руководством А.В. Слепцова, а также грантов, где автор выступил в роли исполнителя.

На заседании, проведенном 30 июня 2022 года, диссертационный совет принял решение присудить Слепцову А.В. ученую степень доктора физико-математических наук.

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве **19** человек, из них **5** докторов наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика, участвовавших в заседании, из **27** человек, входящих в состав совета, дополнительно введены на разовую защиту 0 человек, проголосовали: за - **18**, против - **1**.

Председатель
диссертационного совета Д 002.119.01
академик РАН

_____ Рубаков В.А.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.119.01
кандидат физ.-мат. наук

_____ Демидов С.В.

30.06.2022 г.

м.п.