

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

На правах рукописи

Сорокин Вячеслав Вадимович

**УРОВНИ ЭНЕРГИИ МЮОННОГО ДЕЙТЕРИЯ В
КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Специальность 01.04.02 —

«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
А. П. Мартыненко

Самара — 2019

Оглавление

| | Стр. |
|---|------|
| Введение | 4 |
| Глава 1. Сверхтонкая структура спектра S-состояний | 12 |
| 1.1 Квазипотенциальный метод в задаче о связанных состояниях . . . | 12 |
| 1.2 Современные экспериментальные результаты по мюонным атомам | 18 |
| 1.3 Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума . . . | 27 |
| 1.4 Поправки на структуру и отдачу ядра | 41 |
| 1.5 Сверхтонкая структура мезомолекулярных ионов водорода | 48 |
| Глава 2. Сверхтонкая структура спектра P-состояний | 61 |
| 2.1 Поправки на поляризацию вакуума | 61 |
| 2.2 Вклад квадрупольного взаимодействия | 72 |
| 2.3 Поправки на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии | 76 |
| Глава 3. Радиационные поправки в тонкой и сверхтонкой структуре спектра | 82 |
| 3.1 Поправки на конечный размер ядра порядка $\alpha(Z\alpha)E_F$ в сверхтонкой структуре S-состояний | 82 |
| 3.2 Поправки на структуру ядра порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге | 91 |
| 3.3 Поправки на структуру ядра с отдачей порядка $\alpha(Z\alpha)m_1/m_2E_F$ в сверхтонкой структуре S-состояний | 96 |
| Заключение | 109 |
| Список литературы | 111 |

| | |
|---|-----|
| Приложение А. Релятивистские поправки в сверхтонкой структуре S- и P-состояний | 128 |
| Приложение Б. Тензорные операторы и теорема Вигнера — Эккарта | 135 |
| Приложение В. Кулоновская функция Грина | 140 |

Введение

Изучение простейших водородоподобных (ВП) атомных систем играет важную роль в современной физике. Физические теории могут быть применены к таким системам без существенных приближений, а благодаря простой структуре энергетического спектра высока точность экспериментальных данных. Это делает такие системы идеальными объектами для экспериментальной проверки теоретических предсказаний и получения точных значений фундаментальных физических констант (постоянная тонкой структуры, массы лептонов, постоянная Ридберга, зарядовые радиусы ядер, радиусы Земаха).

Экспериментальное исследование энергетического спектра атома водорода привело к открытию лэмбовского сдвига [1; 2]. Это открытие послужило толчком к развитию современной релятивистской квантовой электродинамики (КЭД) [3] и теории связанных состояний. Относительная простота энергетического спектра ВП атомов позволила как выполнять точные спектроскопические эксперименты, так и вычислять различные теоретические вклады в тонкую и сверхтонкую структуру уровней ВП атомов с высокой точностью. Важно отметить, что большая часть теоретических вкладов в энергетическую структуру ВП атомов может быть получена в аналитическом виде. Современные исследования связанных состояний частиц позволяют осуществить проверку Стандартной модели с высокой точностью, проводить поиск эффектов Новой физики.

Уровни энергии простейших атомов могут быть исследованы с высокой степенью точности в рамках теории возмущений в квантовой электродинамике, ввиду малости константы взаимодействия. Интерес для изучения представляют конкретные переходы между энергетическими уровнями данных систем, доступные для экспериментального измерения [4]. Данные переходы определяются различными КЭД эффектами, эффектами отдачи, структуры и поляризуемости ядра и, таким образом, содержат в себе информацию о параметрах ядра

(зарядовый радиус, радиус Земаха), которые могут быть найдены с высокой точностью при сравнении теории и эксперимента.

На протяжении долгого времени основными ВП атомами, доступными экспериментальному исследованию, оставались электронные ВП атомы и ионы, а также атомы мюония и позитрония. Детальные теоретические предсказания и экспериментальные измерения для таких атомов позволили получить точные значения фундаментальных физических констант и выполнить проверку квантовой электродинамики и теории связанных состояний. С 2010 г. начался новый этап в изучении простейших двухчастичных атомов, который связан с мюонными ВП атомами и ионами. Мюон тяжелее электрона в $m_\mu/m_e = 206.7682838(54)$ раз [5], что приводит к уменьшению боровского радиуса мюона по сравнению с электроном и более сильному перекрытию волновой функцией области ядра. Это, в свою очередь, приводит к возрастанию роли КЭД эффектов, эффектов отдачи и структуры ядра в энергетическом спектре мюонных ВП атомов. Особенно важна большая чувствительность мюонных ВП атомов к эффектам структуры ядра, что делает их идеальными объектами для изучения свойств ядер и позволяет на порядок увеличить точность получения зарядовых радиусов ядер. Измерение тонкой и сверхтонкой структуры в атомах мюонного водорода, мюонного дейтерия и ионах мюонного гелия является крайне важной метрологической задачей и позволяет получить с точностью 0.0005 фм значения зарядовых радиусов протона, дейтрона, гелиона и α -частицы, а также получить прецизионные значения радиусов Земаха этих ядер, уточнить величину постоянной Ридберга и выполнить проверку квантовой электродинамики и теории связанных состояний с высокой точностью [6–15].

В последние годы, значительный теоретический интерес к тонкой и сверхтонкой структуре спектра энергии легких мюонных атомов (мюонного водорода, мюонного дейтерия, мюонного трития, ионов мюонного гелия, лития, бериллия, бора) обусловлен прогрессом экспериментальной коллаборации CREMA (Charge Radius Experiment with Muonic Atoms) в спектроскопии таких

атомов [6; 7; 10–18]. Эксперимент по спектроскопии атома мюонного водорода [6; 7], в котором были измерены частоты переходов $2S_{1/2}^{F=1} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=2}$ и $2S_{1/2}^{F=0} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=1}$, позволил получить величину лэмбовского сдвига и сверхтонкой структуры $2S$ -состояния. В результате было получено на порядок более точное значение зарядового радиуса протона $r_E = 0.84087(39)$ фм. Полученный зарядовый радиус протона отличается от значения CODATA на 7.0σ . Данное расхождение, которое так и не получило теоретического или экспериментального объяснения, было названо «загадкой радиуса протона». Методом лазерной спектроскопии была измерена тонкая и сверхтонкая структура атома мюонного дейтерия [12]. В результате было получено новое значение зарядового радиуса дейтрона, на 7.5σ отличающееся от значения CODATA. Таким образом, новый эксперимент только укрепил «загадку радиуса протона». Эксперименты с мюонным водородом и мюонным дейтерием дают новые уточненные значения и для радиусов Земаха протона и дейтрона, а также для постоянной Ридберга. Коллаборацией CREMA были также выполнены измерения различных частот переходов в ионах мюонного гелия [13; 16]. Данные по этим экспериментам находятся в стадии обработки. Также необходимо отметить дополнительные эксперименты по спектроскопии электронного водорода и дейтерия [14; 15; 18–21], выполненные другими международными экспериментальными группами.

Эксперименты коллаборации CREMA с легкими мюонными атомами, призванные на порядок улучшить точность зарядовых радиусов протона, дейтрона, гелиона и α -частицы, требуют прецизионных теоретических расчетов различных интервалов тонкой и сверхтонкой структуры спектра энергии мюонных атомов [6; 22–27]. Теоретические расчеты основных вкладов в энергетические интервалы $(2P_{3/2} - 2S_{1/2})$, $(2P_{1/2} - 2S_{1/2})$ спектра мюонного водорода были выполнены много лет назад в работах [8; 9; 28–35] на основе уравнения Дирака и нерелятивистского уравнения Шредингера. Несмотря на высокую точность теоретических расчетов энергии мюонных ВП атомов [3], теоретическая ошибка все еще остается сравнительно большой и превосходит ошибку эксперимента.

Это связано с поправками на структуру и поляризуемость ядра к лэмбовскому сдвигу и сверхтонкой структуре. Увеличения точности вычисления таких поправок можно достичь за счет новых экспериментальных исследований структуры и поляризуемости протона, дейтрона и других ядер, так как это позволит уточнить их электромагнитные формфакторы, входящие в интегральные выражения для поправок.

Атом мюонного дейтерия (μd) представляет собой связанное состояние отрицательного мюона и дейтрона. Его время жизни связано с временем распада мюона $\tau_\mu = 2.19703(4) \cdot 10^{-6}$ с. Большая масса мюона по сравнению с электроном приводит к росту трех важных эффектов в спектре энергии атома мюонного дейтерия: электронной поляризации вакуума, структуры ядра и отдачи. Первый из вышеупомянутых эффектов важен для мюонного дейтерия, так как отношение комптоновской длины волны электрона к радиусу боровской орбиты в атоме мюонного дейтерия $\mu Z\alpha/m_e \approx 0.7$, то есть близко к единице. Эффект структуры дейтрона возрастает по сравнению с электронными атомами, из-за большего перекрытия волновой функцией мюона области распределения заряда ядра. Рост эффектов отдачи связан с тем, что отношение масс мюона и ядра $m_\mu/m_d \approx 0.056$ превосходит значение постоянной тонкой структуры $\alpha^{-1} = 137.035999074(44)$. **Целью** работы является прецизионный аналитический и численный расчет тонкой и сверхтонкой структуры спектра мюонного дейтерия в рамках квазипотенциального подхода в квантовой электродинамике. Были вычислены поправки порядка α^5 и α^6 для S- и P-состояний на поляризацию вакуума, структуру ядра и отдачу, квадрупольное взаимодействие, радиационные поправки в первом, втором и третьем порядках теории возмущений. В соответствии с поставленной целью были выделены следующие **задачи**:

1. Провести расчет сверхтонкой структуры S-состояний в мюонном дейтерии с учетом поправок пятого и шестого порядка по постоянной тонкой структуры;

2. Провести расчет сверхтонкой структуры P-состояний в мюонном дейтерии с учетом поправок пятого и шестого порядка по постоянной тонкой структуры;
3. Выполнить расчет радиационных поправок в лептонную линию с учетом структуры ядра к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре S-состояний;
4. Выполнить расчет радиационных поправок в лептонную линию с учетом структуры ядра к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге;
5. Провести расчет уровней энергии мезомолекул водорода в рамках стохастического вариационного метода, включая сверхтонкое расщепление, с учетом поправок на поляризацию вакуума, структуру ядра и релятивизм.

Научная новизна:

1. На основе квазипотенциального метода в квантовой электродинамике были рассчитаны различные поправки порядка α^5 и α^6 к сверхтонкой структуре S-состояний атома мюонного дейтерия, включая радиационные поправки в лептонную линию со структурой ядра без отдачи и с отдачей к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$. Точность расчета сверхтонкой структуры S-состояний мюонного дейтерия была увеличена на порядок по сравнению с предыдущими расчетами. Впервые вычислены поправки на двухпетлевую поляризацию вакуума во втором порядке теории возмущений, поправка на поляризацию вакуума в третьем порядке теории возмущений и поправки на конечный размер ядра в однофотонном взаимодействии в первом и втором порядках теории возмущений.
2. Проведен расчет новых поправок на поляризацию вакуума в сверхтонкой структуре P-состояний, что позволило значительно увеличить точность расчета сверхтонкой структуры 2P-состояния мюонного дейтерия. Двухпетлевые поправки на поляризацию вакуума в первом и

втором порядках теории возмущений, а также поправка на поляризацию вакуума в третьем порядке теории возмущений были вычислены впервые для сверхтонкой структуры P-состояний. Впервые вычислена поправка на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии.

3. Впервые вычислены радиационные поправки в лептонную линию со структурой ядра без отдачи к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге. Для построения квазипотенциала по амплитуде взаимодействия был использован метод проекционных операторов, что позволило получить конечные интегральные выражения для каждой из поправок в отдельности.
4. В рамках стохастического вариационного метода проведен новый расчет энергии основного состояния мезомолекул водорода, включая сверхтонкую структуру спектра, в котором учтены релятивистские эффекты, эффекты поляризации вакуума и структуры ядра.

Практическая значимость работы связана с экспериментальными исследованиями коллаборации CREMA. Полученные теоретические результаты для тонкой и сверхтонкой структуры спектра энергии атома мюонного дейтерия использовались коллаборацией CREMA для анализа экспериментальных данных по частотам перехода.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Выполнен расчет поправок пятого и шестого порядка по постоянной тонкой структуры на поляризацию вакуума, структуру и отдачу ядра, релятивизм, сложные комбинированные поправки, включающие перечисленные, радиационные поправки в мюонную линию с учетом структуры ядра без отдачи и с отдачей к двухфотонным обменным амплитудам в сверхтонкой структуре спектра S-состояний мюонного дейтерия. Получены наиболее точные значения сверхтонких расщеплений S-состояний.
2. Проведен расчет поправок пятого и шестого порядка по постоянной тонкой структуры на поляризацию вакуума, структуру и отдачу ядра,

релятивизм, сложные комбинированные поправки, включающие перечисленные в сверхтонкой структуре спектра P-состояний мюонного дейтерия. Получены наиболее точные значения сверхтонких расщеплений P-состояний.

3. Вычислены радиационные поправки в мюонную линию с учетом структуры ядра без отдачи к двухфотонным обменным амплитудам в лэмбовском сдвиге мюонного дейтерия.
4. Проведен расчет энергии основного состояния мезомолекул водорода с учетом сверхтонкой структуры спектра энергии в рамках стохастического вариационного метода. Вычислены релятивистские поправки, поправки на поляризацию вакуума и структуру ядра.

Достоверность обеспечивается использованием строгих математических методов и хорошим согласием с результатами расчета отдельных поправок, полученных в других работах. Полученные результаты базируются на использовании квазипотенциального метода, который успешно применяется при описании связанных состояний в квантовой электродинамике. Рассчитанная в данной работе величина сверхтонкой структуры 2S-состояния мюонного дейтерия согласуется с экспериментальными результатами коллаборации CREMA.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на многочисленных конференциях Самарского университета и семинарах кафедры общей и теоретической физики, а также докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях: III и IV международная конференция «Математическая физика и ее приложения», г. Самара, 27 августа — 1 сентября 2012 г. и 25 августа — 1 сентября 2014 г.; 55-я всероссийская молодежная научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», г. Долгопрудный, МФТИ, 19 — 25 ноября 2012 г.; XVIII международная научная конференция объединения молодых ученых и специалистов ОИЯИ (ОМУС), г. Дубна, ЛТФ ОИЯИ, 24 — 28 февраля 2014 г.; Международная сессия — конференция секции ядерной физики ОФН РАН, г. Москва, НИЯУ МИФИ, 17 — 21 ноября 2014 г.; Всероссийское совещание по

прецизионной физике и фундаментальным физическим константам ФФК-2014, г. Дубна, ОИЯИ, 1 — 5 декабря 2014 г.; Международная сессия — конференция секции ядерной физики ОФН РАН посвященная 60-летию ОИЯИ, г. Дубна, ЛТФ ОИЯИ, 12 — 15 апреля 2016 г.; XXV Съезд по спектроскопии, г. Троицк Москва, ИСАН, 3 — 7 октября 2016 г.; Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий», г. Нальчик, Кабардино-Балкарский государственный университет, 6 — 8 июня 2017 г.; XV и XVI Всероссийский молодежный самарский конкурс — конференция научных работ по оптике и лазерной физике, г. Самара, ФИАН, 14 — 18 ноября 2017 г. и 13 — 17 ноября 2018 г.; Международный Семинар по электромагнитным взаимодействиям ядер (EMIN), г. Москва, ИЯИ РАН, 08 — 11 октября 2018 г.; IV Международная конференция по физике частиц и астрофизике, г. Москва, МИФИ, 22 — 26 октября 2018 г.; V Международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019), Самара, Самарский университет 21 — 24 мая 2019 г.

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами. Все новые результаты по расчету уровней энергии мюонного дейтерия, представленные в диссертации, получены лично автором или в неразделимом соавторстве. Диссертант лично представил доклады на перечисленных выше научных конференциях.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в **23** печатных изданиях, **8** из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [36—43], **15** — в тезисах докладов [44—58].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и трёх приложений. Полный объём диссертации составляет 144 страницы, включая 18 рисунков и 7 таблиц. Список литературы содержит 151 наименование.

Глава 1. Сверхтонкая структура спектра S -состояний

1.1 Квазипотенциальный метод в задаче о связанных состояниях

По мере развития квантовой теории поля менялись и способы описания связанных состояний. Так, например, трехмерное описание позволяет сохранить вероятностную интерпретацию волновой функции, однако нековариантность исходных уравнений приводит к большим затруднениям при перенормировке теории. В рамках четырехмерного релятивистского подхода к проблеме связанных состояний рассмотрим хорошо известное уравнение Бете — Солпитера [59], которое является полностью ковариантным.

Для вывода уравнения Бете — Солпитера запишем двухчастичную функцию Грина в координатном представлении:

$$G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) = \left\langle \Psi_0 \left| T \left[\hat{\psi}_H(x_1) \hat{\psi}_H(x_2) \hat{\psi}_H^\dagger(y_2) \hat{\psi}_H^\dagger(y_1) \right] \right| \Psi_0 \right\rangle, \quad (1.1)$$

где T — хронологическое произведение, $\hat{\psi}_H, \hat{\psi}_H^\dagger$ — полные гейзенберговские операторы полей, Ψ_0 — вакуумное состояние в представлении Гейзенберга. Далее запишем соотношение Гелл-Манна — Лоу между взаимодействующей и невзаимодействующей волновой функцией вакуумного состояния в представлении взаимодействия:

$$c\Psi_0 = \frac{U(0, -\infty)\Phi_0}{\langle \Phi_0 | U(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle}, \quad (1.2)$$

где c — нормировочная константа, которая может быть исключена при помощи соотношения:

$$1 = \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \frac{\langle \Phi_0 | U(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle}{c^2 \langle \Phi_0 | U(\infty, 0) | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0 | U(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle}. \quad (1.3)$$

Применяя выражение (1.2) для (1.1) и используя (1.3), получаем:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \\ &= \frac{\left\langle \Phi_0 \left| U(\infty, 0) T \left[\hat{\psi}_H(x_1) \hat{\psi}_H(x_2) \hat{\psi}_H^\dagger(y_2) \hat{\psi}_H^\dagger(y_1) \right] U(0, -\infty) \right| \Phi_0 \right\rangle}{\langle \Phi_0 | U(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$U(\infty, -\infty) = I + \sum_n \frac{1}{n!} \int U_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.5)$$

$$U_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T \{ L_{int}(x_1) \dots L_{int}(x_n) \}, \quad L_{int}(x) = e \bar{\varphi}(x) \gamma_\mu \varphi(x) A_\mu(x). \quad (1.6)$$

В результате возникает набор связанных диаграмм с четырьмя внешними фермионными линиями. Набор диаграмм можно упорядочить, определив двухчастично неприводимое ядро $K_{12}(x_1, x_2; x_3, x_4)$ как сумму двухчастично неприводимых диаграмм (диаграмм, которые нельзя разделить на две несвязанные части прямой, проходящей один раз через линии частиц и не пересекающей линии квантов). Из определения K_{12} получаем, что четырехточечная функция G_{12} удовлетворяет уравнению Бете — Солпитера:

$$\begin{aligned} G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) = & G_1(x_1 - y_1) G_2(x_2 - y_2) + \\ & + \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \int d^4 z'_1 \int d^4 z'_2 G_1(x_1 - z_1) G_2(x_2 - z_2) \times \\ & \times K_{12}(z_1, z_2; z'_1, z'_2) G_{12}(z'_1, z'_2; y_1, y_2), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $G_{1,2}$ — точные фейнмановские пропагаторы дираковских частиц. Графически, уравнение может быть интерпретировано рисунком 1.1. Ядро уравнения задается бесконечной суммой фейнмановских диаграмм, часть которой представлена на рисунке 1.2.

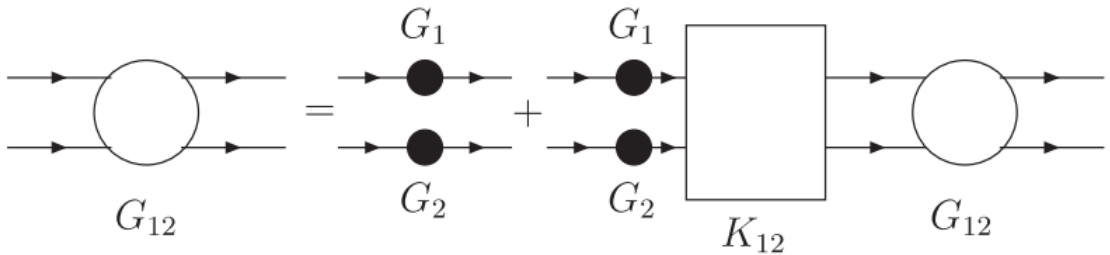


Рисунок 1.1 — Графическая интерпретация уравнения Бете — Солпитера

В импульсном представлении уравнение Бете — Солпитера для двухчастичной амплитуды может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} [\eta_1 P + \hat{p} - m_1 - M_1(p)] [\eta_2 P - \hat{p} - m_2 - M_2(p)] \Psi_{P\alpha}(p) = \\ = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_{12}(p, q, P) \Psi_{P\alpha}(q), \end{aligned} \quad (1.8)$$

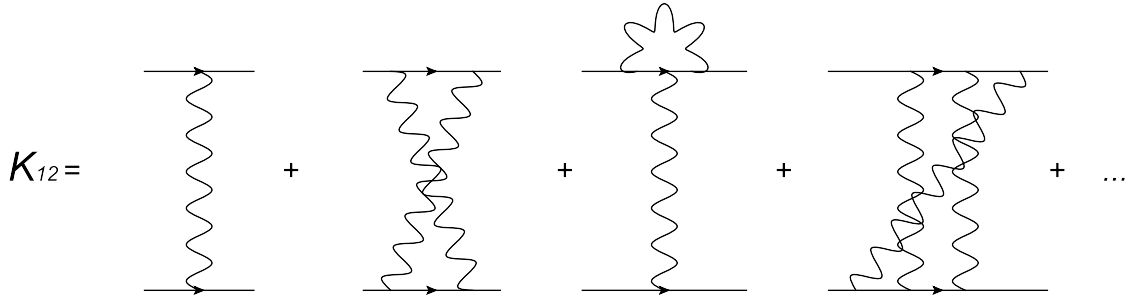


Рисунок 1.2 — Графическая интерпретация ядра уравнения Бете — Солпитера

где $\eta_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M^2}$, $\eta_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M^2}$, M — масса связанного состояния, $P = p_1 + p_2$ — полный импульс системы, $p = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2$ — относительный импульс в начальном состоянии, $\psi_{P\alpha}(p)$ — двухчастичная амплитуда Бете — Солпитера.

Необходимо выделить некоторые основные особенности уравнения Бете — Солпитера:

1. Ядро уравнения K_{12} в системе центра масс зависит от массы связанного состояния M .
2. Ядро уравнения K_{12} может иметь мнимую часть.
3. Двухчастичная амплитуда $\psi_{P\alpha}(p)$ зависит от четырехмерной переменной, а в уравнении есть интегрирование по четырехмерной переменной.

Двухчастичная амплитуда или волновая функция Бете — Солпитера $\psi_{P\alpha}$ сильно отличается по своим свойствам от нерелятивистской шредингеровской волновой функции. Норма волновой функции $\psi_{P\alpha}$ не является положительно определенной, что исключает обычную вероятностную интерпретацию. Кроме того, имеется параметр относительного времени (относительная энергия в импульсном представлении), физический смысл которого совершенно не ясен. В практических приложениях уравнения Бете-Солпитера данный параметр чаще всего исключается тем или иным способом. В связи с этим возникает идея последовательно, с самого начала, исключить данный параметр. Такой метод, предложенный А.А. Логуновым и А.Н. Тавхелидзе, был назван квазипотенциальным [60; 61]. В данном подходе волновая функция связанной системы зависит от одного временного параметра и подчиняется уравнению

типа Шредингера с комплексным, зависящим от энергии и нелокальным ядром - квазипотенциалом.

В импульсном представлении квазипотенциальное уравнение Логунова — Тавхелидзе имеет следующий вид [62]:

$$\begin{aligned} \left(M - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} \right) \Psi_M^{(+)}(\mathbf{p}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) \Psi_M^{(+)}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где M — масса связанного состояния частиц, $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, $P = p_1 + p_2$, $\Psi_M^{(+)}(\mathbf{p})$ — квазипотенциальная волновая функция, спроектированная на положительно частотные состояния, $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$ — квазипотенциал. Квазипотенциал, в отличие от нерелятивистского потенциала, является комплексной функцией и зависит от полной энергии системы. Зависимость от полной энергии системы приводит к более сложному виду нормировки для квазипотенциальной волновой функции:

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\Psi_M^{(+)}(\mathbf{p})|^2 - \int \frac{d\mathbf{p}d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \Psi_M^{*(+)}(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial M} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) \Psi_M^{(+)}(\mathbf{q}) = 2E(\mathbf{P}). \quad (1.10)$$

Квазипотенциальная волновая функция в произвольной системе отсчета ($\mathbf{P} = 0$) выражается через волновую функцию в системе центра масс следующим образом:

$$\Psi_{M,P}(\mathbf{p}) = S_1(L_P) S_2(L_P) \Psi_{M,0}(\mathbf{p}), \quad (1.11)$$

где $S_{1,2}(L_P)$ — матрицы конечномерных представлений группы Лоренца, зависящие от спиновых свойств частиц 1 и 2, L_P — преобразование Лоренца, связывающее две системы отсчета. Квазипотенциал V определяется через спроектированную на положительно частотные состояния двухчастичную амплитуду рассеяния вне массовой поверхности. В КЭД квазипотенциал может быть построен с помощью теории возмущений:

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} + \dots; \quad V^{(1)} = T_{(+)}^{(1)}; \quad V^{(2)} = T_{(+)}^{(2)} - T_{(+)}^{(1)} G^f T_{(+)}^{(1)}, \quad (1.12)$$

где $(+)$ означает проекцию на положительно частотные состояния, G^f — функция Грина свободных частиц. В нерелятивистском приближении уравнение

Логунова — Тавхелидзе (1.9) преобразуется к шредингеровскому виду:

$$\left(W - \frac{p^2}{2\mu}\right)\Psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; W)\Psi(\mathbf{q}), \quad (1.13)$$

где $W = M - m_1 - m_2$, μ — приведенная масса.

Рассмотрим построение квазипотенциала на примере потенциала Брейта. Потенциал Брейта соответствует диаграмме однофотонного взаимодействия. Сначала запишем амплитуду однофотонного взаимодействия для двух фермионов:

$$M = -e^2 (\bar{u}_1' \Gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu}(q) (\bar{u}_2' \Gamma^\nu u_2), \quad (1.14)$$

где u_1, u_2 — спиноры Дирака, $D_{\mu\nu}(q)$ — фотонный пропагатор, вершинные функции Γ^μ имеют следующий вид:

$$\Gamma^\mu = \left[\gamma_\mu \rho(k^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} k^\nu f(k^2) \right], \quad (1.15)$$

где $\rho(0) = e$, $f(0) = e\kappa$, κ — аномальный магнитный момент,

$$k^\nu = (p - q)^\nu. \quad (1.16)$$

Фотонный пропагатор удобно выбрать в кулоновской калибровке:

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2}, D_{0i} = 0, D_{ik} = \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2 - \omega^2/c^2} \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\mathbf{q}^2} \right). \quad (1.17)$$

Явный вид дираковских спиноров [63]:

$$u = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{p^2}{8m^2 c^2}\right) w \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2mc} w \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Используя (1.18), выполняя разложение в (1.14) по степеням (\mathbf{p}^2/m^2) и сохраняя члены первого порядка по данному параметру, получим выражение для

гамильтониана Брейта в импульсном представлении:

$$\begin{aligned}
V^{Breit}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = & \frac{1}{\mathbf{k}^2} \{ G_{E1}(k^2) G_{E2}(k^2) + \\
& + \rho_1(k^2) \rho_2(k^2) \left[\frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{4m_1 m_2} + \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2}{m_1 m_2 k^2} - \frac{\mathbf{k}^2}{8\mu^2} \right] + \\
& + \frac{i}{4m_1} [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] \boldsymbol{\sigma}_1 \rho_2(k^2) \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right) \rho_1(k^2) - \frac{2}{\mu} f_1(k^2) \right] + \\
& + \frac{i}{4m_2} [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] \boldsymbol{\sigma}_2 \rho_1(k^2) \left[\left(\frac{1}{m_2} + \frac{2}{m_1} \right) \rho_2(k^2) + \frac{2}{\mu} f_2(k^2) \right] - \\
& - \frac{1}{4m_1 m_2} G_{M1}(k^2) G_{M2}(k^2) [(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)] \},
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$k^2 = -\mathbf{k}^2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{1.20}$$

Для нахождения вида данного квазипотенциала в координатном представлении необходимо выполнить преобразование Фурье следующего вида:

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} V^{Breit}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \hat{V}^{Breit}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, r). \tag{1.21}$$

Для вычисления необходимо использовать вспомогательные формулы [63]:

$$\begin{aligned}
\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{4\pi}{q^2} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{r}, \\
\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{4\pi\mathbf{q}}{q^2} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} &= \frac{i\mathbf{r}}{r^3}, \\
\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{q^4} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{2r} \left[\mathbf{a}\mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r})}{r^2} \right], \\
\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{q^2} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{a}\mathbf{b} - 3\frac{(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r})}{r^2} \right] + \frac{4\pi}{3} (\mathbf{a}\mathbf{b}) \delta(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{1.22}$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} - постоянные векторы.

Квазипотенциальный метод был задуман в качестве прямого обобщения потенциальной теории двухчастичного взаимодействия на релятивистский случай. Он объединяет удобство трехмерного подхода и возможность вероятностной интерпретации волновой функции с преимуществами полностью ковариантного метода (перенормируемость, аналитичность). Представленные далее вычисления сверхтонкой структуры S- и P-состояний атома мюонного дейтерия выполнены в рамках квазипотенциального подхода в нерелятивистском приближении [64–72]. Релятивистские поправки рассматриваются нами на основе теории Дирака отдельно. Их подробное вычисление представлено в приложении А.

1.2 Современные экспериментальные результаты по мюонным атомам

Как уже упоминалось ранее, в последние годы большой теоретический и экспериментальный интерес связан с мюонными водородоподобными атомами — мюонным водородом, мюонным дейтерием, ионами мюонного гелия. Серия спектроскопических экспериментов коллаборации CREMA с этими атомами позволила получить на порядок более точные значения зарядовых радиусов соответствующих ядер, но также и породила «загадку радиуса протона». Значение зарядового радиуса протона, рекомендованное CODATA [5], находится в заметном расхождении с результатом из эксперимента с мюонным водородом. Значение CODATA получено на основе экспериментов по спектроскопии электронного водорода и электрон-протонного рассеяния. Аналогичная ситуация с расхождением зарядовых радиусов наблюдается и для атома мюонного дейтерия. Исследуем более детально современные экспериментальные результаты по мюонным атомам, а также актуальные эксперименты по спектроскопии электронного водорода.

Результаты первого эксперимента по спектроскопии мюонного водорода были опубликованы в [6]. Эксперимент представляет собой прецизионное измерение лэмбовского сдвига в атоме μp . При помощи импульсной лазерной спектроскопии на длине волны около 6.01 мкм была измерена разность энергий между уровнями $2S_{1/2}^{F=1}$ и $2P_{3/2}^{F=2}$ мюонного водорода. Эксперимент был выполнен на мюонном пучке $\pi E5$ протонного ускорителя института PSI (Paul Scherrer Institute) в Швейцарии. Для эксперимента был использован специальный низкоэнергетический пучок μ^- (кинетическая энергия ~ 5 кэВ), что дало на порядок больше остановленных мюонов в объеме мишени (малом объеме газа низкой плотности), чем при использовании стандартного пучка.

Рассмотрим экспериментальный метод подробнее. Медленные мюоны из низкоэнергетического мюонного пучка попадают в соленоид (5 Тл), где детек-

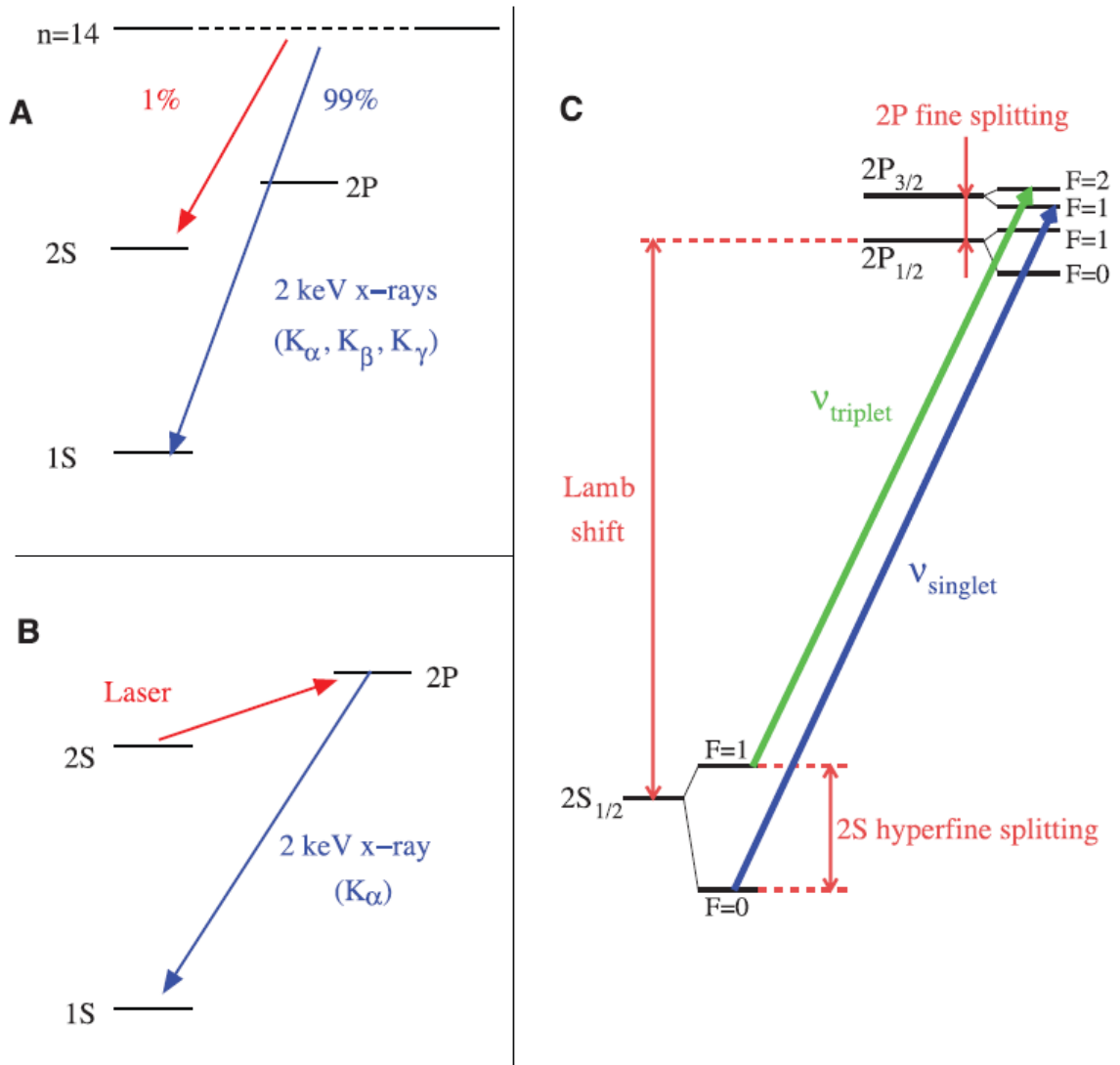


Рисунок 1.3 — Переходы между уровнями энергии атома мюонного водорода в эксперименте коллаборации CREMA. (A) — формирование сильновозбужденных ($n \approx 14$) μp атомов и их последующий переход в основное $1S$ -состояние, (B) — индуцированный коротким лазерным импульсом переход $2S \rightarrow 2P$, сразу за которым следует переход $2P \rightarrow 1S$ с испусканием K_α рентгеновских фотонов, (C) — схема уровней энергии $2P$ и $2S$ атома мюонного водорода с указанием измеренных в ходе эксперимента переходов.

Рисунок взят из работы [7]

тируются, что является триггером для импульсной лазерной системы. Мюоны затем останавливаются в мишени — H_2 газе (давление 1 гПа) и порождают сильно возбужденные ($n \approx 14$) μp атомы. Большинство атомов мюонного водорода быстро переходят в основное $1S$ -состояние, но порядка 1 % атомов переходят в долгоживущее $2S$ -состояние. Этот процесс схематически представлен на рисун-

ке 1.3 (А). Затем, через ~ 0.9 мкс, короткий лазерный импульс с длиной волны $\lambda \approx 6$ мкм, как показано на рисунке 1.3 (В), индуцирует переход $2S \rightarrow 2P$, сразу за которым следует переход $2P \rightarrow 1S$ с энергией 1.9 кэВ (время жизни состояния $2P$ $\tau_{2P} = 8.5$ пс). K_α рентгеновские фотоны детектируются при помощи лавинных диодов большой площади (LAAPDs). Ключевое значение для эксперимента имеет время жизни $2S$ -состояния τ_{2S} . В отсутствии столкновений с молекулами газа время жизни $2S$ -состояния будет равно времени жизни мюона 2.2 мкс. В H_2 газе $\tau_{2S} \approx 1$ мкс при давлении 1 гПа. Количество зафиксированных 1.9 кэВ сигналов показывает наличие исследуемых $2P \rightarrow 1S$ переходов. Время измерения в эксперименте варьировалось от 3 до 13 часов на каждую длину волны лазерного излучения. Временное окно, в течение которого ожидалось сигналы K_α рентгеновских фотонов, равно 75 нс.

В результате была получена резонансная кривая, точки которой представляют собой количество зафиксированных K_α рентгеновских сигналов, нормированных на количество сформированных μp атомов, как функцию от частоты лазерного излучения. График резонансной кривой представлен на рисунке 1.4. При этом количество сформированных μp атомов определяется тем же детектором из LAAPDs как количество сигналов от атомов μp переходящих из сильного возбужденного состояния $n \approx 14$ в $1S$ -состояние (таких атомов порядка 99 %) перед лазерным импульсом, индуцирующим переход $2S \rightarrow 2P$. Статистические погрешности составили 1σ . Систематическая погрешность эксперимента равна 300 МГц. Величина перехода $2S_{1/2}^{F=1} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=2}$ с учетом данных погрешностей составила 49881.88(76) ГГц. Соответствующая переходу энергия равна $\Delta E = 206.2949(32)$ мэВ. Для получения величины зарядового радиуса протона по экспериментальным данным использовалось следующее выражение:

$$\Delta E = 209.9779(49) - 5.2262r_E^2 + 0.0347r_E^3 \text{ мэВ}, \quad (1.23)$$

где $r_E^2 = \int r^2 \rho_E(\mathbf{r}) d^3r$, ρ_E — нормированная плотность распределения заряда в протоне. Энергия перехода ΔE представлена в виде суммы радиационных поправок, поправок на отдачу и структуру протона, а также тонкого и

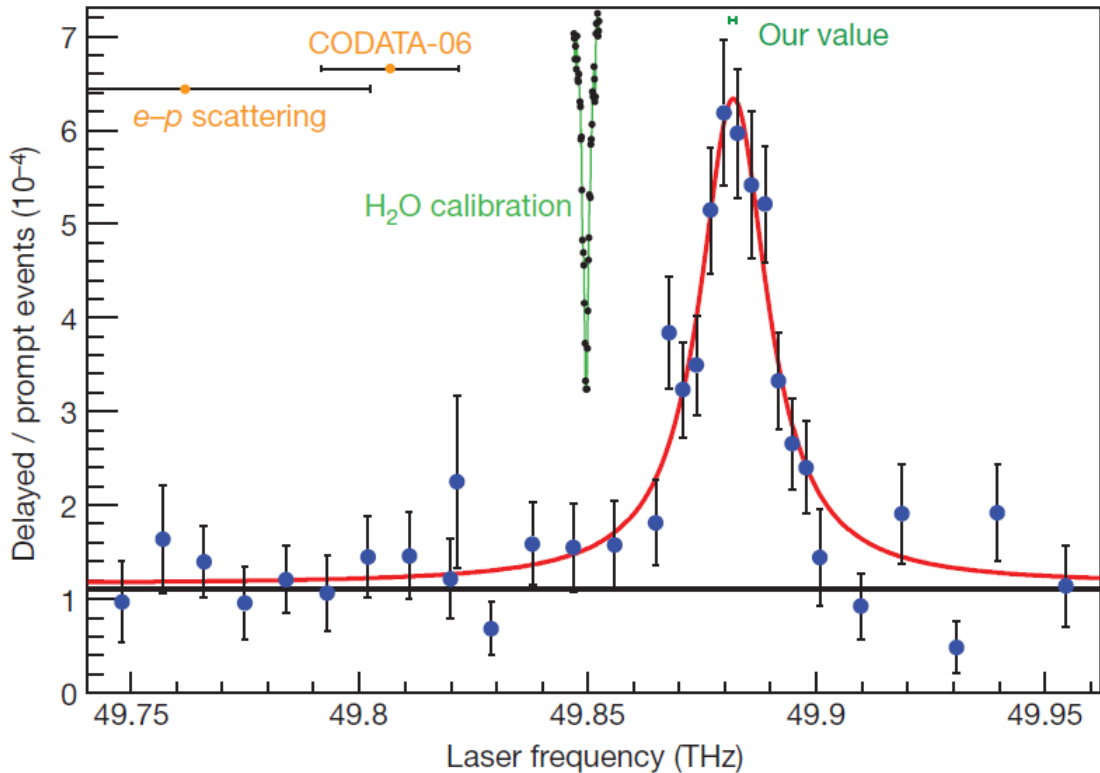


Рисунок 1.4 — Резонансная кривая, полученная в эксперименте коллаборации CREMA с мюонным водородом. Синими точками обозначено количество зафиксированных K_{α} рентгеновских сигналов, нормированных на количество сформированных μp атомов, как функция от частоты лазерного излучения, красная кривая представляет собой фитирующую кривую распределения Лоренца, черная линия — уровень фона, желтыми точками отмечены положения пика кривой, предсказанные по значениям радиуса протона из CODATA и эксперимента по e-p рассеянию, точка «our value» обозначает положение пика кривой текущего эксперимента, зеленая линия обозначает калибровочные измерения. Все погрешности на графике показывают диапазон ± 1 стандартное отклонение. Рисунок взят из работы [6]

сверхтонкого расщепления, вычисленных теоретически. Таким образом, для извлечения величины зарядового радиуса ядра из эксперимента необходимы точные теоретические предсказания для энергетического спектра соответствующего мюонного атома. В результате было получено значение зарядового радиуса протона $r_p = 0.84184(36)(56)$ фм, где первое число в круглых скобках определяет экспериментальную погрешность, а второе — теоретическую. Таким образом, в эксперименте R. Pohl, A. Antognini, F. Nez et al., Nature 466, 213 (2010)

было получено в 10 раз более точное значение зарядового радиуса, чем значение, рекомендованное CODATA. Однако оно отличается от значения CODATA $r_p = 0.8768(69)$ на 5.0σ . Также эксперимент дал и новое значение постоянной Ридберга, которое на 4.9σ отличается от значения, рекомендованного CODATA. Данное расхождение не получило экспериментального или теоретического объяснения и было названо «загадкой радиуса протона».

Следующая статья [7] той же экспериментальной группы продолжает исследование атома мюонного водорода и дает новые, уточненные значения зарядового радиуса и постоянной Ридберга. Также в ней представлены данные измерения еще одного перехода и сверхтонкой структуры μp . Экспериментальный метод спектроскопии атома мюонного водорода в [7] не претерпел изменений по сравнению с [6]. Однако, наряду с повторным получением энергии перехода $\nu_t = \nu(2S_{1/2}^{F=1} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=2}) = 49881.35(65)$ ГГц был измерен новый переход $\nu_s = \nu(2S_{1/2}^{F=0} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=1}) = 54611.16(1.05)$ ГГц (для его измерения использовалась длина волны лазерного импульса $\lambda \approx 5.5$ мкм). Обе частоты переходов представлены на рисунке 1.4. Экспериментальная погрешность перехода ν_t была уменьшена с 0.76 ГГц до 0.65 ГГц за счет улучшения методов анализа данных. Измерение двух частот перехода позволило, в дополнение к лэмбовскому сдвигу, получить величину сверхтонкого расщепления атома мюонного водорода. Основные формулы для получения значений лэмбовского сдвига и сверхтонкой структуры по экспериментальным данным имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}h\nu_s + \frac{3}{4}h\nu_t &= \Delta E_L + 8.8123(2) \text{ мэВ} \\ h\nu_s - h\nu_t &= \Delta E_{HFS} - 3.2480(2) \text{ мэВ}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

где $\Delta E_L = \Delta E_{2P_{1/2}-2S_{1/2}}$ — лэмбовский сдвиг, ΔE_{HFS} — сверхтонкое расщепление $2S$ -состояния, численные члены содержат теоретические величины тонкого расщепления $2P$ -уровня, сверхтонкого расщепления уровня $2P_{3/2}$ а также величину смешивания $2P$ -состояний. В результате были получены значения $\Delta E_L^{exp} = 202.3706(23)$ мэВ и $\Delta E_{HFS}^{exp} = 22.8089(51)$ мэВ и уточненная (в 1.7

раза более точная) по сравнению с экспериментом [6] величина зарядового радиуса протона $r_E = 0.84087(39)$ фм, независимая от теоретического значения сверхтонкого расщепления $2S$ -уровня. Уточненное значение зарядового радиуса протона отличается на 7.0σ от значения CODATA.

Измерение сверхтонкой структуры $2S$ -состояния позволило также определить магнитный радиус $r_M = 0.87(6)$ фм и радиус Земаха $r_Z = 1.082(37)$ фм ($r_Z = \int d^3r \int d^3r' r' \rho_E(\mathbf{r}) \rho_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, ρ_M — нормированная плотность распределения магнитного момента в протоне) протона. Обе величины находятся в согласии с результатами электронных экспериментов, а величина измеренного сверхтонкого расщепления согласуется с теоретически предсказанным значением.

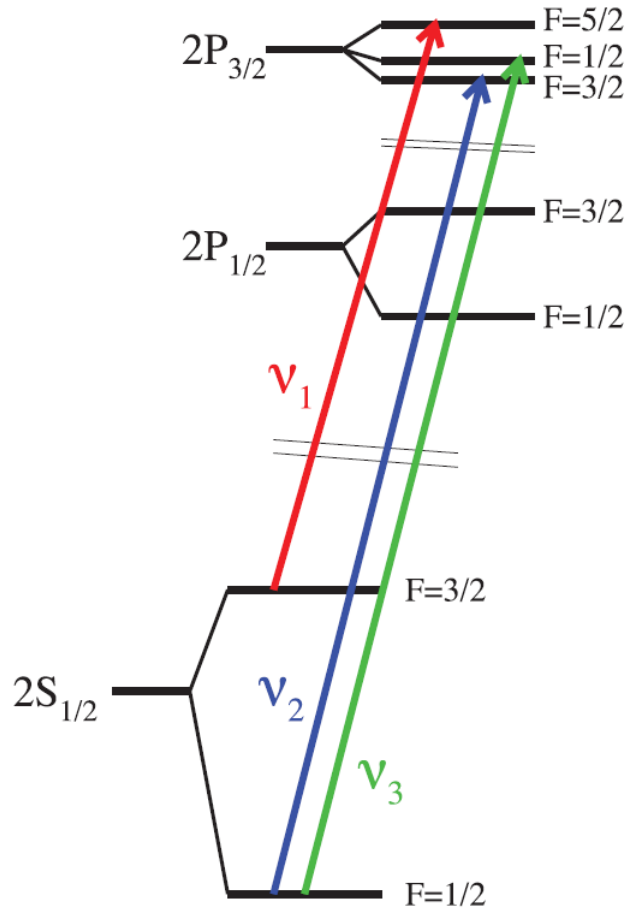


Рисунок 1.5 — Схема $n = 2$ уровня энергии атома мюонного дейтерия с обозначением измеренных в ходе эксперимента коллаборации CREMA частот переходов. Рисунок взят из работы [12]

За экспериментом с мюонным водородом последовала спектроскопия атома мюонного дейтерия. Результаты эксперимента представлены в публикации [12]. Используя тот же экспериментальный метод, что и в [6; 7] были измерены величины трех переходов в атоме мюонного дейтерия: $2S_{1/2}^{F=3/2} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=5/2}$, $2S_{1/2}^{F=1/2} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=3/2}$ и $2S_{1/2}^{F=1/2} \rightarrow 2P_{3/2}^{F=1/2}$. Измеренные частоты переходов и уровни тонкой и сверхтонкой структуры атома мюонного дейтерия представлены на рисунке 1.5. На рисунке 1.6 показаны резонансные кривые для экспериментальных данных по спектроскопии атома мюонного дейтерия. В результате было получено значение зарядового радиуса дейтрона $r_d = 2.12562(13)_{\text{эксп.}}(77)_{\text{теор.}}$ фм, которое на 7.5σ отличается от значения CODATA. Также получена величина сверхтонкого расщепления $2S$ -уровня мюонного дейтерия $\Delta E_{HF,S}^{\text{exp}} = 6.2747(70)_{\text{стат.}}(20)_{\text{сист.}}$ мэВ, которая прекрасно согласуется с теоретическими предсказаниями. Сравнение значений зарядового радиуса дейтрона из различных экспериментов представлено на рисунке 1.7. Таким образом, эксперимент с мюонным дейтерием еще больше усилил «загадку радиуса протона».

В связи с возникшим расхождением зарядовых радиусов протона из мюонных и электронных экспериментов, был выполнен новый эксперимент по спектроскопии электронного водорода [19]. Был измерен переход $2S \rightarrow 4P$ в электронном водороде, что позволило получить величину зарядового радиуса протона $r_p = 0.8335(95)$ фм. Полученный зарядовый радиус на 3.3σ отличается от усредненных данных по предыдущим спектроскопическим экспериментам с электронным водородом, однако согласуется с радиусом из спектроскопии мюонного водорода.

Далее последовал еще один эксперимент по спектроскопии электронного водорода [20]. При помощи непрерывного лазера на 205 нм, облучающего атомный пучок при комнатной температуре, была измерена частота двухфотонного перехода $1S \rightarrow 3S$ и получено значение зарядового радиуса протона $r_p = 0.877(13)$ фм, который согласуется со значением CODATA-2014. Расхождение с результатами спектроскопии мюонного водорода составляет 2.8σ . Нужно

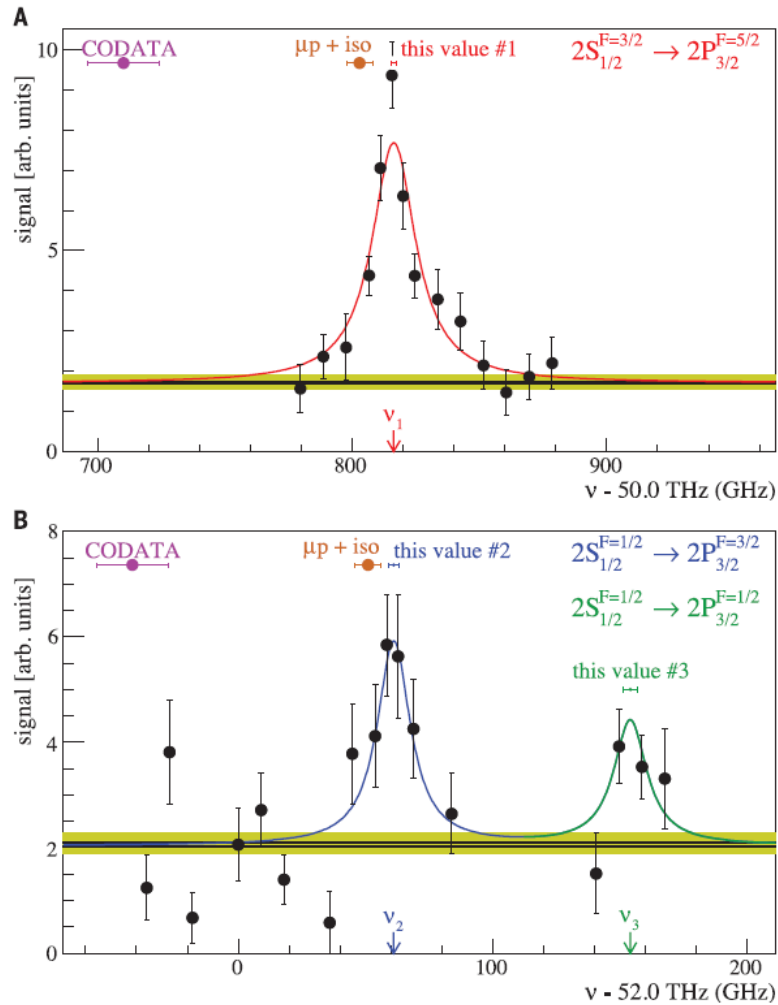


Рисунок 1.6 — Резонансные кривые в эксперименте коллаборации CREMA с мюонным дейтерием. Черные точки — количество зафиксированных рентгеновских сигналов, нормированных на количество сформированных μd атомов, как функция от частоты лазерного излучения. Красная, синяя и зеленая кривые — фитирующие кривые распределения Лоренца, черная линия — уровень фона, точки «our value # 1,2,3» — пики резонансных кривых текущего эксперимента. Зарядовый радиус дейтрона из CODATA дает на ~ 104 ГГц более низкое положение для резонансных пиков (фиолетовая точка), оранжевой точкой « $\mu p + iso$ » обозначены положения пиков, предсказанные по величине зарядового радиуса протона из мюонного дейтерия и формулы для изотопического сдвига. Рисунок взят из работы [12] заметить, что в работе [20] авторы ставят своей ближайшей целью улучшить точность измерений.

Также важно упомянуть эксперимент коллаборации CREMA с ионами мюонного гелия [13; 16], результаты которого в настоящее время только готовятся

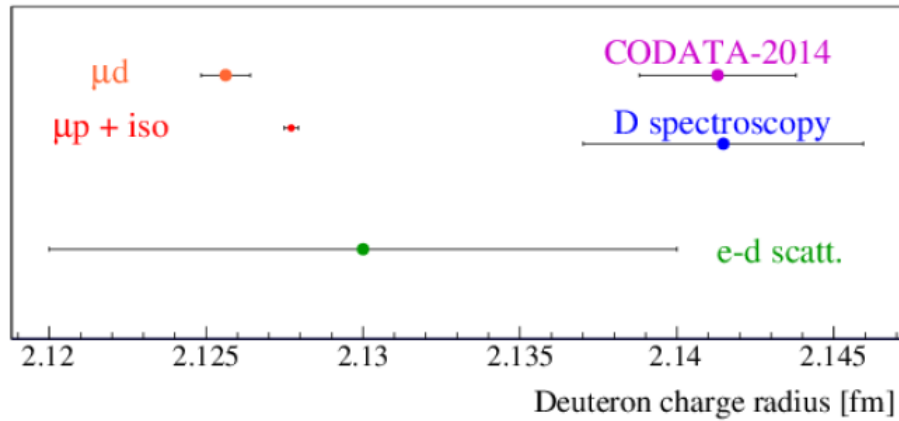


Рисунок 1.7 — Сравнение значений зарядового радиуса дейтрона из различных источников. Рисунок взят из работы [13]

к публикации. В 2013 и 2014 годах были измерены несколько переходов в мюонных ионах гелия-3 и гелия-4, что позволит получить величины зарядовых радиусов соответствующих ядер.

Подводя итог, можно сказать, что на сегодняшний момент «загадка радиуса протона» все еще остается нерешенной. Расхождение между зарядовыми радиусами из спектроскопии мюонных и электронных атомов увеличило экспериментальную и теоретическую активность в этой области. Различными экспериментальными группами проводятся новые исследования электронного водорода, молекулярного водорода, ионов гелия, эксперименты по рассеянию мюонов на протонах [14; 15; 18; 21]. Новые эксперименты позволят не только проверить экспериментальные результаты коллаборации CREMA, но и повысить точность измерения интервалов тонкой и сверхтонкой структуры. Так как извлечение величины зарядового радиуса из экспериментальных данных требует наличия точных теоретических предсказаний энергетического спектра мюонных атомов, уточнение и пересчет различных теоретических вкладов, расчет новых поправок и увеличение точности также является важной и актуальной задачей.

1.3 Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума

Как уже отмечалось ранее, наш подход к исследованию сверхтонкой структуры мюонного дейтерия основывается на квазипотенциальном подходе в квантовой электродинамике [37; 38; 42; 43; 64–69]. Основной вклад в оператор взаимодействия мюона и дейтрона определяется Брейтовским гамильтонианом [62; 63; 73] (для обозначения вклада в сверхтонкую структуру атома в математических формулах используется сокращение "hfs"):

$$H_B = H_0 + \Delta V_B^{fs} + \Delta V_B^{hfs}, H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Z\alpha}{r}, \quad (1.25)$$

$$\Delta V_B^{fs} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_1^3} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_2^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right), \quad (1.26)$$

В случае S-состояний сверхтонкая часть гамильтониана Брейта имеет вид:

$$\Delta V^{hfs}(r) = \frac{2\pi\alpha}{3m_1 m_p} g_d g_\mu (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \delta(\mathbf{r}), \quad (1.27)$$

где m_1 , m_2 — массы мюона и дейтрона соответственно, m_p — масса протона, g_d , g_μ — гироманнитные факторы дейтрона и мюона соответственно, \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 — спиновые операторы мюона и дейтрона соответственно. Здесь и далее во всех аналитических выражениях будет использоваться атомная система единиц ($\hbar = c = 1$). Сверхтонкая структура S-состояний возникает из-за спин-спинового взаимодействия мюона и дейтрона. Потенциал спин-спинового взаимодействия (1.27) дает основной вклад в энергию сверхтонкого расщепления S-уровней (энергия Ферми) [74].

Чтобы получить аналитическое выражение для энергии сверхтонкого расщепления S-уровней нужно усреднить потенциал (1.27) по волновым функциям S-состояний. Волновые функции для 1S и 2S состояний имеют вид:

$$\psi_{100}(r) = \frac{W^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Wr}, \quad W = \mu Z\alpha, \quad (1.28)$$

$$\psi_{200}(r) = \frac{W^{3/2}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-Wr/2} \left(1 - \frac{Wr}{2}\right). \quad (1.29)$$

При усреднении необходимы следующие соотношения:

$$\langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle_{s=3/2} - \langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle_{s=1/2} = \frac{3}{2}, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \int \Psi^* \Psi \delta(r) d^3x &= |\Psi(0)|^2, \\ |\Psi(0)|^2 &= \frac{\mu^3 (Z\alpha)^3}{\pi n^3}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где μ — приведенная масса, $s = s_1 + s_2$ — полный спин системы мюон — дейтрон.

После усреднения получаем следующее выражение для основного вклада в сверхтонкое расщепление 1S и 2S уровней атома мюонного дейтерия:

$$\begin{aligned} \Delta E_F^{hfs}(nS) &= \Delta E(s = \frac{3}{2}) - \Delta E(s = \frac{1}{2}) = \frac{2\mu^3 \alpha^4 \mu_d}{m_1 m_p n^3} = \\ &= \begin{cases} 1S : 49.08751 \text{ мЭВ} \\ 2S : 6.13594 \text{ мЭВ} \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Удобно представить поправку на аномальный магнитный момент мюона в сверхтонком расщеплении S-состояний отдельно, взяв экспериментальное значение аномального магнитного момента мюона [5]:

$$\Delta E_{a_\mu}^{hfs}(nS) = a_\mu \Delta E_F^{hfs}(nS) = \begin{cases} 1S : 0.05723 \text{ мЭВ} \\ 2S : 0.00715 \text{ мЭВ} \end{cases}. \quad (1.33)$$

В нашем расчете мы используем экспериментальное значение для аномального магнитного момента мюона, однако необходимо отметить, что величина аномального магнитного момента мюона также рассчитана теоретически с высокой точностью [75—79].

Таким образом, основной вклад в сверхтонкую структуру S-состояний в атоме мюонного дейтерия с учетом аномального магнитного момента мюона имеет вид:

$$\Delta E_F(nS) = \frac{2\mu^3 \alpha^4 \mu_d (1 + a_\mu)}{m_1 m_p n^3} = \begin{cases} 1S : 49.14474 \text{ мЭВ} \\ 2S : 6.14309 \text{ мЭВ} \end{cases}. \quad (1.34)$$

Энергия Ферми имеет порядок α^4 . Данные численные значения включены в таблицу 1.

В аналитическом виде известны выражения для релятивистской поправки порядка α^6 к сверхтонкой структуре S-состояний мюонного дейтерия. Численные значения релятивистской поправки, полученные по формулам (A.41), (A.42) включены в таблицу 1. Подробный вывод релятивистских поправок к сверхтонкой структуре S- и P-состояний мюонного дейтерия представлен в приложении А.

Для достижения необходимой точности расчета сверхтонкой структуры мюонного дейтерия мы учитываем однопетлевую и двухпетлевую электронную поляризацию вакуума и однопетлевую мюонную поляризацию вакуума в первом, втором и третьем порядках теории возмущений. Для вычисления поправок необходимо сначала получить аналитическое выражение для поляризационного оператора. В КЭД в первом приближении теории возмущений он определяется петлей в диаграмме, изображенной на рисунке 1.8 [63].

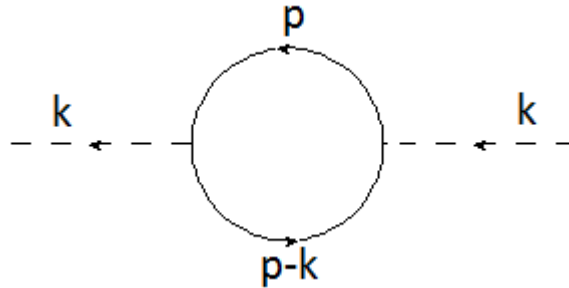


Рисунок 1.8 — Поляризационный оператор

Для вычисления удобнее всего использовать соотношение унитарности и дисперсионное соотношение. Соотношение унитарности с двухчастичным промежуточным состоянием при совпадающих начальном и конечном состояниях дает [63]:

$$2ImM_{ii} = \frac{|\mathbf{p}|}{(4\pi)^2 \varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} \int |M_{ni}|^2 d\Omega. \quad (1.35)$$

Для матричных элементов M_{ii} и M_{ni} имеем:

$$\begin{aligned} iM_{ii} &= \sqrt{4\pi}e_{\mu}^*\sqrt{4\pi}e_{\nu}\frac{iP^{\mu\nu}}{4\pi}, \\ M_{ni} &= -e\sqrt{4\pi}e_{\mu}j^{\mu}, j^{\mu} = \bar{u}(p_-)\gamma^{\mu}u(-p_+), \end{aligned} \quad (1.36)$$

где P - поляризационный оператор, p_- - 4-импульс электрона, p_+ - 4-импульс позитрона, e_{ν} - 4-вектор поляризации. В результате для (1.35) получаем [63]:

$$2e_{\mu}^*e_{\nu}ImP^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} \int j^{\mu*}j^{\nu}e_{\mu}^*e_{\nu}d\Omega. \quad (1.37)$$

Интегрирование производится по направлениям трехмерного импульса p , а суммирование - по поляризациям. Усредним обе стороны равенства (1.37) по поляризациям, используя следующие соотношения:

$$\overline{e_{\mu}^*e_{\nu}} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right), P^{\mu\nu}k_{\nu} = 0, j^{\mu}k_{\mu} = 0, P_{\mu}^{\mu} = 3P. \quad (1.38)$$

После усреднения получим:

$$2ImP = \frac{1}{12\pi} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляризация}} \int (jj^*)d\Omega. \quad (1.39)$$

Интегрирование по углам сводится к умножению на 4π , суммирование по поляризациям происходит обычным образом. В результате для (1.39) получим:

$$2ImP = e^2 \frac{|\mathbf{p}|}{3\varepsilon} Tr[\gamma_{\mu}(\gamma p_- + m)\gamma^{\mu}(\gamma p_+ - m)] = -e^2 \frac{8|\mathbf{p}|}{3\varepsilon} (p_+p_- + 2m^2). \quad (1.40)$$

Далее введем замену [63]:

$$t = k^2 = (p_+ + p_-)^2 = 2(m^2 + p_+p_-), \varepsilon^2 = t, \mathbf{p}^2 = \frac{t}{4} - m^2. \quad (1.41)$$

В результате для мнимой части поляризационного оператора получаем выражение:

$$ImP(t) = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t - 4m^2}{t}} (t + 2m^2), t \geq 4m^2. \quad (1.42)$$

Воспользуемся дисперсионным соотношением [63]:

$$P(t) = \frac{t^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ImP(t')}{t'^2(t' - t)} dt'. \quad (1.43)$$

Учитывая условие $t \geq 4m^2$ и используя замену $t' = 4m^2\xi^2$, получим итоговую формулу для поляризационного оператора:

$$P(t) = -\frac{\alpha}{3\pi} t^2 \int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4} \frac{1}{4m^2\xi^2 - t} d\xi. \quad (1.44)$$

С помощью выражения (1.44) можно найти поправки на поляризацию вакуума в тонкой и сверхтонкой структуре легких мюонных ВП атомов.

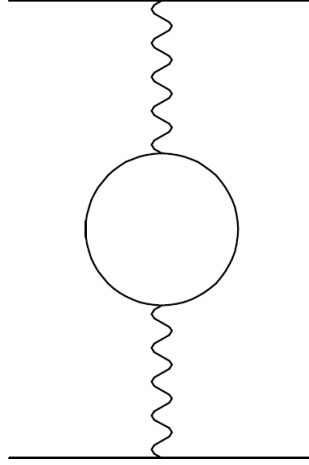


Рисунок 1.9 — Диаграмма однопетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

На рисунке 1.9 изображена диаграмма Фейнмана для однопетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии. Для получения вклада однопетлевой электронной поляризации вакуума в потенциал сверхтонкого взаимодействия нужно воспользоваться сверхтонкой частью гамильтониана Брейта в импульсном представлении. Учитывая соотношение (1.44) для поляризационного оператора, необходимо сделать следующую замену в фотонном пропагаторе:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \frac{1}{k^2 + 4m_e^2\xi^2}. \quad (1.45)$$

где спектральная функция:

$$\rho(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)/\xi^4. \quad (1.46)$$

Далее для перехода в координатное представление нужно выполнить обратное преобразование Фурье. В результате получим следующее выражение для вклада однопетлевой электронной поляризации вакуума в потенциал сверхтонкого

взаимодействия частиц в S-состояниях [35; 64; 66; 67; 80; 81]:

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma,VP}^{hfs}(r) &= \frac{4\alpha\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\frac{\alpha}{3\pi}\int_1^\infty\rho(s)ds\times \\ &\times\left(\pi\delta(\mathbf{r})-\frac{m_e^2\xi^2}{r}e^{-2m_e\xi r}\right), \end{aligned} \quad (1.47)$$

В (1.47) мы сохраняем фактор с аномальным магнитным моментом мюона, что приводит к эффективному учету поправки порядка α^6 . Усредняя (1.47) по волновым функциям (1.28), (1.29), получим поправку порядка α^5 к энергии сверхтонкого расщепления $1S$ - и $2S$ -состояний:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma,VP}^{hfs}(1S) &= \frac{2\mu^3\alpha^5\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p\pi}\int_1^\infty\rho(\xi)d\xi\times \\ &\times\left[1-\frac{m_e^2\xi^2}{W^2}\int_0^\infty xdx e^{-x(1+\frac{m_e\xi}{W})}\right] = 0.1039 \text{ мэВ}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma,VP}^{hfs}(2S) &= \frac{\mu^3\alpha^5\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p\pi}\int_1^\infty\rho(\xi)d\xi\times \\ &\times\left[1-\frac{4m_e^2\xi^2}{W^2}\int_0^\infty x\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx e^{-x(1+\frac{2m_e\xi}{W})}\right] = 0.0134 \text{ мэВ}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Вычисление (1.48),(1.49) проводилось в системе Mathematica. Заменяя массу электрона m_e на массу мюона m_1 в (1.48), (1.49), можно найти вклад мюонной поляризации вакуума в сверхтонкую структуру: 0.0009 мэВ ($1S$), 0.0001 мэВ ($2S$). Он будет иметь более высокий порядок α^6 , так как отношение $W/m_1 \ll 1$. Вклад того же порядка α^6 дается также диаграммами двухпетлевой поляризации вакуума, представленными на рисунке 1.10 [82].

Для получения оператора взаимодействия для амплитуды с двумя последовательными петлями, необходимо дважды использовать замену (1.45). В координатном представлении потенциал для S-состояний имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma,VP-VP}^{hfs}(r) &= \frac{8\pi\alpha\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2\int_1^\infty\rho(\xi)d\xi\times \\ &\times\int_1^\infty\rho(\eta)d\eta\left[\delta(\mathbf{r})-\frac{m_e^2}{\pi r(\eta^2-\xi^2)}\left(\eta^4 e^{-2m_e\eta r}-\xi^4 e^{-2m_e\xi r}\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Соответствующая поправка в сверхтонкую структуру уровней $1S$ и $2S$ может быть представлена сначала в виде интеграла по r и параметрам ξ, η . Далее

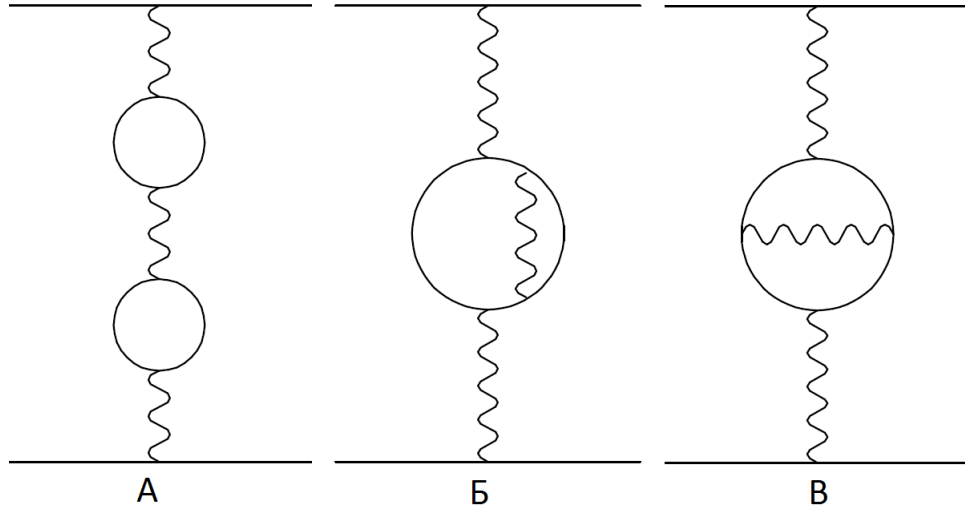


Рисунок 1.10 — Диаграммы двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

интеграл по r вычислялся аналитически, а по ξ , η численно, используя систему Mathematica. Двухпетлевые поправки на поляризацию вакуума порядка α^6 , представленные диаграммами Б и В на рисунке 1.10, могут быть вычислены аналогично. В данном случае потенциал мюон-дейтронного взаимодействия для S-состояний имеет более сложный вид:

$$\Delta V_{1\gamma, 2-loop}^{hfs} V_P(r) = \frac{8\alpha^3 \mu_d (1 + a_\mu)}{9\pi^2 m_1 m_p} (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1 - v^2} \times \left[\pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{r(1 - v^2)} e^{-\frac{2m_e r}{\sqrt{1 - v^2}}} \right], \quad (1.51)$$

где двухпетлевая спектральная функция

$$f(v) = v \left\{ (3 - v^2)(1 + v^2) \left[Li_2 \left(-\frac{1 - v}{1 + v} \right) + 2Li_2 \left(\frac{1 - v}{1 + v} \right) + \frac{3}{2} \ln \frac{1 + v}{1 - v} \ln \frac{1 + v}{2} - \ln \frac{1 + v}{1 - v} \ln v \right] + \left[\frac{11}{16} (3 - v^2)(1 + v^2) + \frac{v^4}{4} \right] \ln \frac{1 + v}{1 - v} + \left[\frac{3}{2} v(3 - v^2) \ln \frac{1 - v^2}{4} - 2v(3 - v^2) \ln v \right] + \frac{3}{8} v(5 - 3v^2) \right\}, \quad (1.52)$$

где $Li_2(z)$ — дилогарифм Эйлера. Численное значение поправки оператора (1.51) к энергетическому спектру вычисляются тем же образом, как и в слу-

чае (1.50). Суммарная поправка от потенциалов (1.50) и (1.51) равна

$$\Delta E_{1\gamma,VP,VP}^{hfs}(nS) = \begin{cases} 1S : 0.0005 \text{ мэВ} \\ 2S : 0.00006 \text{ мэВ} \end{cases} \quad (1.53)$$

Таблица 1 — Сверхтонкая структура S-состояний мюонного дейтерия

| Вклад | 1S, мэВ | 2S, мэВ | № формулы |
|--|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| Энергия Ферми, α^4 | 49.0875 | 6.1359 | (1.32),[28] |
| АММ мюона | 0.0572 | 0.0072 | (1.33),[28] |
| Релятивистская поправка порядка α^6 | 0.0039 | 0.0007 | (A.41),(A.42), [28],[83] |
| Поляризация вакуума порядка α^5 | 0.3095 | 0.0341 | (1.48)-(1.49), (1.64)-(1.65) |
| Поляризация вакуума порядка α^6 | 0.0048 | 0.0005 | (1.53), (1.67)-(1.72) |
| Поляризация вакуума порядка α^6 в 3-м порядке ТВ | 0.0005 | 0.00004 | (1.73) |
| Поправка на структуру ядра, α^5 | $-0.9305 \pm$ ± 0.0090 | $-0.1163 \pm$ ± 0.0010 | (1.89) |
| Поправка на структуру ядра и ПВ, α^6 | $0.0152 \pm$ ± 0.0001 | $0.0019 \pm$ ± 0.00001 | (3.1) |
| Поправка на структуру ядра и мюонную ПВ, α^6 | 0.0015 | 0.0002 | (3.2) |
| Адронная поляризация вакуума порядка α^6 | 0.0018 | 0.0002 | [84] |
| Поправка на структуру ядра порядка α^6 в 1γ | 0.0082 | 0.0008 | (1.93) |
| Поправка на структуру ядра во втором порядке ТВ | -0.0555 | -0.0069 | (1.96)-(1.97) |
| Радиационная поправка к двухфотонным амплитудам, α^6 | -0.0039 | -0.0005 | (3.20)-(3.23) |
| Вклад поляризуемости дейтрона порядка α^5 | $1.6972 \pm$ ± 0.0340 | $0.2121 \pm$ ± 0.0042 | [85] |
| Внутренняя поляризуемость дейтрона порядка α^5 | $0.0840 \pm$ ± 0.0210 | $0.0105 \pm$ ± 0.0025 | [86] |
| Вклад слабого взаимодействия | 0 | 0 | [3; 87] |
| Суммарный вклад | $50.2814 \pm$ ± 0.0410 | $6.2804 \pm$ ± 0.0050 | |

Вклад эффектов поляризации вакуума в сверхтонкую структуру мюонного дейтерия этим не исчерпывается. Поправки порядка α^5 и α^6 на однопетлевую и двухпетлевую поляризацию вакуума к сверхтонкой структуре нужно также учесть во втором и третьем порядках теории возмущений. При вычислении поправок второго и третьего порядка теории возмущений в спектре энергии ВП атома мы используем явное аналитическое выражение для кулоновской функции Грина. Функция Грина представляет собой решение следующего уравнения:

$$(\hat{H} - E)G_E(r, r') = \delta(r - r'). \quad (1.54)$$

Её спектральное разложение имеет вид [88]:

$$G_E(r, r') = \sum_i \frac{\psi_i^*(r)\psi_i(r')}{E_i - E}. \quad (1.55)$$

Поправки второго и третьего порядка теории возмущений определяются редуцированной кулоновской функцией Грина \tilde{G} . Её парциальное разложение имеет вид:

$$\tilde{G}_n(r, r') = \sum_{l, m} \tilde{g}_{nl}(r, r') Y_{lm}(n) Y_{lm}^*(n'). \quad (1.56)$$

Радиальная функция $\tilde{g}_{nl}(r, r')$ была получена в [88] в виде штурмовского разложения по полиномам Лагерра. В нашем расчете мы используем редуцированную кулоновскую функцию Грина \tilde{G} для 1S и 2S состояний. Более подробно получение кулоновской функции Грина обсуждается в приложении В. Также, из-за наличия в потенциале взаимодействия дельта-функции Дирака, необходимо знать редуцированную кулоновскую функцию Грина с одним нулевым аргументом. Для 1S и 2S состояний она была получена на основе представления Хостлера после вычитания полюсного члена в виде [88]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1S}(r, 0) &= \frac{Z\alpha\mu^2 e^{-x}}{4\pi x} g_{1S}(x), \\ g_{1S}(x) &= [4x(\ln 2x + C) + 4x^2 - 10x - 2], \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{2S}(r, 0) &= -\frac{Z\alpha\mu^2 e^{-x/2}}{4\pi 2x} g_{2S}(x), \\ g_{2S}(x) &= [4x(x - 2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4], \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $C = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера, $x = Wr$.

Редуцированная кулоновская функция Грина 1S и 2S состояний с ненулевыми аргументами имеет вид [88; 89]:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1S}(r,r') &= -\frac{Z\alpha\mu^2}{\pi}e^{-(x_1+x_2)}g_{1S}(x_1,x_2), \\ g_{1S}(x_1,x_2) &= \frac{1}{2x_{<}} - \ln 2x_{>} - \ln 2x_{<} + Ei(2x_{<}) + \frac{7}{2} - 2C - \\ &\quad -(x_1 + x_2) + \frac{1 - e^{2x_{<}}}{2x_{<}},\end{aligned}\quad (1.59)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{2S}(r,r') &= -\frac{Z\alpha\mu^2}{16\pi x_1 x_2}e^{-(x_1+x_2)}g_{2S}(x_1,x_2), \\ g_{2S}(x_1,x_2) &= 8x_{<} - 4x_{<}^2 + 8x_{>} + 12x_{<}x_{>} - 26x_{<}^2x_{>} + 2x_{<}^3x_{>} - \\ &\quad - 4x_{>}^2 - 26x_{<}x_{>}^2 + 23x_{<}^2x_{>}^2 - x_{<}^3x_{>}^2 + 2x_{<}x_{>}^3 - x_{<}^2x_{>}^3 + \\ &\quad + 4e^x(1 - x_{<})(x_{>} - 2)x_{>} + 4(x_{<} - 2)x_{<}(x_{>} - 2)x_{>}[-2C + Ei(x_{<}) - \\ &\quad - \ln(x_{<}) - \ln(x_{>})],\end{aligned}\quad (1.60)$$

где $x_{<} = \min(x_1, x_2)$, $x_{>} = \max(x_1, x_2)$, $x_1 = Wr$, $x_2 = Wr'$; $Ei(x)$ — интегральная экспоненциальная функция.

Используем (1.57), (1.58), (1.59) и (1.60) для нахождения поправок на поляризацию вакуума во втором порядке теории возмущений. Соответствующие диаграммы изображены на рисунке 1.11.

Основной вклад электронной поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений (SOPT - second order of perturbation theory) соответствует диаграмме А на рисунке 1.11 и имеет следующий вид:

$$\Delta E_{SOPTVP1}^{hfs} = 2 \langle \psi | \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_B^{hfs} | \psi \rangle, \quad (1.61)$$

где ΔV_B^{hfs} определяется по формуле (1.27) для 1S и 2S состояний, ΔV_{VP}^C — модифицированный кулоновский потенциал, \tilde{G} — редуцированная кулоновская функция Грина.

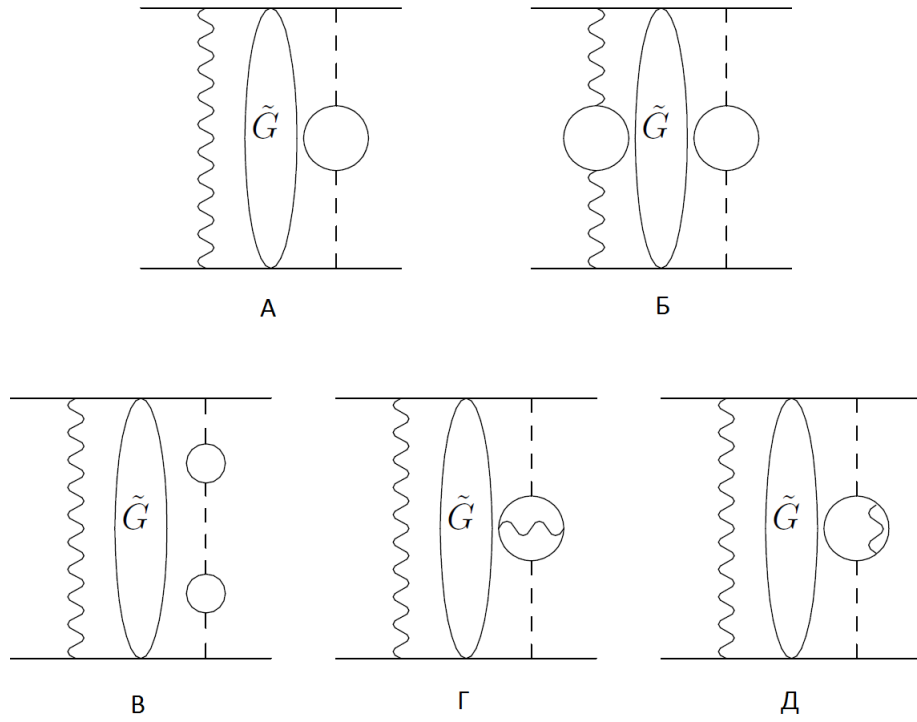


Рисунок 1.11 — Диаграммы поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений

Для получения ΔV_{VP}^C в координатном представлении нужно воспользоваться выражением для потенциала кулоновского взаимодействия в импульсном представлении:

$$\Delta V^C(k) = -\frac{4\pi Z e^2}{k^2}. \quad (1.62)$$

Далее нужно воспользоваться заменой (1.45) и выполнить обратное преобразование Фурье для перехода к координатному представлению. В результате получим искомое выражение для модифицированного кулоновского потенциала:

$$\begin{aligned} \Delta V_{VP}^C(r) &= \frac{\alpha}{3\pi} \int e^{ikr} \int_1^\infty \left(-\frac{4\pi Z e^2}{k^2 + 4m^2 \xi^2} \right) \rho(\xi) d\xi \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left(-\frac{Z\alpha}{r} \right) e^{-2m_e \xi r}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Подставляя (1.27), (1.63), (1.57), (1.58) в (1.61) и усредняя по волновым функциям (1.28), (1.29), получим выражения для поправок на электронную поляризацию вакуума к сверхтонкой структуре мюонного дейтерия для 1S и 2S состояний во

втором порядке теории возмущений:

$$\begin{aligned} \Delta E_{VP\ 1}^{hfs}(1S) = & -E_F(1S) \frac{\alpha}{3\pi} (1 + a_\mu) \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-x(1+\frac{m_e\xi}{W})} \times \\ & \times g_{1S}(x) dx = 0.2056 \text{ мЭВ}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{VP\ 1}^{hfs}(2S) = & E_F(2S) \frac{\alpha}{3\pi} (1 + a_\mu) \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-x(1+\frac{2m_e\xi}{W})} \times \\ & \times g_{2S}(x) (1 - \frac{x}{2}) dx = 0.0207 \text{ мЭВ}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

В (1.64), (1.65) включен множитель $(1 + a_\mu)$, поэтому эти выражения содержат поправки порядка α^5 и α^6 . Выполняя замену $m_e \rightarrow m_1$ в (1.64), (1.65) мы вычисляем также вклад мюонной поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений порядка α^6 : 0.0009 мЭВ (1S), 0.0001 мЭВ (2S).

Двухпетлевые поправки на рисунке 1.11(Б, В, Г, Д) имеют порядок α^6 . Рассмотрим вклад диаграммы Б на рисунке 1.11, который определяется в 1S и 2S состояниях потенциалами (1.47) и (1.63), редуцированной кулоновской функцией Грина (1.59), (1.60) и редуцированной кулоновской функцией Грина с одним ненулевым аргументом (1.57), (1.58). Общая структура такой поправки имеет следующий вид:

$$\Delta E_{SOPT\ VP\ 2}^{hfs} = 2 \langle \Psi | \Delta V_{1\gamma,VP}^{hfs} \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_{VP}^C | \Psi \rangle. \quad (1.66)$$

В результате имеем для каждого уровня 1S и 2S по два вклада:

$$\begin{aligned} \Delta E_{VP\ 21}^{hfs}(1S) = & -\frac{2\alpha^6 \mu^3 \mu_d (1 + a_\mu)}{9\pi^2 m_1 m_p} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty dx \times \\ & \times e^{-x(1+\frac{m_e\xi}{W})} g_{1S}(x), \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{VP\ 22}^{hfs}(1S) = & -\frac{4\alpha^6 \mu^3 \mu_d (1 + a_\mu) m_e^2}{9\pi^2 m_1 m_p W^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) \eta^2 d\eta \times \\ & \times \int_0^\infty x_1 dx_1 e^{-x_1(1+\frac{m_e\xi}{W})} \int_0^\infty x_2 dx_2 e^{-x_2(1+\frac{m_e\xi}{W})} g_{1S}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{VP\ 21}^{hfs}(2S) = & \frac{\alpha^6 \mu^3 \mu_d (1 + a_\mu)}{36\pi^2 m_1 m_p} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ & \times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx e^{-x(1+\frac{2m_e\xi}{W})} g_{2S}(x), \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{VP}^{hfs}{}_{22}(2S) = & -\frac{\alpha^6 \mu^3 \mu_d (1 + a_\mu) m_e^2}{18\pi^2 m_1 m_p W^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) \eta^2 d\eta \times \\ & \times \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_1}{2}\right) dx_1 e^{-x_1 \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_2}{2}\right) dx_2 e^{-x_2 \left(1 + \frac{2m_e \eta}{W}\right)} \times \\ & \times g_{2S}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1.70)$$

По отдельности вклады (1.67), (1.68) и (1.69), (1.70) расходятся, но их сумма является конечной. Вклад оставшихся диаграмм на рисунке 1.11 для S-состояний может быть вычислен при помощи (1.61), где необходимо заменить потенциал (1.63) на следующие потенциалы [68]:

$$\begin{aligned} \Delta V_{VP-VP}^C(r) = & \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left(-\frac{Z\alpha}{r}\right) \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \times \\ & \times \left(\xi^2 e^{-2m_e \xi r} - \eta^2 e^{-2m_e \eta r}\right), \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\Delta V_{2-loop VP}^C(r) = -\frac{2Z\alpha^3}{3\pi^2 r} \int_0^1 \frac{f(v) dv}{(1-v^2)} e^{-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}}. \quad (1.72)$$

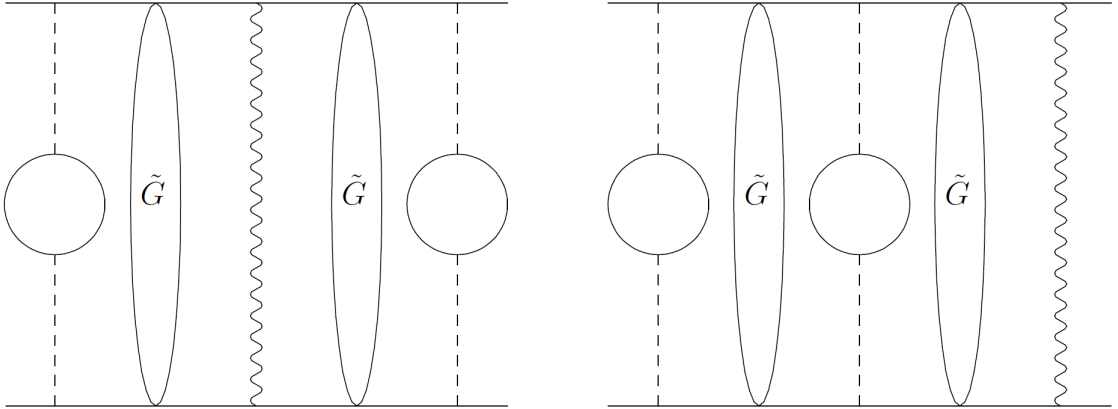


Рисунок 1.12 — Диаграммы поляризации вакуума в третьем порядке теории возмущений

В третьем порядке теории возмущений поправка порядка α^6 в сверхтонкой структуре S-состояний представлена диаграммой, изображенной на рисунке 1.12. Аналитическое выражение для расчета поправки в третьем порядке теории возмущений имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_{ТОPT}^{hfs} = & \langle \psi_n | \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V^{hfs} \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_{VP}^C | \psi_n \rangle + \\ & + 2 \langle \psi_n | \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V^{hfs} | \psi_n \rangle - \\ & - \langle \psi_n | \Delta V^{hfs} | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_{VP}^C | \psi_n \rangle - \\ & - 2 \langle \psi_n | \Delta V_{VP}^C | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V^{hfs} | \psi_n \rangle. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Интегрирование по одной координатной переменной в (1.73) производится аналитически, по второй координате и спектральным переменным интегрирование выполняется численно.

Единственный подробный расчет сверхтонкого расщепления атома мюонного дейтерия представлен в работе [28]. Для $2S$ уровня в [28] была получена следующая формула:

$$\begin{aligned} \Delta E_{2s} &= \frac{3}{2} \beta_D (1 + a_\mu) (1 + \varepsilon_{VP} + \varepsilon_{vertex} + \varepsilon_{Breit} + \varepsilon_{Zemach}) = \\ &= 6.0584(7) \text{ мЭВ}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Она содержит следующие поправки к энергии Ферми: поправку на поляризацию вакуума, релятивистскую поправку, вершинную поправку (радиационная поправка к двухфотонным диаграммам) и поправку Земаха. Полученные поправки на поляризацию вакуума в сверхтонкой структуре S -состояний атома мюонного дейтерия хорошо согласуются с результатами работы [28]. Основной вклад вместе с поправкой на аномальный магнитный момент из работы [28] для $2S$ -состояния равен 6.14298 мЭВ, в то время как в нашей работе он равен 6.1431 мЭВ. Небольшое расхождение в значениях связано с различием в используемых значениях аномального магнитного момента мюона в [28] и в нашей работе. Релятивистская поправка для $2S$ -состояния мюонного дейтерия из [28] (0.00069 мЭВ) согласуется с нашим значением 0.0007 мЭВ. Поправки на однопетлевую электронную поляризацию вакуума в первом и втором порядках теории возмущений порядка α^5 из [28] (0.01339 мЭВ, 0.02070 мЭВ соответственно) также хорошо согласуются с нашими значениями 0.0134 мЭВ и 0.0207 мЭВ. Поправка на двухпетлевую электронную поляризацию вакуума в однофотонном взаимодействии из [28] (0.00010 мЭВ) существенно отличается от нашего значения 0.0005 мЭВ. Однако необходимо отметить, что наше значение включает в себя сумму нескольких поправок на двухпетлевую поляризацию вакуума в первом и втором порядках теории возмущений порядка α^6 и существенно улучшает вычисления из работы [28]. Поправка на мюонную поляризацию вакуума

была учтена как в нашем расчете так и в работе [28]. Сравнение поправок на структуру ядра с результатами [28] представлено в параграфе ??.

1.4 Поправки на структуру и отдачу ядра

Важным классом поправок к тонкой и сверхтонкой структуре легких мюонных ВП атомов являются поправки на структуру и отдачу ядра [85; 90]. В спектре энергии мюонных атомов такие поправки дают значительно больший вклад, чем в электронных атомах, так как волновая функция мюона сильно перекрывает область ядра. Необходимо отметить, что именно поправки на конечный размер ядра, отдачу и поляризуемость ядра позволяют при сравнении с экспериментом получить точные значения зарядового радиуса ядра, магнитного радиуса и радиуса Земаха.

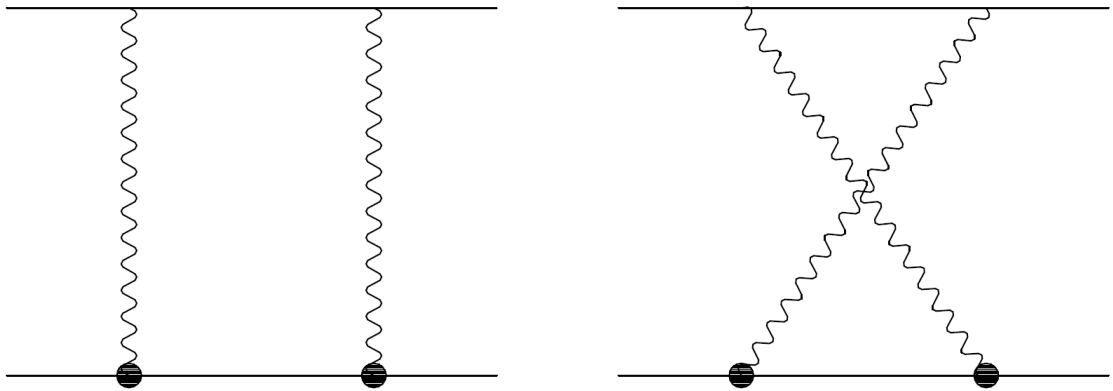


Рисунок 1.13 — Двухфотонные обменные диаграммы с учетом структуры ядра, дающие вклад порядка $(Z\alpha)^5$ в сверхтонкую структуру S-состояний

Основная поправка на структуру ядра в сверхтонкой структуре S-состояний определяется двухфотонными обменными диаграммами, представленными на рисунке 1.13, и имеет порядок $Z\alpha^5$. Для построения квазипотенциала по диаграмме на рисунке 1.13 нам необходимо сначала записать соответствующую фейнмановскую амплитуду. Параметризация электромагнитного тока дейтро-

на имеет вид:

$$J_d^\mu(p_2, q_2) = \varepsilon_\rho^*(q_2) \left\{ \frac{(p_2 + q_2)_\mu}{2m_2} g_{\rho\sigma} F_1(k^2) - \frac{(p_2 + q_2)_\mu}{2m_2} \frac{k_\rho k_\sigma}{2m_2^2} F_2(k^2) - \right. \\ \left. - \Sigma_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \frac{k^\nu}{2m_2} F_3(k^2) \right\} \varepsilon_\sigma(p_2), \quad (1.75)$$

где p_2, q_2 — 4-импульсы дейтрона в начальном и конечном состояниях, $k = q_2 - p_2$. Вектор поляризации дейтрона ε_μ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad k_\mu \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) = 0, \\ \sum_\lambda \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_2^2}. \quad (1.76)$$

Генератор инфинитезимальных преобразований Лоренца имеет вид:

$$\Sigma_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = g_\rho^\mu g_\sigma^\nu - g_\sigma^\mu g_\rho^\nu. \quad (1.77)$$

Электромагнитные формфакторы дейтрона $F_i(k^2)$ являются функциями квадрата 4-импульса фотона. Они связаны с зарядовым F_C , магнитным F_M , и квадрупольным F_Q формфакторами дейтрона следующими соотношениями [86; 91]:

$$F_C = F_1 + \frac{2}{3}\eta [F_1 + (1 + \eta)F_2 - F_3], \quad F_M = F_3, \\ F_Q = F_1 + (1 + \eta)F_2 - F_3, \quad \eta = -\frac{k^2}{4m_2^2}. \quad (1.78)$$

Электромагнитный ток мюона имеет вид:

$$J_i^\mu(p_1, q_1) = \bar{u}(q_1) \left[\frac{(p_1 + q_1)^\mu}{2m_1} - (1 + a_\mu) \sigma^{\mu\nu} \frac{k_\nu}{2m_1} \right] u(p_1), \quad (1.79)$$

где p_1, q_1 — начальный и конечный 4-импульсы мюона, $\sigma^{\mu\nu} = (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)/2$. Амплитуды, описывающие виртуальное комптоновское рассеяние мюона и дейтрона, задаются прямыми и перекрестными двухфотонными диаграммами в виде [86]:

$$M_{\mu\nu}^{(l)} = \bar{u}(q_1) \left[\gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k} + m_1}{(p_1 + k)^2 - m_1^2} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1}{(p_1 - k)^2 - m_1^2} \gamma_\mu \right] u(p_1), \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}^{(d)} = \varepsilon_\rho^*(q_2) & \left[\frac{(q_2 + p_2 - k)_\mu}{2m_2} g_{\rho\lambda} F_1 - \frac{(q_2 + p_2 - k)_\mu}{2m_2} \frac{k_\rho k_\lambda}{2m_2^2} F_2 - \right. \\
& \left. - \sum_{\rho\lambda}^{\mu\alpha} \frac{k_\alpha}{2m_2} F_3 \right] \frac{-g_{\lambda\omega} + \frac{(p_2 - k)_\lambda (p_2 - k)_\omega}{m_2^2}}{(p_2 - k)^2 - m_2^2} \left[\frac{(p_2 + q_2 - k)_\nu}{2m_2} g_{\omega\sigma} F_1 - \right. \\
& \left. - \frac{(p_2 + q_2 - k)_\nu}{2m_2} \frac{k_\omega k_\sigma}{2m_2^2} F_2 + \sum_{\omega\sigma}^{\nu\beta} \frac{k_\beta}{2m_2} F_3 \right] \varepsilon_\sigma(p_2). \quad (1.81)
\end{aligned}$$

Для построения квазипотенциала сверхтонкого взаимодействия по амплитуде мы используем технику проекционных операторов [86; 92; 93]. Проекционные операторы $\hat{\pi}_{\mu,3/2}$ and $\hat{\pi}_{\mu,1/2}$ на состояния мюон — дейтронной пары со спином 3/2 и 1/2 имеют следующий вид:

$$\hat{\Pi}_{\mu,3/2} = [u(p_1)\varepsilon_\mu(p_2)]_{3/2} = \Psi_\mu(P), \quad \hat{\Pi}_{\mu,1/2} = \frac{i}{\sqrt{3}}\gamma_5(\gamma_\mu - v_{1,\mu})\Psi(P), \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda \Psi_\mu^\lambda(P)\bar{\Psi}_\nu^\lambda(P) = -\frac{\hat{v}_1 + 1}{2} & \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{2}{3}v_{1,\mu}v_{1,\nu} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3}(v_{1,\mu}\gamma_\nu - v_{1,\nu}\gamma_\mu) \right), \quad (1.83)
\end{aligned}$$

где спин — вектор $\Psi_\mu(P)$ и спинор $\Psi(P)$ описывают связанные состояния мюона и дейтрона со спинами 3/2 и 1/2, $v_{1,\mu} = P_\mu/M$, $P = p_1 + p_2$, $M = m_1 + m_2$. Перемножая амплитуды (1.80) и (1.81) и применяя проекционные операторы (1.82), мы получаем при помощи пакета аналитических расчетов Form [94] выражение для сверхтонкой части потенциала двухфотонного взаимодействия в кулоновской калибровке для обменных фотонов [86]:

$$\begin{aligned}
V_{2\gamma, str}^{hfs} = (Z\alpha)^2 & \int \frac{id^4k}{\pi^2} \frac{1}{(k^2)^2} \frac{1}{k^4 - 4k_0^2 m_1^2} \frac{1}{k^4 - 4k_0^2 m_2^2} \times \\
& \times \left\{ 2F_1 F_3 k^6 \left(\frac{k^2}{m_2^2} - \frac{\mathbf{k}^2}{m_2^2} - 4 \right) + 2F_2 F_3 \frac{k^4}{m_2^2} \left(4k_0^4 + \mathbf{k}^4 - 4\mathbf{k}^2 k_0^2 - \frac{k^6}{m_2^2} \right) + \right. \\
& \left. + 2F_3^2 k^2 \mathbf{k}^2 \left(k_0^2 + \frac{k^4}{m_2^2} \right) \right\}. \quad (1.84)
\end{aligned}$$

Инфракрасная расходимость в (1.84) при $k \rightarrow 0$ связана с членом $\sim F_1 F_3 k^2$. Она может быть устранена при помощи итерационного члена квазипотенциала:

$$\Delta V_{iter}^{hfs} = [V_{1\gamma} \times G^f \times V_{1\gamma}]^{HFS} = E_F \frac{16\mu\alpha}{3\pi n^3} (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} F_1 F_3. \quad (1.85)$$

Для удобства вычисления интеграла по петлевому импульсу выполним поворот Вика и перейдем в евклидово импульсное пространство:

$$\begin{aligned} \int d^4k &= \int_0^\infty k^3 dk \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \\ &= 4\pi \int_0^\infty k^3 dk \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Интегрирование по углам в (1.84) в евклидовом импульсном пространстве может быть выполнено аналитически. Также мы выносим фактор $F_3(0) = m_2 \mu_d / Z m_p$ из формфактора F_3 , также как в выражении (1.85) и выполняем вычитание итерационного слагаемого квазипотенциала (1.85). В результате вклад двухфотонных обменных диаграмм в сверхтонкую структуру S-состояний в мюонном дейтерии может быть записан в виде одномерного интеграла:

$$\begin{aligned} E_{2\gamma}^{hfs} &= E_F \alpha \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} V_{2\gamma}(k) = \\ &= \frac{E_F \alpha}{16\pi m_1^3 m_2^5 (m_1^2 - m_2^2)} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \left\{ 4m_1^2 m_2^2 F_1 F_3 \left[k^5 (m_2^2 - m_1^2) + \right. \right. \\ &\quad + 8k^2 m_1^2 m_2^2 (h_2 - h_1) + 16m_1^2 m_2^4 (h_2 - h_1) - 32m_1^2 m_2^4 (m_2 - m_1) + \\ &\quad \left. + k^4 (m_1^2 h_2 - m_2^2 h_1) \right] + F_2 F_3 k^2 \left[k^5 (m_2^4 - m_1^4) + 6k^3 m_1^2 m_2^2 (m_1^2 - m_2^2) + \right. \\ &\quad + 8k^2 m_1^2 m_2^2 (m_1^2 (h_2 - 2h_1) + m_2^2 h_1) + 16m_1^4 m_2^4 (h_2 - h_1) + k^4 (m_1^4 h_2 - \\ &\quad \left. - m_2^4 h_1) \right] + F_3^2 k^2 m_2^2 \left[k^3 (m_1^2 - m_2^2) (5m_1^2 + m_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + k^2 (-5m_1^4 h_2 + m_2^4 h_1 + 4m_1^2 m_2^2 h_1) + 6k m_1^2 m_2^2 (m_1^2 - m_2^2) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (1.87)$$

где $h_{1,2} = \sqrt{k^2 + 4m_{1,2}^2}$. Численное интегрирование в (1.87) выполняется с помощью следующей параметризации для формфакторов дейтрона [95]:

$$\begin{pmatrix} F_C \\ F_Q \\ F_M \end{pmatrix} = F_D^2 \left(\frac{k^2}{4} \right) M(\eta) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

где F_D - дипольный формфактор ядра, $f_m = k^m \sum_{i=1}^4 \frac{a_{mi}}{a_{mi}^2 + k^2}$. В результате численного интегрирования получим следующие результаты для поправки на

структуру ядра:

$$\Delta E_{2\gamma, str}^{hfs}(nS) = \begin{cases} 1S : -0.9305 \text{ мэВ} \\ 2S : -0.1163 \text{ мэВ} \end{cases} \quad (1.89)$$

Полагая, что параметризация электромагнитных формфакторов дейтрона была получена с неопределенностью около 0.5 процента на малых значениях квадрата момента фотона, мы получаем теоретическую ошибку при вычислении основной поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^5$, которая определяется произведением двух электромагнитных формфакторов, не менее 1 процента или ± 0.0090 мэВ для $1S$ -состояния и ± 0.0010 мэВ для $2S$ -состояния.

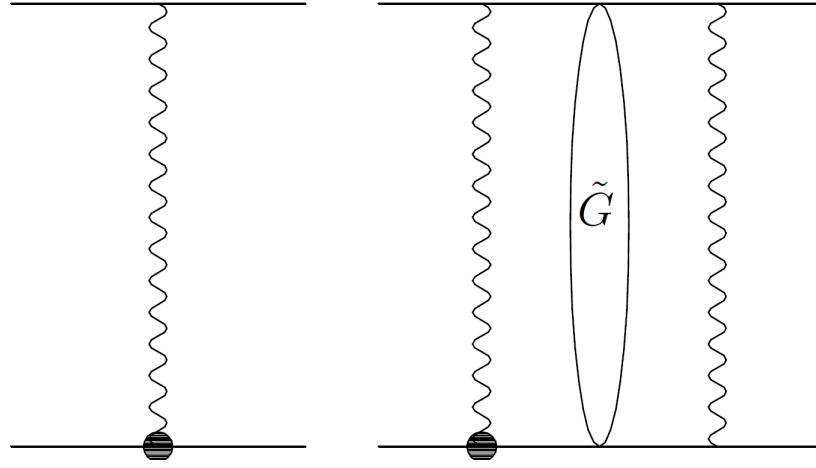


Рисунок 1.14 — Поправки на структуру ядра в однофотонном взаимодействии в первом и втором порядках теории возмущений

Рассмотрим далее поправки на структуру ядра в однофотонном взаимодействии. Поправки порядка α^6 , представленные на рисунке 1.14, дают вклад в сверхтонкую структуру S -состояний в мюонном дейтерии. Для вычисления вклада диаграммы А на рисунке 1.14 мы используем разложение магнитного формфактора дейтрона при $k^2 \rightarrow 0$:

$$G_M(k^2)|_{k^2 \rightarrow 0} = \frac{m_2}{Zm_p} \mu_d \left(1 - \frac{1}{6} r_M^2 k^2 \right). \quad (1.90)$$

В результате в импульсном представлении получаем:

$$\Delta V^{hfs}(k) = -\frac{4\pi\alpha\mu_d}{9m_1m_p} r_M^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) k^2. \quad (1.91)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, переходим в координатное представление:

$$\Delta V^{hfs}(k) = \frac{4\pi\alpha\mu_d}{9m_1m_p} r_M^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \nabla^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (1.92)$$

Усредняя потенциал (1.92) по кулоновским волновым функциям, получаем аналитическое выражение для поправки на структуру ядра порядка α^6 к сверхтонкой структуре и численные значения для уровней $1S$ и $2S$:

$$\Delta E_{1\gamma, str}^{hfs} = \frac{2}{3} \mu^2 \alpha^2 r_M^2 \frac{3n^2 + 1}{n^2} E_F = \begin{cases} 1S : 0.0082 \text{ мэВ} \\ 2S : 0.0008 \text{ мэВ} \end{cases}. \quad (1.93)$$

Еще одну поправку на структуру ядра во втором порядке теории возмущений порядка α^6 в сверхтонкой структуре спектра мюонного дейтерия дает диаграмма Б на рисунке 1.14. Каждый из потенциалов при вычислении этой поправки пропорционален $\delta(\mathbf{r})$, если мы используем разложение по малому переданному импульсу. В результате вклад во втором порядке теории возмущений будет пропорционален расходящемуся выражению $\tilde{G}(0,0)$. Чтобы избежать появления $\tilde{G}(0,0)$ мы записываем потенциал поправки на структуру ядра в виде:

$$\Delta V_{str, 1\gamma}^C(k) = -\frac{Z\alpha}{\mathbf{k}^2} \left[\frac{1}{(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2})^2} - 1 \right] = \frac{Z\alpha}{\Lambda^2} \frac{(2 + \frac{k^2}{\Lambda^2})}{(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2})^2}, \quad \Lambda = \frac{\sqrt{12}}{r_d}. \quad (1.94)$$

Удобство дипольной параметризации для формфактора дейтрона состоит в том, что в результате в координатном представлении мы получаем простое удобное выражение:

$$\Delta V_{str, 1\gamma}^C(r) = \frac{Z\alpha(2 + \Lambda r)}{8\pi r} e^{-\Lambda r}. \quad (1.95)$$

Данное выражение не приводит к появлению $\tilde{G}(0,0)$. Используя выражения (1.59) и (1.60) и проводя аналитическое интегрирование, получим поправку на структуру ядра в однофотонном взаимодействии во втором порядке теории возмущений в сверхтонкой структуре уровней $1S$ и $2S$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str, SOPT}^{hfs}(1S) &= E_F(1S) \frac{\mu\alpha}{2\pi\Lambda(1 + \frac{2W}{\Lambda})^4} \left\{ -2\frac{W}{\Lambda} \left[4\frac{W}{\Lambda} \left(5 + 3\frac{W}{\Lambda} \right) + \right. \right. \\ &+ 13 \left. \right] - 16\frac{W}{\Lambda} \left(1 + \frac{W}{\Lambda} \right) \left(1 + \frac{2W}{\Lambda} \right) \coth^{-1} \left(1 + \frac{4W}{\Lambda} \right) - 3 \left. \right\} = \\ &= -0.0555 \text{ мэВ}, \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,SOPT}^{hfs}(2S) = -E_F(2S) \frac{\mu\alpha}{8\pi\Lambda(1+\frac{W}{\Lambda})^6} & \left\{ \frac{W}{\Lambda} \left[\left(\frac{W}{\Lambda} \left(14 + 3\frac{W}{\Lambda} \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 31 \right) \frac{W^2}{\Lambda^2} + 16 \right] + 8\frac{W}{\Lambda} \left(1 + \frac{W}{\Lambda} \right) \left[\left(3 + \frac{W}{\Lambda} \right) \frac{W^2}{\Lambda^2} + 4 \right] \coth^{-1} \times \right. \\ & \left. \times \left(1 + \frac{2W}{\Lambda} \right) + 6 \right\} = -0.0069 \text{ мЭВ}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Все численные значения представлены в Таблице 1.

Сравнивая полученные численные значения поправок на структуру ядра и отдачу в сверхтонкой структуре S-состояний мюонного дейтерия с результатами из [28], нужно отметить, что в [28] была учтена поправка Земаха ($-0.1177(7)$ мЭВ для $2S$ -состояния, поправка на структуру ядра к двухфотонным обменным диаграммам без учета эффектов отдачи), в то время как нами был вычислен полный вклад поправки на структуру ядра к двухфотонным обменным диаграммам порядка α^5 с учетом эффектов отдачи и с использованием современной параметризации формфакторов дейтрона (-0.1163 мЭВ для $2S$ -состояния). Наше значение сверхтонкого расщепления $2S$ -состояния мюонного дейтерия без учета поляризуемости 6.0683 мЭВ хорошо согласуется со значением 6.0584 meV из [28]. Небольшое различие в результатах обусловлено учетом нами дополнительных поправок на структуру ядра, а также использованием нами современных экспериментальных данных по электромагнитным формфакторам дейтрона. Мы также включили в таблицу 1 численное значение поправки на поляризуемость в сверхтонкой структуре S-состояний мюонного дейтерия, которое было получено на основе аналитического выражения из [85] для электронного дейтерия в приближении нулевого радиуса. Оценка поправки на внутреннюю поляризуемость дейтрона была получена на основе результатов для мюонного водорода. Экспериментальное значение сверхтонкой структуры $2S$ -состояния мюонного дейтерия $\Delta E_{HFS}^{exp} = 6.2747(70)_{\text{стат.}}(20)_{\text{сист.}}$ мЭВ [12] хорошо согласуется с нашим значением $\Delta E_{HFS}^{theor} = 6.2804 \pm 0.0050$ мЭВ.

1.5 Сверхтонкая структура мезомолекулярных ионов водорода

Рассмотрим трехчастичные связанные системы в квантовой механике. Уравнение Шредингера в случае трех взаимодействующих частиц не имеет точного аналитического решения, что создает необходимость использования некоторых приближений или численных методов решения. В наиболее общем случае, в предположении сравнимых масс трех частиц и сравнимых относительных расстояний между частицами, необходимо использовать подход, исключающий какие-либо приближения по отношению масс частиц или относительным расстояниям. Этим обусловлен выбор нами вариационного подхода в квантовой механике.

Обратимся теперь к актуальности изучения трехчастичных связанных систем. В то время как ВП атомы являются классическими объектами для прецизионной проверки квантовой электродинамики и определения значений фундаментальных физических констант, трехчастичные связанные состояния, такие как мезомолекулы $pp\mu$, $pd\mu$, $pt\mu$, $dd\mu$, $td\mu$ и $tt\mu$, также представляют огромный теоретический и экспериментальный интерес. Мезомолекулы, в первую очередь, интересны в связи с явлением мюонного катализа ядерных реакций синтеза.

Идея мюонного катализа ядерных реакций синтеза, или просто мюонного катализа (muon catalyzed fusion, MCFusion, MCF), состоит в следующем:

- Отрицательно заряженный мюон (нестабильная частица с временем жизни $\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}$ с и массой $m_\mu = 206.769m_e$) попадая в смесь изотопов водорода, образует там мюонные атомы $p\mu$, $d\mu$ и $t\mu$, которые, сталкиваясь затем с молекулами H_2 , D_2 и T_2 (а также HD , HT и DT), образуют мезомолекулы (или, точнее, мезомолекулярные ионы) $pp\mu$, $pd\mu$ и так далее.
- Поскольку мюон примерно в 200 раз тяжелее электрона, то размеры мезомолекул во столько же раз меньше размеров молекулярных ионов H_2 ,

HD и так далее, в которых ядра удалены друг от друга в среднем на расстояние в две атомных единицы $\sim 2a_0 = 2\hbar^2/m_e e^2 \approx 10^{-8}$ см. В мезомолекулах ядра удалены на расстояние примерно в две мезоатомных единицы $\sim 2a_\mu = 2\hbar^2/m_\mu e^2 \approx 5 \cdot 10^{-11}$ см. После образования мезомолекул $dd\mu$, $td\mu$ и $tt\mu$ чрезвычайно быстро, за времена $\approx \tau = 10^{-9} - 10^{-12}$ с, происходит слияние их ядер за счет сильного взаимодействия [96].

Для расчета скоростей образования мезомолекулярных ионов водорода нужно знать структуру их уровней энергии и волновые функции для состояний с различными вращательными и колебательными квантовыми числами. Такие расчеты предпринимались неоднократно, начиная с 1957 года. В 1973 — 1977 годах в Дубне был развит метод адиабатического представления в задаче трех тел, позволявший выполнять вычисления с разумной точностью. В дальнейшем с 80-х годов прошлого века и по сегодняшнее время прямые вариационные методы расчетов [97—104] позволили существенно улучшить точность прежних вычислений.

Важно отметить, что наряду с полной энергией E конкретного состояния мезомолекулярного иона может быть введена величина $\epsilon_{bind} = -(E + \frac{m_r}{2m_\mu n^2})$, где m_r - приведенная масса двухчастичной системы из мюона и самого тяжелого изотопа водорода (в случае мезомолекулы $pd\mu$ это $d\mu$), n - главное квантовое число такой системы. Для основного состояния $n = 1$ [97—101]. Для конкретного уровня энергии мезомолекулярного иона знак величины ϵ_{bind} определяет, является ли состояние двух кластеров ($d\mu$ и p в случае $pd\mu$) связанным или нет.

Для расчета сверхтонкой структуры основного состояния мезомолекулярных ионов водорода мы используем стохастический вариационный метод [102—104]. Пробная волновая функция для связанной системы трех нетождественных частиц может быть записана в следующем виде:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i), \quad (1.98)$$

где N — размер базиса, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\lambda}$ — координаты Якоби, A — 2×2 положительно — определенная матрица нелинейных вариационных параметров, c_i — линей-

ные вариационные параметры. Координаты Якоби связаны с относительными координатами следующими соотношениями:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (1.99)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} - \mathbf{r}_3. \quad (1.100)$$

Тогда уравнение Шредингера для системы частиц будет иметь следующий общий вид:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (1.101)$$

или, подставляя в явной форме пробную функцию (1.98),

$$\hat{H} \sum_{i=1}^N c_i \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i) = E \sum_{i=1}^N c_i \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i). \quad (1.102)$$

Домножая обе части уравнения слева на $\varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_j)$, получаем:

$$\sum_{i=1}^N (\varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_j), \hat{H} \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i)) c_i = E \sum_{i=1}^N (\varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i), \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i)) c_i, \quad (1.103)$$

что в матричном виде приводит к уравнению:

$$Hc = EBc, \quad (1.104)$$

где $H_{ij} = \langle \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i) | \hat{H} | \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_j) \rangle$, $B_{ij} = \langle \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_i) | \varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A_j) \rangle$.

Верхняя оценка энергии основного состояния системы в вариационном подходе дается наименьшим собственным значением обобщенной задачи на собственные значения (1.104).

Для случая трех связанных частиц в S -состоянии ($L = 0$, где L — полный момент импульса системы) гауссовы базисные функции принимают вид:

$$\varphi_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A) = e^{-\frac{1}{2}[A_{11}\rho^2 + A_{22}\lambda^2 + 2A_{12}(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\lambda})]} \Psi_{S_{12}, S}, \quad (1.105)$$

где $\Psi_{S_{12}, S}$ — спиновая волновая функция системы. Зная явный вид базисных функций мы можем вычислить матричные элементы гамильтониана и перекрывающиеся матричные элементы аналитически, что является преимуществом

гауссова базиса. Перекрывающие матричные элементы тогда имеют следующий вид:

$$\langle \varphi' | \varphi \rangle = \iint d\rho d\lambda e^{-\frac{1}{2}[B_{11}\rho^2 + B_{22}\lambda^2 + 2B_{12}(\rho\lambda)]}, \quad (1.106)$$

где $B_{ij} = A'_{ij} + A_{ij}$. Перейдем к сферическим координатам и обозначим угол между векторами ρ и λ как θ . Тогда, проинтегрировав по одному из углов, получим:

$$\begin{aligned} \langle \varphi' | \varphi \rangle &= 8\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\pi \rho^2 \lambda^2 d\rho d\lambda d(\cos \theta) e^{-\frac{1}{2}[B_{11}\rho^2 + B_{22}\lambda^2 + 2B_{12}\rho\lambda \cos \theta]} = \\ &= \frac{8\pi^3}{(\det B)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Для вычисления матричных элементов гамильтониана выпишем развернутые выражения для кинетической и потенциальной энергии системы в координатах Якоби. В нерелятивистском приближении гамильтониан мезомолекулярного иона без учета сверхтонкой структуры имеет в координатах Якоби следующий вид:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_1}\Delta_\rho - \frac{\hbar^2}{2\mu_2}\Delta_\lambda + \frac{e_1 e_2}{|\rho|} + \frac{e_1 e_3}{|\lambda + \frac{m_2}{m_{12}}\rho|} + \frac{e_2 e_3}{|\lambda - \frac{m_1}{m_{12}}\rho|}, \quad (1.108)$$

где $\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\mu_2 = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \rho$, $\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = \lambda + \frac{m_2}{m_{12}}\rho$, $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 = \lambda - \frac{m_1}{m_{12}}\rho$, e_1, e_2, e_3 — заряды частиц. Матричные элементы кинетической энергии имеют следующую аналитическую форму:

$$\langle \varphi' | \hat{T} | \varphi \rangle = -\frac{24\pi^3}{(\det B)^{5/2}} \left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu_1} I_\rho + \frac{\hbar^2}{2\mu_2} I_\lambda \right\}, \quad (1.109)$$

$$I_\rho = A_{12}^2 B_{11} - 2A_{11}A_{12}B_{12} + A_{11}(B_{12}^2 + (A_{11} - B_{11})B_{22}), \quad (1.110)$$

$$I_\lambda = A_{12}^2 B_{22} - 2A_{22}A_{12}B_{12} + A_{22}(B_{12}^2 + (A_{22} - B_{22})B_{11}). \quad (1.111)$$

Для матричных элементов потенциальной энергии имеем:

$$\langle \varphi' | \hat{V} | \varphi \rangle = e_1 e_2 I_{12} + e_1 e_3 I_{13} + e_2 e_3 I_{23}. \quad (1.112)$$

$$I_{12} = \frac{8\sqrt{2}\pi^{5/2}}{\sqrt{B_{22} \det B}}. \quad (1.113)$$

При вычислении интеграла $I_{13,23}$ была использована замена переменной $\mathbf{k}^{13,23} = \boldsymbol{\lambda} \pm \frac{m_2^{13,23}}{m_{12}} \boldsymbol{\rho}$.

$$I_{13,23} = \frac{8\sqrt{2}\pi^{5/2}}{\sqrt{F_1^{13,23}(B_{22}F_1^{13,23} - (F_2^{13,23})^2)}}, \quad (1.114)$$

$$F_1^{13,23} = B_{11} + B_{22} \frac{(m_{2,1}^{13,23})^2}{m_{12}^2} \mp 2B_{12} \frac{m_{2,1}^{13,23}}{m_{12}}, \quad F_2^{13,23} = B_{12} \mp B_{22} \frac{m_{2,1}^{13,23}}{m_{12}}. \quad (1.115)$$

Для расчета сверхтонкой структуры мезомолекулярных ионов водорода вычислим матричные элементы сверхтонкой части гамильтониана взаимодействия. Потенциал сверхтонкого взаимодействия для основного состояния трехчастичной системы может быть получен из хорошо известного гамильтониана Брейта и записан в следующей удобной форме для трех взаимодействующих частиц со спинами S_1, S_2, S_3 соответственно:

$$\Delta V^{hfs} = a(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2) + b(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_3) + c(\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3), \quad (1.116)$$

$$a = \frac{2\pi\alpha^2 e_1 e_2 (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)}{3m_1 m_2 S_1 S_2} \delta(\mathbf{r}_{12}),$$

$$b = \frac{2\pi\alpha^2 e_1 e_3 (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_3)}{3m_1 m_3 S_1 S_3} \delta(\mathbf{r}_{13}),$$

$$c = \frac{2\pi\alpha^2 e_2 e_3 (1 + \kappa_2)(1 + \kappa_3)}{3m_2 m_3 S_2 S_3} \delta(\mathbf{r}_{23}),$$

где межчастичные расстояния выражаются через координаты Якоби следующим образом:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\rho}, \quad (1.117)$$

$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = \boldsymbol{\lambda} + \frac{m_2}{m_1 2} \boldsymbol{\rho}, \quad (1.118)$$

$$\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 = \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_1}{m_1 2} \boldsymbol{\rho}. \quad (1.119)$$

В случае мезомолекулярных ионов удобно записать коэффициенты a, b и c через g -факторы частиц в мюонных атомных единицах в виде:

$$a = \frac{2\pi\alpha^2 e_1 e_2 g_1 g_2}{3m_p^2} \delta(\mathbf{r}_{12}), \quad b = \frac{2\pi\alpha^2 e_1 e_3 g_1 g_3}{3m_p} \delta(\mathbf{r}_{13}), \quad c = \frac{2\pi\alpha^2 e_2 e_3 g_2 g_3}{3m_p} \delta(\mathbf{r}_{23}), \quad (1.120)$$

где индексы 1,2 соответствуют двум изотопам водорода, а индекс 3 — мюону, m_p — масса протона в мюонных атомных единицах. Усреднение сверхтонкого потенциала предполагает как усреднение по радиальным частям базисных функций, так и по спиновым волновым функциям. Аналитическое интегрирование матричных элементов от $\delta(\mathbf{r}_{ij})$ дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{r}_{12}) \rangle &= \langle \delta(\boldsymbol{\rho}) \rangle = \int \int d\boldsymbol{\rho} d\lambda \delta(\boldsymbol{\rho}) e^{-\frac{1}{2}[B_{11}\rho^2 + B_{22}\lambda^2 + 2B_{12}(\boldsymbol{\rho}\lambda)]} = \\ &= 4\pi \int \lambda^2 d\lambda e^{-\frac{1}{2}B_{22}\lambda^2} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{(B_{22})^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{13}) \rangle = \frac{(2\pi)^{3/2}}{(B_{11} - 2B_{12}\frac{m_2}{m_{12}} + B_{22}(\frac{m_2}{m_{12}})^2)^{3/2}}, \quad (1.122)$$

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{23}) \rangle = \frac{(2\pi)^{3/2}}{(B_{11} + 2B_{12}\frac{m_1}{m_{12}} + B_{22}(\frac{m_1}{m_{12}})^2)^{3/2}}. \quad (1.123)$$

Для усреднения по спиновым волновым функциям мы используем теорему Вигнера — Эккарта Б. В общем виде формулы усреднения по спиновым волновым функциям для произвольных спинов S_1 , S_2 и S_3 могут быть записаны следующим образом:

$$\langle \Psi_{S'_{12}, S} | (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) | \Psi_{S_{12}, S} \rangle = \overline{(S_1 S_2)}_{S_{12}} \delta_{S_{12} S'_{12}}, \quad (1.124)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{S'_{12}, S} | (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_3) | \Psi_{S_{12}, S} \rangle &= \sqrt{(2S'_{12} + 1)(2S_{12} + 1)(2S_1 + 1)(S_1 + 1)S_1} \times \\ &\sqrt{(2S_3 + 1)(S_3 + 1)S_3} (-1)^{S_{12}^{max} + S_{12}^{min} + S + S_1 + S_2 + S_3 + 1} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} S_{12} & S_3 & S \\ S_3 & S'_{12} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 & S'_{12} & S_2 \\ S_{12} & S_1 & 1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.125)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{S'_{12}, S} | (\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3) | \Psi_{S_{12}, S} \rangle &= \sqrt{(2S'_{12} + 1)(2S_{12} + 1)(2S_2 + 1)(S_2 + 1)S_2} \times \\ &\sqrt{(2S_3 + 1)(S_3 + 1)S_3} \times (-1)^{2S_{12}^{max} + S + S_1 + S_2 + S_3 + 1} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} S_{12} & S_3 & S \\ S_3 & S'_{12} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_2 & S'_{12} & S_1 \\ S_{12} & S_2 & 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Тогда в случае $S_1 = 1$, $S_2 = S_3 = 1/2$ для мезомолекулярных ионов $pd\mu$, $td\mu$ матрица энергий принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a - \frac{5}{6}b - \frac{5}{12}c & \frac{\sqrt{2}}{3}b - \frac{\sqrt{2}}{3}c & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}b - \frac{\sqrt{2}}{3}c & -a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{12}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a - b + \frac{1}{4}c \end{pmatrix}. \quad (1.127)$$

После диагонализации получаем следующие собственные значения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(-4a - 4b + c), \quad (1.128)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(2a + 2b + c), \quad (1.129)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{4}(\mp \sqrt{9a^2 - 14ab - 4ac + 9b^2 - 4bc + 4c^2} - a - b - c). \quad (1.130)$$

Таким образом, для конфигурации спинов $S_1 = 1$, $S_2 = S_3 = 1/2$ мы получаем 4 уровня сверхтонкой структуры в основном состоянии. В случае $S_1 = S_2 = S_3 = 1/2$ для мезомолекулярного иона $tp\mu$ матрица энергий принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c & \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{\sqrt{3}}{4}c \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{\sqrt{3}}{4}c & -\frac{3}{4}a \end{pmatrix}. \quad (1.131)$$

После диагонализации получаем следующие собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4}(a + b + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac}, \quad (1.132)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(a + b + c). \quad (1.133)$$

Для конфигурации спинов $S_1 = S_2 = S_3 = 1/2$ мы получаем 3 уровня сверхтонкой структуры в основном состоянии.

Для непосредственного численного расчета сверхтонкой структуры мезомолекулярных ионов мы используем первый порядок теории возмущений и вариационную волновую функцию, полученную после численного расчета энергии основного состояния с помощью стохастического вариационного метода.

Например, для расчета численного значения матричного элемента $\langle \delta(\mathbf{r}_{12}) \rangle$ в первом порядке теории возмущений используется следующая формула:

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{12}) \rangle = \frac{\sum_{i,j=1}^N c_i c_j \frac{(2\pi)^{3/2}}{(A_{22}^i + A_{22}^j)^{3/2}}}{\sum_{i,j=1}^N c_i c_j \frac{8\pi^3}{[(A_{11}^i + A_{11}^j)(A_{22}^i + A_{22}^j) - (A_{12}^i + A_{12}^j)^2]^{3/2}}}, \quad (1.134)$$

где c_i, c_j — линейные вариационные параметры, N — размер базиса. Остальные матричные элементы могут быть вычислены аналогично. Таким образом, мы получаем численные значения для коэффициентов a, b и c и энергии уровней сверхтонкой структуры для мезомолекулярных ионов водорода.

Отдельно необходимо рассмотреть релятивистские поправки и поправку на поляризацию вакуума к энергии основного состояния мезомолекулярных ионов. Релятивистские поправки, которые могут быть получены из гамильтониана Брейта, имеют в случае трех взаимодействующих частиц следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{\text{rel}} = & -\frac{\alpha^2}{8} \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{p}_i^4}{m_i^3} - \frac{\pi\alpha^2}{2} \sum_{i,j=1;i \neq j}^3 e_i e_j \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \delta(\mathbf{r}_{ij}) - \\ & -\frac{\alpha^2}{2} \sum_{i,j=1;i \neq j}^3 \frac{e_i e_j \left(\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j + \frac{\mathbf{r}_{ij}(\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j}{r_{ij}^2} \right)}{m_i m_j r_{ij}}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Все поправки представлены в мюонных атомных единицах. Поправка на поляризацию вакуума в мюонных атомных единицах имеет вид:

$$V_{\text{VP}} = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{i,j=1;i \neq j}^3 \frac{e_i e_j}{r_{ij}} \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4} e^{-2\gamma\xi r_{ij}}, \quad (1.136)$$

где $\gamma = \frac{m_e}{m_\mu \alpha}$. Для расчета поправок, как и в случае сверхтонкой структуры, мы используем первый порядок теории возмущений. Общее выражение для произвольного потенциала имеет вид:

$$\langle V \rangle = \frac{\sum_{i,j=1}^K c_i c_j \langle \varphi_i | V | \varphi_j \rangle}{\sum_{i,j=1}^K c_i c_j \frac{8\pi^3}{[(A_{11}^i + A_{11}^j)(A_{22}^i + A_{22}^j) - (A_{12}^i + A_{12}^j)^2]^{3/2}}}, \quad (1.137)$$

где V — произвольный потенциал, c_i, c_j — линейные вариационные параметры, K — количество базисных функций. Из данного выражения следует

необходимость вычислить матричные элементы $\langle \varphi_i | V | \varphi_j \rangle$ для релятивистских поправок и поправки на поляризацию вакуума. Для основного состояния мезомолекулярных ионов такие матричные элементы имеют следующий аналитический вид:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \mathbf{p}_1^4 | \varphi_j \rangle &= \frac{15(2\pi)^3}{(\det B)^{7/2}} \left[\left(A_{11}^j + 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} A_{12}^j + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 A_{22}^j \right) \times \right. \\ &\times \det(A^i) + \left. \left(A_{11}^i + 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} A_{12}^i + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 A_{22}^i \right) \det(A^j) \right]^2, \quad (1.138) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \mathbf{p}_2^4 | \varphi_j \rangle &= \frac{15(2\pi)^3}{(\det B)^{7/2}} \left[\left(A_{11}^j - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} A_{12}^j + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 A_{22}^j \right) \times \right. \\ &\times \det(A^i) + \left. \left(A_{11}^i - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} A_{12}^i + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 A_{22}^i \right) \det(A^j) \right]^2, \quad (1.139) \end{aligned}$$

$$\langle \varphi_i | \mathbf{p}_3^4 | \varphi_j \rangle = \frac{15(2\pi)^3}{(\det B)^{7/2}} [A_{22}^j \det A^i + A_{22}^i \det A^j]^2, \quad (1.140)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \frac{1}{r_{12}} \left(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 + \frac{\mathbf{r}_{12} (\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_2}{r_{12}^2} \right) | \varphi_j \rangle &= \\ &= \frac{8(2\pi)^{5/2}}{[\sqrt{B_{22}} (\det B)^2]} \left[\left(A_{11}^i + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} A_{12}^i - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} A_{22}^i \right) \det(A^j) + \left(A_{11}^j + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} A_{12}^j - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} A_{22}^j \right) \det(A^i) \right], \quad (1.141) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \frac{1}{r_{13}} \left(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3 + \frac{\mathbf{r}_{13} (\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_3}{r_{13}^2} \right) | \varphi_j \rangle &= \\ &= \frac{8(2\pi)^{5/2}}{\left[(\det B)^2 \sqrt{B_{11} - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} B_{12} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 B_{22}} \right]} \times \\ &\times \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} A_{22}^i + A_{12}^i \right) \det(A^j) + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} A_{22}^j + A_{12}^j \right) \det(A^i) \right], \quad (1.142) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \frac{1}{r_{23}} \left(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 + \frac{\mathbf{r}_{23} (\mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{p}_3}{r_{23}^2} \right) | \varphi_j \rangle &= \\ &= \frac{8(2\pi)^{5/2}}{\left[(\det B)^2 \sqrt{B_{11} + 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} B_{12} + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 B_{22}} \right]} \times \\ &\times \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} A_{22}^i + A_{12}^i \right) \det(A^j) + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} A_{22}^j + A_{12}^j \right) \det(A^i) \right], \quad (1.143) \end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} A_{22}^i - A_{12}^i \right) \det(A^j) + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} A_{22}^j - A_{12}^j \right) \det(A^i) \right].$$

В случае поправки на однопетлевую поляризацию вакуума аналитическое выражение для матричного элемента после интегрирования по координатам Якоби и спектральному параметру выражается через G-функции Мейера следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \frac{1}{r_{12}} \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4} e^{-2\frac{m_e}{m_{\mu\alpha}} \xi r_{12}} | \varphi_j \rangle = & \frac{\sqrt{2}\pi^{7/2}}{4\mathcal{M}^{5/2} B_{22}^{3/2}} \times \\ & \times (8\pi\mathcal{M}^{3/2} G_{3,4}^{2,1} \left(\frac{\mathcal{N}^2}{4\mathcal{M}} \middle| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right) + \end{aligned} \quad (1.144)$$

$$+ \sqrt{\pi}(4\sqrt{\pi}\mathcal{M}^{3/2} G_{3,4}^{2,1} \left(\frac{\mathcal{N}^2}{4\mathcal{M}} \middle| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \\ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right) + \mathcal{N}^3 + 6\mathcal{N}\mathcal{M}),$$

$$\mathcal{N} = 2\gamma, \quad \mathcal{M} = \frac{\det B}{2B_{22}}, \quad (1.145)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \frac{1}{r_{13,23}} \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4} e^{-2\frac{m_e}{m_{\mu\alpha}} \xi r_{13,23}} | \varphi_j \rangle = & \frac{\sqrt{2}\pi^{7/2}}{4(\mathcal{L}^{13,23})^{5/2} (F_1^{13,23})^{3/2}} \times \\ & \times (8\pi(\mathcal{L}^{13,23})^{3/2} G_{3,4}^{2,1} \left(\frac{\mathcal{N}^2}{4\mathcal{L}^{13,23}} \middle| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right) + \\ & + \sqrt{\pi}(4\sqrt{\pi}(\mathcal{L}^{13,23})^{3/2} G_{3,4}^{2,1} \left(\frac{\mathcal{N}^2}{4\mathcal{L}^{13,23}} \middle| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \\ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right) + \mathcal{N}^3 + 6\mathcal{N}\mathcal{L}^{13,23}), \end{aligned} \quad (1.146)$$

$$\mathcal{L} = \frac{B_{22}F_1^{13,23} - (F_2^{13,23})}{2F_1^{13,23}}. \quad (1.147)$$

Учтем также поправку на структуру ядра для основного состояния мезомолекулярных ионов. Данная поправка может быть получена при помощи разложения электрического формфактора

$$G_E(k^2)|_{k^2 \rightarrow 0} = G_E(0) + \frac{dG_E(k^2)}{dk^2} \Big|_{k^2=0} k^2 + \dots = 1 - \frac{1}{6} r_E^2 \mathbf{k}^2 + \dots \quad (1.148)$$

В результате для мезомолекулярных ионов имеем следующее выражение для поправки на структуру ядра в мюонных атомных единицах:

$$V_{\text{str}} = -\frac{2}{3}(e_a e_\mu) r_a^2 \delta^3(\mathbf{r}_{a\mu}) - \frac{2}{3}(e_b e_\mu) r_b^2 \delta^3(\mathbf{r}_{b\mu}), \quad (1.149)$$

где индексы a, b обозначают два изотопа водорода, входящие в мезомолекулярный ион, r_a, r_b — зарядовые радиусы соответствующих изотопов водорода, индекс μ обозначает мюон.

Таблица 2 — Энергия основного состояния и сверхтонкая структура мезомолекулярных ионов водорода. В круглых скобках указаны значения из работы [105]

| Вклад | $pd\mu$ | $tp\mu$ | $td\mu$ |
|-------------------------------|--|--|--|
| Полная энергия, μ а.е. | -0.51271179025 (-0.51271179248) | -0.51988008423 (-0.51988008570) | -0.53859497060 (-0.53859497171) |
| λ_1 , МГц | -2.3086×10^7 (-2.3097×10^7) | -3.1823×10^7 (-3.1839×10^7) | -3.6021×10^7 (-3.6038×10^7) |
| λ_2 , МГц | -2.1213×10^7 (-2.1222×10^7) | 1.6774×10^6 (1.6797×10^6) | -3.4422×10^7 (-3.4439×10^7) |
| λ_3 , МГц | 9.3013×10^6 (9.3058×10^6) | 1.5073×10^7 (1.5080×10^7) | 1.5977×10^7 (1.5985×10^7) |
| λ_4 , МГц | 1.2514×10^7 (1.2519×10^7) | — | 1.8911×10^7 (1.8920×10^7) |

Для численного расчета была написана программа в системе MATLAB для решения трехчастичной кулоновской задачи в рамках стохастического вариационного метода и уравнения Шредингера. За основу была взята программа из работы [103] на языке Fortran. В программу был внесен ряд изменений: вписаны полученные нами аналитические выражения для матричных элементов, изменена процедура генерации и оптимизации нелинейных вариационных параметров, добавлена возможность вычисления матричных элементов сверхтонкой структуры в первом порядке теории возмущений. В результате были получены следующие численные значения для энергии основного состояния, сверхтонкого расщепления основного состояния, релятивистских поправок, поправки на поля-

ризацию вакуума и структуру ядра мезомолекулярных ионов $pd\mu$, $tp\mu$ [44; 46]:

$$\begin{aligned}
 E^{pd\mu} &= -0.51271179025 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_1^{pd\mu} &= -0.000016969 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_2^{pd\mu} &= -0.000015592 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_3^{pd\mu} &= 6.837 \times 10^{-6} \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_4^{pd\mu} &= 9.198 \times 10^{-6} \mu \text{ a.e.} \\
 E_{rel}^{pd\mu} &= -0.000046803 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{VP}^{pd\mu} &= -0.00111181 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{str}^{pd\mu} &= 7.738 \times 10^{-6} \mu \text{ a.e.}
 \end{aligned} \tag{1.150}$$

$$\begin{aligned}
 E^{tp\mu} &= -0.51988008423 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_1^{tp\mu} &= -0.000023391 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_2^{tp\mu} &= 1.233 \times 10^{-6} \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_3^{tp\mu} &= 0.000011079 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{rel}^{tp\mu} &= -0.000042433 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{VP}^{tp\mu} &= -0.00115462 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{str}^{tp\mu} &= 9.719 \times 10^{-6} \mu \text{ a.e.}
 \end{aligned} \tag{1.151}$$

$$\begin{aligned}
 E^{td\mu} &= -0.53859497060 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_1^{td\mu} &= -0.000026477 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_2^{td\mu} &= -0.000025302 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_3^{td\mu} &= 0.000011744 \mu \text{ a.e.} \\
 \lambda_4^{td\mu} &= 0.000013900 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{rel}^{pd\mu} &= -0.000026600 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{VP}^{pd\mu} &= -0.00123407 \mu \text{ a.e.} \\
 E_{str}^{pd\mu} &= 0.000014217 \mu \text{ a.e.}
 \end{aligned} \tag{1.152}$$

Полученные значения хорошо согласуются с [105; 106]. Подробное сравнение энергий основного состояния и уровней сверхтонкой структуры представлено в таблице 2. Имеющиеся расхождения связаны с меньшим размером базиса в наших расчетах и, как следствие, меньшей точностью энергии основного состояния. Также необходимо упомянуть, что в работе [105] при вычислении

используется четверная точность, в то время как в наших расчетах используется двойная точность. Это также вносит различия в результаты.

Глава 2. Сверхтонкая структура спектра Р-состояний

2.1 Поправки на поляризацию вакуума

Рассмотрим сверхтонкую структуру 2Р-уровня атома мюонного дейтерия. Принимая во внимание моменты импульсов мюона и дейтрона, а также учитывая наличие тонкой структуры, получим схематичную диаграмму, показанную на рисунке 2.1. Сверхтонкая структура 2Р-уровня, таким образом, сложнее в сравнении с S-состоянием и состоит из пяти подуровней.

Из-за наличия у мюона ненулевого орбитального момента импульса, сверхтонкая часть гамильтониана Брейта имеет отличный от S-состояний вид [107–109]:

$$\begin{aligned} \Delta V_B^{hfs}(r) = & \frac{Z\alpha(1+\kappa_d)}{2m_1m_2r^3} \left[1 + \frac{m_1\kappa_d}{m_2(1+\kappa_d)} \right] (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) - \\ & - \frac{Z\alpha(1+\kappa_d)(1+a_\mu)}{2m_1m_2r^3} \left[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n}) \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m_1 , m_2 — массы мюона и дейтрона соответственно, κ_d , a_μ — аномальные магнитные моменты дейтрона и мюона, \mathbf{L} , \mathbf{s}_1 — орбитальный момент импульса и спин мюона, \mathbf{s}_2 — спин дейтрона, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Этот оператор не коммутирует с оператором полного момента импульса мюона $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}_1$, что приводит к смешиванию уровней и необходимости вычисления недиагональных матричных элементов. Нужно также принять во внимание наличие у Р-уровней тонкой структуры. Величина тонкой структуры мюонного дейтерия была получена в работе [65] и равна $\Delta E_{fs} = 8.86386$ мэВ.

Начнем вычисление сверхтонкой структуры Р-состояний с диагональных матричных элементов $\langle 2P_{1/2} | \Delta V_B^{hfs} | 2P_{1/2} \rangle$ и $\langle 2P_{3/2} | \Delta V_B^{hfs} | 2P_{3/2} \rangle$ брейтовского потенциала (2.1). Для вычислений нам понадобится явный вид

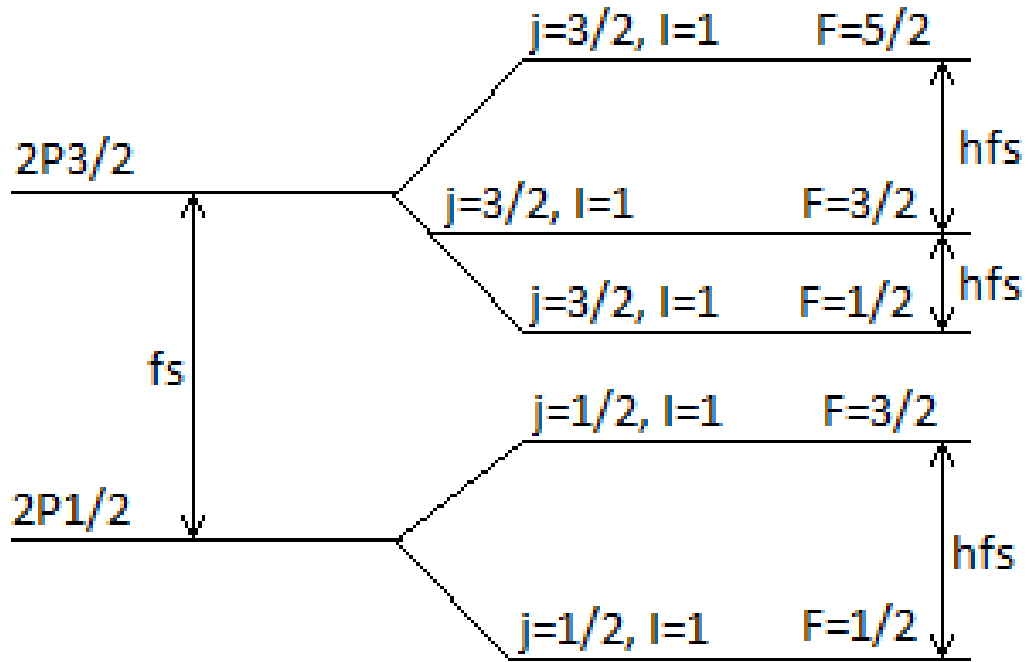


Рисунок 2.1 — Схематическое изображение сверхтонкой структуры $2P$ -уровня атома мюонного дейтерия. Сокращение fs (fine structure) обозначает интервал тонкой структуры между уровнями $2P_{1/2}$ и $2P_{3/2}$, hfs (hyperfine structure) обозначает интервалы сверхтонкой структуры, j — орбитальный момент импульса мюона, I — спин дейтрона, $F = j + I$ — полный момент импульса системы мюон — дейтрон. Над каждым из уровней сверхтонкой структуры указаны значения квантовых чисел, соответствующих данному уровню

кулоновской волновой функции для $2P$ -состояния:

$$\Psi_{2P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{6}} W^{\frac{5}{2}} r e^{-\frac{Wr}{2}} Y_{1m}(\theta, \varphi), \quad (2.2)$$

$$W = \mu Z \alpha.$$

Усреднение по углам в выражении (2.1) можно выполнить с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &\rightarrow \mathbf{J} \frac{\overline{(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{J})}}{J^2}, \\ \mathbf{L} &\rightarrow \mathbf{J} \frac{\overline{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{J})}}{J^2}, \\ \overline{(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{J})} &= \frac{1}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4} \right], \\ \overline{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{J})} &= \frac{1}{2} \left[j(j+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right], \\ \langle \delta_{ij} - 3n_i n_j \rangle &= -\frac{1}{5} (4\delta_{ij} - 3L_i L_j - 3L_j L_i). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для удобства введем следующие обозначения для угловых множителей в потенциале:

$$\begin{aligned} T_1 &= (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2), \\ T_2 &= \left[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n}) \right], \\ T_3 &= \left[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n}) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда после усреднения по волновым функциям (2.2) для диагональных матричных элементов брейтовского потенциала получим следующее аналитическое выражение:

$$E_B^{hfs} = \frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{48m_1 m_2} \left[\overline{T_1} + \frac{m_1 \kappa_d}{m_2 (1 + \kappa_d)} \overline{T_1} - (1 + a_\mu) \overline{T_2} \right]. \quad (2.5)$$

Подставляя соответствующие значения квантовых чисел в $\overline{T_1}$ и $\overline{T_2}$, получим выражения для конкретных уровней сверхтонкой структуры 2P-состояния. В связи со сложностью сверхтонкой структуры 2P-состояния и наличия недиагональных матричных элементов аналитические выражения представлены для каждого уровня сверхтонкой структуры отдельно, а не для сверхтонкого расщепления, как в S-состояниях. Также для уровней $2P_{3/2}$ необходимо учесть численное значение тонкой структуры $\Delta E_{fs} = 8.86386$ мэВ [65]. В результате

получим следующие выражения для основного вклада в сверхтонкую структуру 2P-состояния:

$$E_{F=1/2}^{hfs,2P_{1/2}} = -\frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{18m_1 m_2} \left[1 + \frac{m_1 \kappa_d}{2m_2 (1 + \kappa_d)} + \frac{a_\mu}{2} \right] = -1.38 \text{ мЭВ}, \quad (2.6)$$

$$E_{F=3/2}^{hfs,2P_{1/2}} = \frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{36m_1 m_2} \left[1 + \frac{m_1 \kappa_d}{2m_2 (1 + \kappa_d)} + \frac{a_\mu}{2} \right] = 0.69 \text{ мЭВ}, \quad (2.7)$$

$$E_{F=1/2}^{hfs,2P_{3/2}} = -\frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{72m_1 m_2} \left[2 + \frac{5m_1 \kappa_d}{2m_2 (1 + \kappa_d)} - \frac{a_\mu}{2} \right] = 8.16 \text{ мЭВ}, \quad (2.8)$$

$$E_{F=3/2}^{hfs,2P_{3/2}} = -\frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{36m_1 m_2} \left[\frac{2}{5} + \frac{m_1 \kappa_d}{2m_2 (1 + \kappa_d)} - \frac{a_\mu}{10} \right] = 8.58 \text{ мЭВ}, \quad (2.9)$$

$$E_{F=5/2}^{hfs,2P_{3/2}} = -\frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{24m_1 m_2} \left[\frac{2}{5} + \frac{m_1 \kappa_d}{2m_2 (1 + \kappa_d)} - \frac{a_\mu}{10} \right] = 9.28 \text{ мЭВ}. \quad (2.10)$$

Все приведенные выше выражения содержат поправку на аномальный магнитный момент мюона порядка α^6 . Данные численные выражения представлены в таблице 3.

Как уже говорилось ранее, в сверхтонкой структуре P-уровней мюонного дейтерия уровни смешиваются и необходимо вычислять недиагональные матричные элементы. Два недиагональных матричных элемента в сверхтонкой структуре 2P-состояния атома мюонного дейтерия имеют вид: $\langle 2P_{1/2} | V | 2P_{3/2} \rangle^{F=1/2}$, $\langle 2P_{1/2} | V | 2P_{3/2} \rangle^{F=3/2}$. Данные матричные элементы отличаются только значением полного момента импульса системы. Расчет недиагональных матричных элементов выполняется аналогично диагональным элементам с использованием тех же потенциалов. Усреднение по r происходит аналогично случаю диагональных матричных элементов, а для усреднения по углам необходимо воспользоваться формулой (A.13), полученной при вычислении релятивистских поправок. Формула (A.13) позволяет вычислять матричные элементы от скалярного произведения двух неприводимых тензорных операторов ранга 1. Применяя соотношения (2.3) для усреднения по углам T_1 , T_2 , T_3 , замечаем, что $\bar{T}_1 = 2\bar{T}_2 = -2\bar{T}_3$. Таким образом нам необходимо усреднить по углам только выражение $T_1 = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2)$. Модифицируем формулу (A.13) для усреднения по углам T_1 . $T_1 = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2)$ может быть представлено как скалярное

произведение двух неприводимых тензорных операторов первого ранга. В формуле (A.13) положим, что $T^1 = L$, $T^2 = s_2 = I$ и воспользуемся следующим вспомогательным выражением для приведенных матричных элементов [63]:

$$\langle j'l \parallel L \parallel jl \rangle = (-1)^{L+3/2+J'} \sqrt{(2J'+1)(2J+1)} \left\{ \begin{matrix} l & j' & \frac{1}{2} \\ j & l & 1 \end{matrix} \right\} \langle l \parallel L \parallel l \rangle \quad (2.11)$$

В результате из (A.13) получим:

$$\begin{aligned} \langle j'IF \mid (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) \mid jIF \rangle &= (-1)^{-J-F-I+L+3/2+J'} \sqrt{(2J'+1)(2J+1)} \times \\ &\times \left\{ \begin{matrix} j & I & F \\ I & j' & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & j' & \frac{1}{2} \\ j & l & 1 \end{matrix} \right\} \langle l \parallel L \parallel l \rangle \langle I \parallel I \parallel I \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

После подстановки явных выражений для приведенных матричных элементов получим следующую формулу [109]:

$$\begin{aligned} \langle j'IF \mid (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) \mid jIF \rangle &= (-1)^{-J-F-I+L+3/2+J'} \sqrt{(2J'+1)(2J+1)} \times \\ &\times \sqrt{(2I+1)(I+1)I(2L+1)(L+1)L} \left\{ \begin{matrix} j & I & F \\ I & j' & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & j' & \frac{1}{2} \\ j & l & 1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя соответствующие квантовые числа, получим конкретные значения для каждого из недиагональных элементов:

$$\langle 1/2, 1, 1/2 \mid (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) \mid 3/2, 1, 1/2 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad (2.14)$$

$$\langle 1/2, 1, 3/2 \mid (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) \mid 3/2, 1, 3/2 \rangle = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad (2.15)$$

где значения 6j-символов взяты из [110]. В результате для усреднения по углам в недиагональных матричных элементах имеем следующее соотношение:

$$\bar{T}_1 = 2\bar{T}_2 = -2\bar{T}_3 = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{3}, & F = 1/2, \\ -\frac{\sqrt{5}}{3}, & F = 3/2. \end{cases} \quad (2.16)$$

Используя (2.16), найдем недиагональные матричные элементы потенциала (2.1):

$$E_{F=1/2}^{hfs, off-diag} = \frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{48m_1 m_2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{6} \right) \left[1 + \frac{2m_1 \kappa_d}{m_2 (1 + \kappa_d)} - a_\mu \right], \quad (2.17)$$

$$E_{F=3/2}^{hfs,off-diag} = \frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{48m_1 m_2} \left(-\frac{\sqrt{5}}{6} \right) \left[1 + \frac{2m_1 \kappa_d}{m_2 (1 + \kappa_d)} - a_\mu \right]. \quad (2.18)$$

Данные выражения дают основной вклад в недиагональные матричные элементы сверхтонкой структуры атома мюонного дейтерия. Численные значения недиагональных матричных элементов представлены в таблице 4.

Далее рассмотрим диагональные и недиагональные матричные элементы различных поправок на поляризацию вакуума в сверхтонкой структуре Р-состояний мюонного дейтерия. Основной вклад поляризации вакуума в сверхтонкую структуру Р-состояний порядка α^5 дает однопетлевая электронная поляризация вакуума в первом порядке теории возмущений. Потенциал однопетлевой поляризации вакуума для Р-состояний имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma,VP}^{hfs,2p}(r) &= \frac{Z\alpha(1+\kappa_d)}{2m_1 m_2 r^3} \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi e^{-2m_e \xi r} \times \\ &\times \left\{ \left(1 + \frac{m_1 \kappa_d}{m_2 (1 + \kappa_d)} \right) \times (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) (1 + 2m_e \xi r) - (1 + a_\mu) \times \right. \\ &\times \left(4m_e^2 \xi^2 r^2 [(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})] + \right. \\ &\left. \left. + (1 + 2m_e \xi r) [(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Данное выражение может быть получено, аналогично поправке на однопетлевую поляризацию вакуума в S-состояниях, при помощи замены (1.44) в фотонном пропагаторе в импульсном представлении с последующим обратным Фурье преобразованием в координатное представление. Усредняя выражение (2.19) по кулоновским волновым функциям (2.2), получим следующее аналитическое выражение для поправок на электронную поляризацию вакуума порядка α^5 в однофотонном взаимодействии для уровней сверхтонкой структуры 2Р-состояния:

$$\begin{aligned} E_{1\gamma,VP}^{hfs}(r) &= \frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{24m_1 m_2 r^3} \frac{\alpha}{6\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty x dx e^{-x[1 + \frac{2m_e \xi}{W}]} \times \\ &\left[\left(1 + \frac{m_1 \kappa_d}{m_2 (1 + \kappa_d)} \right) \times \overline{T}_1 \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W} x \right) - (1 + a_\mu) \left(\frac{4m_e^2 \xi^2 x^2}{W^2} \overline{T}_3 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W} x \right) \overline{T}_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Интегрирование в выражении (2.20) по x выполняется аналитически, по ξ — численно.

Таблица 3 — Диагональные матричные элементы сверхтонкой структуры 2P-состояния атома мюонного дейтерия. Сокращение рел. обозначает релятивистские поправки, ПВ — поправки на поляризацию вакуума, квад. — поправки на квадрупольное взаимодействие, ВПТВ — второй порядок теории возмущений

| Вклад | $2P_{1/2}^2$, мкэВ | $2P_{1/2}^4$, мкэВ | $2P_{3/2}^2$, мкэВ | $2P_{3/2}^4$, мкэВ | $2P_{3/2}^6$, мкэВ | Формула |
|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|---|
| α^4 | -1380.3359 | 690.1679 | 8162.2889 | 8583.2316 | 9284.8027 | (2.5) |
| рел. α^6 | -0.1676 | 0.0838 | -0.0125 | -0.0050 | 0.0075 | (A.39),(A.40) |
| ПВ α^5 | -1.0706 | 0.5353 | -0.2802 | -0.1121 | 0.1681 | (2.20),(2.24) |
| ПВ α^6 | -0.0011 | 0.0005 | -0.0014 | -0.0006 | 0.0008 | (2.21),(2.22), (1.63),(1.71), (1.72),(1.73) |
| квад. α^4 | 0 | 0 | 434.2329 | -347.3863 | 86.8466 | (2.44),(2.45) |
| квад. ПВ α^5 | 0 | 0 | 0.2438 | -0.1950 | 0.0488 | (2.44),(2.45) |
| квад. ПВ ВПТВ α^5 | 0 | 0 | 0.1122 | -0.0898 | 0.0224 | (2.44),(2.45) |
| Суммарная поправка | -1381.5752 | 690.7876 | 8596.5838 | 8235.4428 | 9371.8969 | |

Поправки, представленные на рисунке 1.10, вычисляются аналогичным образом. Для потенциала двухпетлевой поляризации вакуума (рисунок 1.10, диаграмма А) в случае P-состояний имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Delta V_{1\gamma,VPVP}^{hfs}(r) &= \frac{Z\alpha(1+\kappa_d)}{2m_1m_2r^3} \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \rho(\eta)d\eta \times \\
&\times \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left[\left(1 + \frac{m_1\kappa_d}{m_2(1+\kappa_d)}\right) (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) [\xi^2(1+2m_e\xi r)e^{-2m_e\xi r} - \right. \\
&- \eta^2(1+2m_e\eta r)e^{-2m_e\eta r}] - (1+a_\mu) \left(4m_e^2r^2[\xi^4e^{-2m_e\xi r} - \eta^4e^{-2m_e\eta r}] \times \right. \\
&\times [(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})] + [\xi^2(1+2m_e\xi r)e^{-2m_e\xi r} - \\
&- \eta^2(1+2m_e\eta r)e^{-2m_e\eta r}] \times [(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})] \left. \right) \left. \right]. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Таблица 4 — Недиagonальные матричные элементы сверхтонкой структуры 2P-состояния мюонного дейтерия. В таблице использованы те же сокращения, что и в таблице 3

| Вклад | $2P_{1/2}^2$, мкэВ | $2P_{1/2}^4$, мкэВ | Формула |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---|
| α^4 | -126.0372 | -199.2824 | (2.17),(2.18) |
| рел. α^6 | -0.0043 | -0.0067 | (A.50),(A.51) |
| ПВ α^5 | -0.1437 | -0.2271 | (2.20),(2.24) |
| ПВ α^6 | 0.00005 | 0.0001 | (2.21),(2.22),(1.63), (1.71),(1.72),(1.73) |
| квад. α^4 | 614.0980 | -194.1948 | (2.46) |
| квад. ПВ α^5 | 0.3447 | -0.1090 | (2.46) |
| квад. ПВ ВПТВ α^5 | 0.1587 | -0.0502 | (2.46) |
| Суммарная поправка | 488.4164 | -393.8702 | |

Таблица 5 — Сверхтонкая структура 2P-состояния мюонного дейтерия, итоговые значения

| Состояние | Энергия, мэВ | [28], мэВ |
|--------------|--------------|-----------|
| $2^2P_{1/2}$ | -1.4054 | -1.4056 |
| $4^2P_{1/2}$ | 0.6703 | 0.6703 |
| $2^2P_{3/2}$ | 8.6204 | 8.6194 |
| $4^2P_{3/2}$ | 8.2559 | 8.2560 |
| $6^2P_{3/2}$ | 9.3719 | 9.3729 |

В координатном представлении потенциал диаграмм Б и В на рисунке 1.10 для P-состояний имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta V_{2-loop}^{hfs}(r) = & \frac{Z\alpha(1+\kappa_d)}{2m_1m_2r^3} \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v)dv}{1-v^2} e^{-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}} \times \\
& \times \left[\left(1 + \frac{m_1\kappa_d}{m_2(1+\kappa_d)}\right) \left[1 + \frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right] (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_2) - \right. \\
& - (1+a_\mu) \left(\frac{4m_e^2 r^2}{1-v^2}\right) [(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})] + \\
& \left. + \left(1 + \frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right) [(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})] \right]. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

После усреднения (2.21) и (2.22) по кулоновским волновым функциям (2.2) получим численные значения соответствующих поправок к уровням сверхтонкой

структуры 2P-состояния. Численные значения включены в таблицы 3 и 4. Поправка на мюонную поляризацию вакуума в однофотонном взаимодействии в сверхтонкой структуре 2P-состояния мюонного дейтерия может быть получена заменой m_e на m_1 в выражении (2.20) и имеет порядок α^6 . Численное значение поправки на мюонную поляризацию вакуума также включено в таблицы 3 и 4. Поправки на поляризацию вакуума в первом порядке теории возмущений к недиагональным элементам могут быть вычислены по формулам, представленным выше с использованием соотношения (2.16) для усреднения по углам.

Далее необходимо вычислить поправки на поляризацию вакуума во втором и третьем порядках теории возмущений в случае P-состояний. Общая структура вкладов (1.61) по сравнению с S-состояниями остается неизменной, однако необходимо использовать другие выражения для конкретных потенциалов и редуцированной кулоновской функции Грина. Для редуцированной кулоновской функции Грина 2P состояния имеем:

$$G_{2P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu^2(Z\alpha)}{36z^2z'^2} \left(\frac{3}{4\pi} \mathbf{nn}' \right) e^{-(z+z')/2} g(z, z'),$$

$$g(z, z') = 24z_{<}^3 + 36z_{<}^3z_{>} + 36z_{<}^3z_{>}^2 + 24z_{>}^3 + 36z_{<}z_{>}^3 + 36z_{<}^2z_{>}^3 +$$

$$+49z_{<}^3z_{>}^3 - 3z_{<}^4z_{>}^3 - 12e^{z_{<}}(2 + z_{<} + z_{<}^2)z_{>}^3 - 3z_{<}^3z_{>}^4 +$$

$$+12z_{<}^3z_{>}^3[-2C + Ei(z_{<}) - \ln z_{<} - \ln z_{>}],$$
(2.23)

где $C = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера, $z = Wr$, $z_{<} = \min(z, z')$, $z_{>} = \max(z, z')$. Подставляя (2.1), (1.63) и (2.23) в (1.61), получим аналитическое выражение для поправок на электронную поляризацию вакуума к сверхтонкой структуре мюонного дейтерия для 2P состояния во втором порядке теории возмущений:

$$E_{VP,SOPT}^{hfs} = \frac{\alpha^4 \mu^3 (1 + \kappa_d)}{24m_1 m_2} \frac{\alpha}{54\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{e^{-x'}}{x'^2} dx' \times$$

$$\times e^{-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W} \right)} g(x, x') \left[\overline{T}_1 + \frac{m_1 \kappa_d}{m_2 (1 + \kappa_d)} \overline{T}_1 - (1 + a_\mu) \overline{T}_2 \right].$$
(2.24)

Интегрирование по x, x' выполняется аналитически а по ξ численно. Численные значения поправок в диагональных и недиагональных матричных элементах представлены в таблице 3 и таблице 4.

Вклад двухпетлевых поправок на поляризацию вакуума во втором порядке теории возмущений на рисунке 1.11 (Б, В, Г, Д) имеет порядок α^6 и вычисляется аналогично случаю S-состояний с использованием кулоновской функции Грина (2.23) и волновых функций (2.2). Численные значения поправок представлены в таблицах 3 и 4 для диагональных и недиагональных матричных элементов соответственно.

Вклад порядка α^6 в сверхтонкую структуру P-состояний мюонного дейтерия дает поправка на поляризацию вакуума в третьем порядке теории возмущений (рисунок ??). Вклад данных диаграмм в сверхтонкую структуру P-состояний определяется выражением:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{ТОPT}^{hfs} &= \left\langle \psi_n \left| \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot V^{hfs} \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_{VP}^C \right| \psi_n \right\rangle + \\
&+ 2 \left\langle \psi_n \left| \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V^{hfs} \right| \psi_n \right\rangle - \\
&- \left\langle \psi_n \left| \Delta V^{hfs} \right| \psi_n \right\rangle \left\langle \psi_n \left| \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_{VP}^C \right| \psi_n \right\rangle - \\
&- 2 \left\langle \psi_n \left| \Delta V_{VP}^C \right| \psi_n \right\rangle \left\langle \psi_n \left| \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V^{hfs} \right| \psi_n \right\rangle = \\
&= \iiint \Psi_{2P}(\mathbf{r}_1) V_{VP}^C(\mathbf{r}_1) \tilde{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V^{hfs}(\mathbf{r}_2) \tilde{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) V_{VP}^C(\mathbf{r}_3) \times \\
&\times \Psi_{2P}(\mathbf{r}_3) d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 + 2 \iiint \Psi_{2P}(\mathbf{r}_1) V_{VP}^C(\mathbf{r}_1) \tilde{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V_{VP}^C(\mathbf{r}_2) \times \\
&\times \tilde{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) V^{hfs}(\mathbf{r}_3) \Psi_{2P}(\mathbf{r}_3) d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 - \\
&- \int \Psi_{2P}(\mathbf{r}) V^{hfs}(\mathbf{r}) \Psi_{2P}(\mathbf{r}) d^3 r \times \\
&\times \iiint \Psi_{2P}(\mathbf{r}_1) V_{VP}^C(\mathbf{r}_1) \tilde{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tilde{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) V_{VP}^C(\mathbf{r}_3) \Psi_{2P}(\mathbf{r}_3) d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 - \\
&- 2 \int \Psi_{2P}(\mathbf{r}) V_{VP}^C(\mathbf{r}) \Psi_{2P}(\mathbf{r}) d^3 r \times \\
&\times \iiint \Psi_{2P}(\mathbf{r}_1) V_{VP}^C(\mathbf{r}_1) \tilde{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tilde{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) V^{hfs}(\mathbf{r}_3) \Psi_{2P}(\mathbf{r}_3) d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Используя явные выражения для потенциалов (2.1), (1.63) и редуцированной кулоновской функции Грина (2.23), получим численные значения данных по-

правок, представленные в таблицах 3 и 4. Поправки для конкретных уровней сверхтонкой структуры имеют следующие численные значения:

$$F=1/2 E_{j=1/2}^{hfs,TOPT} = -0.0001 \text{ мкЭВ},$$

$$F=3/2 E_{j=1/2}^{hfs,TOPT} = 0.00003 \text{ мкЭВ},$$

$$F=1/2 E_{j=3/2}^{hfs,TOPT} = -0.00003 \text{ мкЭВ},$$

$$F=3/2 E_{j=3/2}^{hfs,TOPT} = -0.00001 \text{ мкЭВ},$$

$$F=5/2 E_{j=3/2}^{hfs,TOPT} = 0.00002 \text{ мкЭВ},$$

$$F=1/2 E_{j=1/2 \rightarrow 3/2}^{hfs,TOPT} = -0.00001 \text{ мкЭВ},$$

$$F=3/2 E_{j=1/2 \rightarrow 3/2}^{hfs,TOPT} = -0.00001 \text{ мкЭВ}.$$

Усреднение по углам при интегрировании в выражении (2.25) выполняется с помощью соотношений (2.3). В силу сложности интегральных выражений для поправки на поляризацию вакуума в третьем порядке теории возмущений и малости вклада в диагональные и недиагональные матричные элементы интегрирование выполняется численно.

В работе [28] представлен расчет сверхтонкой структуры $2P$ -состояния в атоме мюонного дейтерия, где учтены поправки на поляризацию вакуума в первом порядке теории возмущений порядка α^5 и квадрупольные поправки. В отличие от нашей работы, в [28] учет поправки на поляризацию вакуума проводится в координатном представлении, что приводит расхождению с нашим значением данной поправки, полученным после преобразования потенциала из импульсного в координатное представление, на $\sim 30\%$. Выражения для основного вклада, недиагональных матричных элементов и квадрупольной поправки полностью совпадают с нашей работой.

2.2 Вклад квадрупольного взаимодействия

Дейтрон обладает электрическим квадрупольным моментом, в следствии чего необходимо учесть квадрупольную поправку к сверхтонкой структуре Р-уровней. Данная поправка имеет порядок α^4 и, таким образом, сравнима по величине со вкладом сверхтонкой части потенциала Брейта. Как будет видно в дальнейшем, в случае недиагональных матричных элементов, квадрупольная поправка является определяющей и для состояния $2P_{1/2}^2$ по модулю сильно превосходит вклад сверхтонкой части потенциала Брейта.

Потенциал квадрупольного взаимодействия часто представляется в следующем виде [111; 112]:

$$V_{\mu d}^Q = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 V_C(r)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 Q_{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

где

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{3}{2} \frac{Q}{I(2I-1)} (I_\alpha I_\beta + I_\beta I_\alpha - \frac{2}{3} I^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_C(r)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 = \frac{3}{2} \frac{\varphi_{JJ}}{J(2J-1)} (J_\alpha J_\beta + J_\beta J_\alpha - \frac{2}{3} J^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (2.28)$$

$$V_C(r) = \frac{Z\alpha}{r}, \quad \varphi_{JJ} = \left(\frac{\partial^2 V_C(r)}{\partial z^2} \right)_0. \quad (2.29)$$

Таким образом, квадрупольный член представляет собой взаимодействие квадрупольного момента дейтрона и квадрупольного момента мюонного облака. Суммируя по индексам в формуле (2.26) и учитывая, что $I = 1$, получаем следующее выражение для вклада квадрупольного взаимодействия в сверхтонкую структуру Р-уровней:

$$E_{\mu d}^Q = \frac{Q}{2} \frac{\langle nlj, j_z = j | \frac{\partial^2 V_C(r)}{\partial z^2} | nlj, j_z = j \rangle_0}{2J(2J-1)} \left\{ \frac{3}{2} C^2 + \frac{3}{2} C - 4J(J+1) \right\}, \quad (2.30)$$

где $C = F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)$, Q — квадрупольный момент дейтрона. Выражение (2.30), однако, позволяет вычислять вклад квадрупольного взаимодействия лишь для диагональных матричных элементов. Для того

чтобы получить одно аналитическое выражение для вычисления как диагональных, так и недиагональных матричных элементов квадрупольной поправки мы записываем потенциал квадрупольного взаимодействия в формализме неприводимых тензорных операторов ранга 2 [113; 114]:

$$V^Q = -Z\alpha \sum_{q=-2}^2 (-1)^q T_{2q}(d) \cdot T_{2,-q}(\mu), \quad (2.31)$$

где $T_2(d)$, $T_2(\mu)$ — неприводимые тензорные операторы ранга 2, описывающие квадрупольный момент ядра и мюонного облака соответственно. Явный вид потенциала квадрупольного взаимодействия может быть получен при помощи мультипольного разложения потенциала взаимодействия мюона и дейтрона:

$$V(r) = -Ze^2 \int \frac{\rho_d(\mathbf{R}) d^3 R}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (2.32)$$

где $\rho_d(\mathbf{R})$ — плотность распределения заряда дейтрона, e — заряд электрона. Так как размер ядра мал по сравнению с размером мюонного облака, мы можем выполнить в выражении (2.32) мультипольное разложение. В результате получаем:

$$V(r) = -Ze^2 \int \sum_l \frac{|R|^l}{|r|^{l+1}} P_l(\cos \theta) \rho_d(\mathbf{R}) d^3 R, \quad (2.33)$$

где $P_l(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, θ — угол между векторами \mathbf{R} и \mathbf{r} . Положив в (2.33) $l = 0$, получим обычный кулоновский потенциал:

$$V(r)|_{l=0} = -Ze^2 \frac{1}{r} \int \rho_d(\mathbf{R}) d^3 R = -\frac{Ze^2}{r}. \quad (2.34)$$

Следующие члены мультипольного разложения с $l = 1, 2, 3, \dots$ дадут дипольный член взаимодействия ($l = 1$), квадрупольный член ($l = 2$) и так далее. Найдем явное выражение для квадрупольного члена мультипольного разложения, который и даст нам искомый потенциал квадрупольного взаимодействия мюона и дейтрона. Воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра [115]

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{q=-l}^l (-1)^q C_{lq}(\theta', \varphi') C_{l,-q}(\theta'', \varphi''), \quad (2.35)$$

где $C_{lq}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lq}(\theta, \varphi)$ — модифицированная сферическая функция, углы θ', φ' и θ'', φ'' соответствуют координатам ядра и мюонного облака соответственно, $\cos \theta = \cos \theta' \cos \theta'' + \sin \theta' \sin \theta'' \cos(\varphi' - \varphi'')$. Используя (2.35), получим следующее выражение для квадрупольного члена мультипольного разложения:

$$V(r)|_{l=2} = -Ze^2 \sum_{q=-2}^2 (-1)^q \int |R|^2 \rho_d(\mathbf{R}) C_{lq}(\theta', \varphi') d^3R \times \frac{1}{|r|^3} C_{l,-q}(\theta'', \varphi''). \quad (2.36)$$

Можно легко заметить, что в выражении (2.36) координаты ядра и мюонного облака разделяются. Это позволяет нам представить (2.36) как произведение двух частей, описывающих соответственно квадрупольный момент дейтрона и мюонного облака. Также можно заметить, что выражение (2.36) представляет собой скалярное произведение двух неприводимых тензорных операторов ранга 2, которое по определению имеет общий вид $\sum_{q=-2}^2 (-1)^q A_{2q} B_{2,-q}$. Таким образом, сравнивая выражения (2.36) и (2.31), для неприводимого тензорного оператора квадрупольного момента ядра имеем [114; 116; 117]:

$$T_{2q}(d) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r'^2 Y_{2q}(\theta', \varphi'). \quad (2.37)$$

Для неприводимого тензорного оператора квадрупольного момента мюонного облака [114; 116; 117]:

$$T_{2q}(\mu) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \frac{1}{r^3} Y_{2q}(\theta'', \varphi''). \quad (2.38)$$

Для получения квадрупольной поправки нам необходимо вычислить матричные элементы от (2.31), причем как диагональные, так и недиагональные. Воспользуемся формулой (A.13), учитывая, что ранг неприводимых тензоров равен 2, а не 1, как в (A.13). В результате получаем:

$$\begin{aligned} \langle j'IF | (T_2(d) \cdot T_2(\mu)) | jIF \rangle &= (-1)^{I+J'-F} W(jIj'I; F2) \times \\ &\times \langle j' || T_2(\mu) || j \rangle \langle I || T_2(d) || I \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Таким образом вычисление матричного элемента квадрупольного взаимодействия сводится к вычислению приведенных матричных элементов от неприводимых тензорных операторов. Для тензора квадрупольного момента ядра имеем

следующее соотношение [114]:

$$\langle I \| T_2(d) \| I \rangle = \frac{Q}{2} \left[\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1}. \quad (2.40)$$

Для тензора квадрупольного момента мюонного облака имеем [114; 115]:

$$\langle j' \| T_2(\mu) \| j \rangle = -\sqrt{2J+1}\sqrt{2J'+1}(-1)^{J'+1/2} \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \langle \frac{1}{r^3} \rangle, \quad (2.41)$$

где

$$\langle \frac{1}{r^3} \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{r} (ff' + gg') dr = \int_0^\infty \Psi_{2P}^*(r) \frac{1}{r} \Psi_{2P}(r) dr. \quad (2.42)$$

Используя (2.31), (2.40) и (2.53), получим:

$$\begin{aligned} \langle j'IF | V^Q | jIF \rangle &= Z\alpha(-1)^{J'+1/2-F-J-I+1} \left\{ \begin{matrix} J & I & F \\ I & J' & 2 \end{matrix} \right\} \frac{Q}{2} \times \\ &\times \left[\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1} \sqrt{2J+1}\sqrt{2J'+1} \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \int_0^\infty \Psi_{2P}^*(r) \frac{1}{r} \Psi_{2P}(r) dr. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Формула (2.63) позволяет вычислить как диагональные, так и недиагональные матричные элементы квадрупольной поправки, а также релятивистские поправки к квадрупольной поправке с помощью (2.42). Для диагональных элементов имеем следующие общие выражения:

$$E^Q(j = 1/2) = 0, \quad (2.44)$$

$$E^Q(j = 3/2) = \frac{(Z\alpha)^4 \mu^3 Q}{48} (\delta_{F,1/2} - 4/5\delta_{F,3/2} + 1/5\delta_{F,5/2}). \quad (2.45)$$

Для недиагональных элементов имеем:

$$E^Q(j = 3/2, j' = 1/2) = \frac{(Z\alpha)^4 \mu^3 Q}{48} (\sqrt{2}\delta_{F,1/2} - 1/\sqrt{5}\delta_{F,3/2}), \quad (2.46)$$

где значение квадрупольного момента $Q = 0.285783(30)$ фм² [118]. Значения данных поправок для конкретных уровней сверхтонкой структуры включены в таблицу 3 и таблицу 4. Полученные нами выражения и численные значения квадрупольной поправки полностью совпадают с работой [28].

2.3 Поправки на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии

Поправку порядка α^5 в сверхтонкой структуре 2P-состояния атома мюонного дейтерия дает эффект поляризации вакуума в квадрупольном взаимодействии [41]. Потенциал, соответствующий такой поправке, может быть получен аналогично выражению (2.36) после мультипольного разложения потенциала взаимодействия мюона и дейтрона с учетом однопетлевой поляризации вакуума:

$$V_{VP}(r) = -Ze^2 \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int \frac{\rho_d(\mathbf{R}) d^3 R}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} e^{-2m_e \xi |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (2.47)$$

где $\rho(\xi)$ — спектральная функция, имеющая вид (1.46). Мультипольное разложение с учетом эффекта однопетлевой поляризации вакуума дает для потенциала следующее выражение:

$$V_{VP}(r)|_{l=2} = -Ze^2 \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{q=-2}^2 (-1)^q \int R^2 \rho_d(\mathbf{R}) C_{lq}(\theta', \varphi') d^3 R \times \\ \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \frac{\left(1 + 2m_e \xi r + \frac{4m_e^2 \xi^2 r^2}{3}\right)}{r^3} e^{-2m_e \xi r} C_{l,-q}(\theta'', \varphi''). \quad (2.48)$$

Сравнивая (2.48) с общей структурой квадрупольного взаимодействия (2.31), можно увидеть, что поправка на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии аналогично основному вкладу квадрупольного взаимодействия может быть представлена как скалярное произведение двух неприводимых тензорных операторов:

$$V_{VP}^Q = -Z\alpha \sum_{q=-2}^2 (-1)^q T_{2q}(d) \cdot T_{2,-q}^{VP}(\mu), \quad (2.49)$$

где

$$T_{2q}(d) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r'^2 Y_{2q}(\theta', \varphi'), \quad (2.50)$$

$$T_{2q}^{VP}(\mu) = \frac{\alpha}{3\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi Y_{2q}(\theta'', \varphi''), \quad (2.51)$$

где $R(r, \xi) = \rho(\xi) \frac{1}{r^3} \left(1 + 2m_e \xi r + \frac{4m_e^2 \xi^2 r^2}{3} \right) e^{-2m_e \xi r}$. Усреднение выражения (2.49) по волновым функциям может быть выполнено следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{VP}^Q &= -Z\alpha \langle FMIj' | T_2(d) \cdot T_2^{VP}(\mu) | FMIj \rangle = \\ &= -Z\alpha (-1)^{I+j'-F} W(jIj'I; F2) \langle j' || T_2^{VP}(\mu) || j \rangle \langle I || T_2(d) || I \rangle, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Приведенный матричный элемент от тензора квадрупольного момента дейтрона вычисляется по формуле (2.40). Для приведенного матричного элемента тензора квадрупольного момента мюонного облака имеем:

$$\begin{aligned} \langle j' || T_2^{VP}(\mu) || j \rangle &= \sqrt{2j+1} \sqrt{2j'+1} (-1)^{j'+1/2} \begin{pmatrix} j' & 2 & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle &= \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \int_0^\infty R(r, \xi) r^2 (ff' + gg') dr = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \int_0^\infty \Psi_{2P}^*(r) R(r, \xi) r^2 \Psi_{2P}(r) dr. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Выражение для приведенного матричного элемента от неприводимого тензорного оператора квадрупольного момента мюонного облака может быть получено также в несколько ином виде. Для этого используем следующее соотношение для приведенного матричного элемента от оператора квадрупольного момента мюонного облака [63]:

$$\langle j' || T_2^{VP}(\mu) || j \rangle = (-1)^{j'+1/2+1} \sqrt{(2j'+1)(2j+1)} \begin{Bmatrix} l & l & 2 \\ j' & j & s \end{Bmatrix} \langle l || T_2^{VP}(\mu) || l \rangle. \quad (2.55)$$

Приведенный матричный элемент $\langle l || T_2^{VP}(\mu) || l \rangle$ может быть вычислен по формуле [110]:

$$\langle l || T_2^{VP}(\mu) || l \rangle = -(2l+1) \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle, \quad (2.56)$$

где мы использовали хорошо известное соотношение между коэффициентами Клебша — Гордана и $3j$ -символами:

$$C(j_1 j_2 j_3; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{-j_1 + j_2 + m_3} \sqrt{2j_3 + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Таким образом, учитывая (2.55) и (2.56), для приведенного матричного элемента неприводимого тензорного оператора квадрупольного момента мюонного облака имеем:

$$\begin{aligned} \langle j' || T_2^{VP}(\mu) || j \rangle &= (2l + 1) \sqrt{(2j' + 1)(2j + 1)} (-1)^{j' + 1/2} \begin{Bmatrix} l & l & 2 \\ j' & j & s \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Сравним численное значение углового усреднения по формулам (2.53) и (2.58).

Для диагональных матричных элементов с $j = 3/2$ имеем:

$$(2.53) : \langle j' = 3/2 || T_2^{VP}(\mu) || j = 3/2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle \quad (2.59)$$

$$(2.58) : \langle j' = 3/2 || T_2^{VP}(\mu) || j = 3/2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle. \quad (2.60)$$

Для недиагональных элементов:

$$(2.53) : \langle j' = 1/2 || T_2^{VP}(\mu) || j = 3/2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle \quad (2.61)$$

$$(2.58) : \langle j' = 1/2 || T_2^{VP}(\mu) || j = 3/2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} \langle \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty R(r, \xi) d\xi \rangle. \quad (2.62)$$

Очевидно, что результаты применения формул (2.53) и (2.58) совпадают. Таким образом, мы можем использовать более компактную формулу (2.53).

Подставляя (2.40) и (2.53) в (2.52), получим поправку на квадрупольное взаимодействие с учетом эффектов однопетлевой поляризации вакуума (выражение справедливо как для диагональных, так и для недиагональных

матричных элементов):

$$\begin{aligned}
E_{VP}^Q &= Z\alpha(-1)^{j'+1/2-F-j-I+1} \left\{ \begin{matrix} j & I & F \\ I & j' & 2 \end{matrix} \right\} \frac{Q}{2} \left[\left(\begin{matrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{matrix} \right) \right]^{-1} \times \\
&\times \sqrt{2j+1} \sqrt{2j'+1} \left(\begin{matrix} j' & 2 & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right) \times \\
&\times \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \int_0^\infty \Psi_{2P}^*(r) R(r, \xi) r^2 \Psi_{2P}(r) dr.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Остается выполнить аналитическое интегрирование по r и ξ и вычислить значения $3j$ - и $6j$ -символов. Вклад поляризации вакуума определяется радиальным интегралом, а усреднение по углам выполняется также как и в случае без поляризации вакуума. Для диагональных и недиагональных матричных элементов в результате имеем следующие аналитические интегральные выражения и численные значения:

$$\begin{aligned}
E_{VP}^Q(j' = 3/2, j = 3/2) &= \frac{\mu^3 \alpha (Z\alpha)^4 Q}{36\pi} \int_1^\infty \frac{(5a^2 + 8a + 4)}{(a+2)^4} \rho(\xi) d\xi \times \\
&\times \left[\delta_{F\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} \delta_{F\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} \delta_{F\frac{5}{2}} \right] = \left[\delta_{F\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} \delta_{F\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} \delta_{F\frac{5}{2}} \right] \times 0.2441 \text{ мкЭВ},
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
E_{VP}^Q(j' = 1/2, j = 3/2) &= \frac{\mu^3 \alpha (Z\alpha)^4 Q}{36\pi} \int_1^\infty \frac{(5a^2 + 8a + 4)}{(a+2)^4} \rho(\xi) d\xi \times \\
&\times \left[\sqrt{2} \delta_{F\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \delta_{F\frac{3}{2}} \right] = \left[\sqrt{2} \delta_{F\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \delta_{F\frac{3}{2}} \right] \times 0.2441 \text{ мкЭВ},
\end{aligned} \tag{2.65}$$

где значение квадрупольного момента $Q = 0.285783(30) \text{ фм}^2$ [118], $a = 4m_e \xi / \mu\alpha$.

Поправку на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии необходимо также учесть и во втором порядке теории возмущений, где данная поправка имеет порядок α^5 и определяется диаграммой, изображенной на рисунке 2.2. Общее выражение для данной поправки имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
E_{SOPT VP Q}^{hfs} &= 2 \langle \Psi | V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot V_Q^{hfs} | \Psi \rangle = \\
&= 2 \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\infty r'^2 dr' \Psi_{2P}^*(\mathbf{r}) V_{VP}^C(r) \tilde{G}(r, r') V_Q^{hfs}(\mathbf{r}') \Psi_{2P}(\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{2.66}$$

где

$$V_{VP}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left(-\frac{Z\alpha}{r} \right) e^{-2m_e \xi r}, \tag{2.67}$$

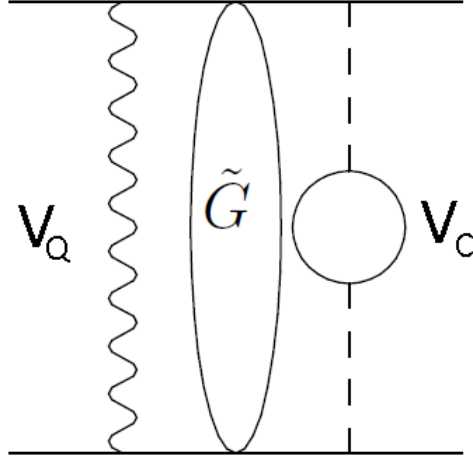


Рисунок 2.2 — Диаграмма поправки на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии во втором порядке теории возмущений порядка α^5

$$V_Q^{hfs}(r) = \frac{Z\alpha Q}{2r^3} \times \left[(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n}) \right]. \quad (2.68)$$

Подставляя данные потенциалы и вычисляя интегралы по r и ξ аналитически, получим следующее выражение для поправки на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии во втором порядке теории возмущений:

$$E_{SOPT VP Q}^{hfs} = 0.112326(\text{мкЭВ}) \times \left[(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2) - 3(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{n}) \right]. \quad (2.69)$$

После усреднения по углам для диагональных матричных элементов получаем:

$$E_{sopt,vp}^Q(j' = 3/2, j = 3/2) = \left[\delta_{F\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}\delta_{F\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\delta_{F\frac{5}{2}} \right] \times 0.1122 \text{ мкЭВ}, \quad (2.70)$$

В случае недиагональных матричных элементов имеем:

$$E_{sopt,vp}^Q(j' = 1/2, j = 3/2) = \left[\sqrt{2}\delta_{F\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\delta_{F\frac{3}{2}} \right] \times 0.1122 \text{ мкЭВ}. \quad (2.71)$$

В работе [28], как уже отмечалось ранее, учет поправок на однопетлевую электронную поляризацию вакуума выполнен оценочно. Поправка на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии в [28] также представлена в оценочном виде. Таким образом, основное расхождение конечных значений обусловлено точным вычислением нами поправок на однопетлевую поляризацию вакуума и учетом значительного числа дополнительных поправок как в первом, так и во втором и третьем порядках теории возмущений. Для получения

энергий уровней сверхтонкой структуры $2P$ состояния мы диагонализуем следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1.38157 & 0 & 0.487913 & 0 & 0 \\ 0 & 0.690785 & 0 & -0.393711 & 0 \\ 0.487913 & 0 & 8.59622 & 0 & 0 \\ 0 & -0.393711 & 0 & 8.23572 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.37183 \end{pmatrix},$$

где численные значения указаны в мэВ. Сравнение итоговых значений представлено в таблице 6.

Глава 3. Радиационные поправки в тонкой и сверхтонкой структуре спектра

3.1 Поправки на конечный размер ядра порядка $\alpha(Z\alpha)E_F$ в сверхтонкой структуре S-состояний

Как уже отмечалось ранее, поправки на структуру ядра и отдачу являются крайне важными для достижения высокой точности расчета тонкой и сверхтонкой структуры спектра легких мюонных ВП атомов и, в частности, атома мюонного дейтерия. Помимо рассмотренных в главе 1 поправок на структуру ядра имеется также ряд более сложных поправок порядка $\alpha(Z\alpha)^5$, которые также необходимо учесть при расчете сверхтонкой структуры S-состояний атома мюонного дейтерия.

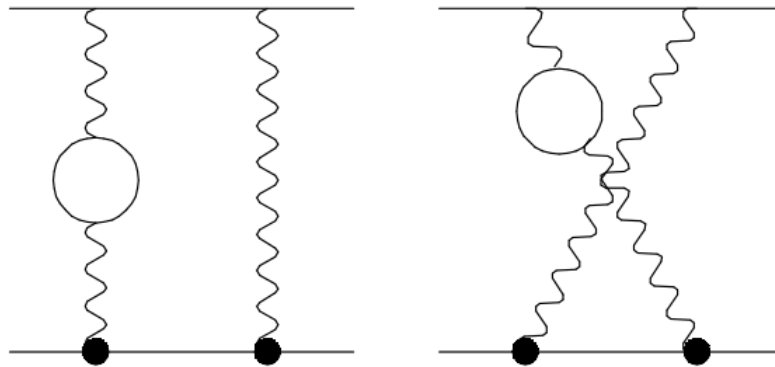


Рисунок 3.1 — Двухфотонные обменные диаграммы с учетом структуры ядра и поляризации вакуума

Первой из данной группы поправок является поправка на однопетлевую поляризацию вакуума в двухфотонных обменных диаграммах порядка $\alpha(Z\alpha)^5$. Полученное ранее выражение (1.87) для двухфотонной обменной поправки на структуру ядра и отдачу в сверхтонкой структуре S-состояний мюонного дейтерия может быть использовано для вычисления поправок на поляризацию вакуума в двухфотонных обменных диаграммах с учетом структуры ядра и отдачи. Диаграммы, соответствующие поправке на поляризацию вакуума в

двухфотонных обменных диаграммах представлены на рисунке 3.1. Поправка на электронную поляризацию вакуума может быть получена при помощи выражения (1.87) и замены (1.45) в фотонном пропагаторе. Соответствующая поправка к сверхтонкой структуре S-уровней имеет вид:

$$E_{2\gamma,VP}^{hfs} = -E_F \frac{2\alpha^2}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty V_{2\gamma}(k) \frac{dk}{k^2 + 4m_e^2 \xi^2} = \begin{cases} 1S : 0.0152 \text{ мЭВ} \\ 2S : 0.0019 \text{ мЭВ} \end{cases} \quad (3.1)$$

Вклад мюонной поляризации вакуума может быть также вычислен при помощи формулы (3.1) после замены $m_e \rightarrow m_\mu$:

$$E_{2\gamma,MVP}^{hfs} = \begin{cases} 1S : 0.0015 \text{ мЭВ} \\ 2S : 0.0002 \text{ мЭВ} \end{cases} \quad (3.2)$$

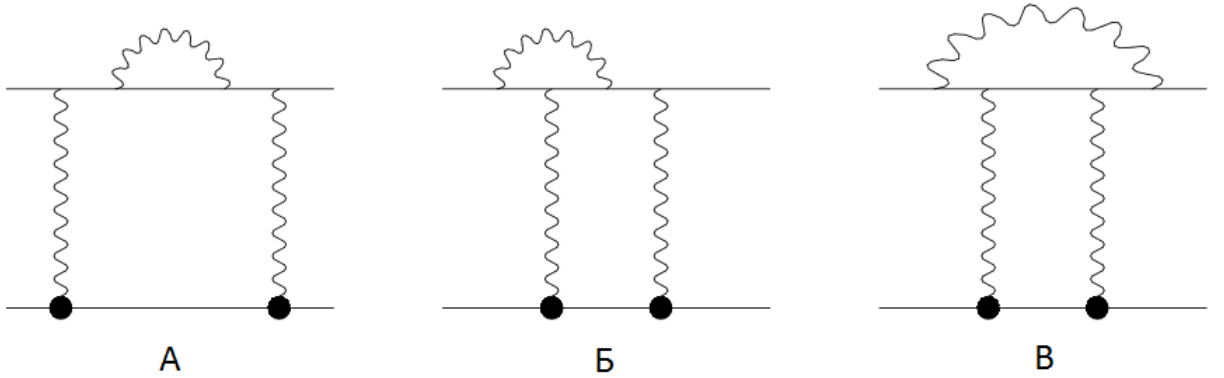


Рисунок 3.2 — Двухфотонные обменные диаграммы с учетом структуры ядра и радиационных поправок в лептонную линию

Далее рассмотрим радиационные поправки в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам, которые имеют порядок $\alpha(Z\alpha)^5$ [36]. Вклад таких поправок в сверхтонкую структуру спектра энергии мюония был детально изучен в работах [119–124]. В данных работах было получено суммарное интегральное выражение для вкладов диаграмм, представленных на рисунке 3.2 в сверхтонкое расщепление порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ с учетом эффектов отдачи в калибровке Фрида — Йенни [125–127] для радиационных фотонов. Удобство калибровки Фрида — Йенни состоит в том, что она позволяет получить компактные перенормированные инфракрасно — конечные интегральные выражения

для массового оператора мюона, вершинного оператора и лептонного тензора, представляющего диаграмму с охватывающим фотоном [128]. С помощью таких выражений можно выполнить аналитический расчет поправок порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре спектра в приближении точечного ядра [121–124]. Еще одной важной особенностью калибровки Фрида — Йенни для радиационных фотонов является возможность получить конечные выражения для каждой поправки на рисунке 3.2 в отдельности, а не только для суммы трех поправок.

Перейдем теперь к вычислению радиационных поправок к двухфотонным обменным диаграммам в сверхтонкой структуре S-состояний атома мюонного дейтерия. Амплитуда рассеяния мюона на дейтроне может быть представлена в следующем общем виде в случае прямой двухфотонной обменной диаграммы с радиационными поправками в мюонную линию:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{-i(Z\alpha)^2}{\pi^2} \int d^4k [\bar{u}(q_1)L_{\mu\nu}u(p_1)] D_{\mu\omega}(k)D_{\nu\lambda}(k) \times \\ & \times [\varepsilon_\rho^*(q_2)\Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2,p_2+k)\mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2+k)\Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2+k,p_2)\varepsilon_\alpha(p_2)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\varepsilon_\rho(q)$ — волновая функция свободного дейтрона, имеющего спин равный 1, $p_{1,2}$ и $q_{1,2}$ — 4-импульсы мюона и дейтрона в начальном и конечном состояниях: $p_{1,2} \approx q_{1,2}$. Вершинный оператор, описывающий взаимодействие дейтрона с фотоном, определяется тремя формфакторами в виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega,\rho\sigma}(q_2,p_2+k) = & \frac{(2p_2+k)_\omega}{2m_2} g_{\rho\sigma} \cdot F_1(k) - \frac{(2p_2+k)_\omega}{2m_2} \frac{k_\rho k_\sigma}{2m_2^2} \cdot F_2(k) - \\ & - (g_{\rho\gamma}g_{\sigma\omega} - g_{\rho\omega}g_{\sigma\gamma}) \frac{k_\gamma}{2m_2} \cdot F_3(k). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пропагаторы дейтрона и обменных фотонов, для которых мы используем кулоновскую калибровку, соответственно равны:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\beta}(p) = & \frac{-g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m_2^2}}{(p^2 - m_2^2 + i0)}, \\ D_{\lambda\sigma}(k) = & \frac{1}{k^2} \left[g_{\lambda\sigma} + \frac{k_\lambda k_\sigma - k_0 k_\lambda g_{\sigma 0} - k_0 k_\sigma g_{\lambda 0}}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Лептонный тензор $L_{\mu\nu}$ содержит в себе радиационные поправки в мюонную линию и имеет конкретный вид для каждой из трех амплитуд на рисунке 3.2. Мы

провели независимое построение лептонного тензора для всех трех амплитуд в калибровке Фрида — Йенни для радиационного фотона. С помощью пакета FeynCalc [129] были получены аналитические выражения для лептонных тензоров. Собственно-энергетической диаграмме (диаграмма А на рисунке 3.2) соответствует следующий лептонный тензор:

$$L_{\mu\nu}^{se} = -\frac{3\alpha}{4\pi}\gamma_\mu(\hat{p}_1 - \hat{k})\gamma_\nu \int_0^1 \frac{(1-x)dx}{(1-x)m_1^2 + x\mathbf{k}^2}. \quad (3.6)$$

Вершинной диаграмме (диаграмма Б на рисунке 3.2) соответствует лептонный тензор следующего вида:

$$L_{\mu\nu}^{vertex} = 2\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1}{(p_1 - k)^2 - m_1^2 + i0} \times \left[F_\nu^{(1)} + \frac{F_\nu^{(2)}}{\Delta} + \frac{F_\nu^{(3)}}{\Delta^2} \right], \quad (3.7)$$

$$F_\nu^{(1)} = -6x\gamma_\nu \ln \frac{m_1^2 x + \mathbf{k}^2 z(1-xz)}{m_1^2 x}, \quad (3.8)$$

$$F_\nu^{(3)} = 2x^3(1-x)\hat{Q}(\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1)\gamma_\nu(\hat{p}_1 + m_1)\hat{Q}, \quad (3.9)$$

$$F_\nu^{(2)} = -x^3(2\gamma_\nu Q^2 - 2\hat{Q}\gamma_\nu\hat{Q}) - x^2[\gamma_\alpha\hat{Q}\gamma_\nu(\hat{p}_1 + m_1)\gamma_\alpha + \gamma_\alpha(\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1)\gamma_\nu\hat{Q}\gamma_\alpha + 2\gamma_\nu(\hat{p}_1 + m_1)\hat{Q} + 2\hat{Q}(\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1)\gamma_\nu] - x(2-x)\gamma_\alpha(\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1)\gamma_\nu(\hat{p}_1 + m_1)\gamma_\alpha, \quad (3.10)$$

$$Q = -p_1 + kz, \Delta = x^2 m_1^2 - xz(1-xz)k^2 + 2kp_1xz(1-x). \quad (3.11)$$

Диаграмме с охватывающим фотоном (диаграмма В на рисунке 3.2) соответствует:

$$L_{\mu\nu}^{jellyfish} = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \left(\frac{F_{\mu\nu}^{(1)}}{\Delta} + \frac{F_{\mu\nu}^{(2)}}{\Delta^2} + \frac{F_{\mu\nu}^{(3)}}{\Delta^3} \right), \quad (3.12)$$

$$F_{\mu\nu}^{(1)} = 12\hat{p}_1 g_{\mu\nu} - 15\hat{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu + 9\hat{k} \gamma_\mu \gamma_\nu - 24x\hat{Q}\gamma_\mu \gamma_\nu + 16x\hat{Q}g_{\mu\nu} - 8x\gamma_\mu Q_\nu + \gamma_\nu(30p_{1,\mu} - 18k_\mu + 40Q_\mu x), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^{(2)} = & \hat{p}_1 \hat{Q} \gamma_\mu (-2p_{1,\nu} x - 8Q_\nu x^2) + \hat{p}_1 \hat{Q} \gamma_\nu (2p_{1,\mu} x + 8Q_\mu x^2) + \\
& + \hat{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu (-8m_1^2 x + 5Q^2 x^2) + \hat{p}_1 \gamma_\mu (2Q_\nu m_1 x) + \hat{p}_1 \gamma_\nu (-2Q_\mu m_1 x) + \\
& + \hat{p}_1 (12p_{1,\mu} p_{1,\nu} - 12p_{1,\mu} k_\nu + 20p_{1,\mu} Q_\nu x + 24p_{1,\nu} Q_\mu x - 12k_\mu Q_\nu x - \\
& - 12k_\nu Q_\mu x + 32Q_\mu Q_\nu x^2 + 16g_{\mu\nu} m_1^2 x + 12g_{\mu\nu} k Q x - 12g_{\mu\nu} Q^2 x^2) + \\
& + 6\hat{k} \hat{p}_1 \gamma_\mu p_{1,\nu} - 6\hat{k} \hat{p}_1 \gamma_\nu p_{1,\mu} + \hat{k} \hat{Q} \gamma_\mu (12p_{1,\nu} x + 8Q_\nu x^2) + \\
& + \hat{k} \hat{Q} \gamma_\nu (-12p_{1,\mu} x - 8Q_\mu x^2) - 3\hat{k} \gamma_\mu \gamma_\nu Q^2 x^2 - 6\hat{k} \gamma_\mu Q_\nu m_1 x + \\
& + \hat{k} \gamma_\nu (6Q_\mu m_1 x) + \hat{k} (12p_{1,\mu} Q_\nu x - 12p_{1,\nu} Q_\mu x + 12g_{\mu\nu} m_1^2 x - \\
& - 8g_{\mu\nu} Q^2 x^2) + \hat{Q} \gamma_\mu \gamma_\nu (2m_1^2 x - 24m_1^2 x^2 - 8k Q x^2 + 16Q^2 x^3) + \\
& + \hat{Q} \gamma_\mu (2p_{1,\nu} m_1 x + 8Q_\nu m_1 x^2) + \hat{Q} \gamma_\nu (-2p_{1,\mu} m_1 x - 8Q_\mu m_1 x^2) + \\
& + \hat{Q} (-4p_{1,\mu} p_{1,\nu} x - 12p_{1,\mu} k_\nu x + 12p_{1,\nu} k_\mu x + 16p_{1,\nu} Q_\mu x^2 - \\
& - 16k_\nu Q_\mu x^2 + 20Q_\mu Q_\nu x^3 + 16g_{\mu\nu} m_1^2 x^2 + 16g_{\mu\nu} k Q x^2 - \\
& - 14g_{\mu\nu} Q^2 x^3) + g_{\mu\nu} (-2m_1^3 x - 6k Q m_1 x + 4Q^2 m_1 x^2) + \gamma_\mu (4p_{1,\nu} m_1^2 x - \\
& - 12p_{1,\nu} k Q x - 8p_{1,\nu} Q^2 x^2 - 12k_\nu m_1^2 x + 8k_\nu Q^2 x^2 + 2Q_\nu m_1^2 x - \\
& - 16Q_\nu m_1^2 x^2 - 16Q_\nu k Q x^2 + 2Q_\nu Q^2 x^3) + \gamma_\nu (24p_{1,\mu} m_1^2 x + \\
& + 12p_{1,\mu} k Q x - 18p_{1,\mu} Q^2 x^2 - 12k_\mu m_1^2 x + 14k_\mu Q^2 x^2 - 2Q_\mu m_1^2 x + \\
& + 48Q_\mu m_1^2 x^2 + 16Q_\mu k Q x^2 - 30Q_\mu Q^2 x^3) - 24p_{1,\mu} p_{1,\nu} m_1 + \\
& + 12p_{1,\mu} k_\nu m_1 - 36p_{1,\mu} Q_\nu m_1 x + 12p_{1,\nu} k_\mu m_1 - 36p_{1,\nu} Q_\mu m_1 x + \\
& + 24k_\mu Q_\nu m_1 x + 12k_\nu Q_\mu m_1 x - 48Q_\mu Q_\nu m_1 x^2 - 16g_{\mu\nu} m_1^3 x - \\
& - 12g_{\mu\nu} k Q m_1 x + 8g_{\mu\nu} Q^2 m_1 x^2,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^{(3)} = & \hat{p}_1 \hat{Q} \gamma_\mu (8p_{1,\nu} k Q x^2 - 8Q_\nu m_1^2 x^3 + 4Q_\nu Q^2 x^4) + \\
& + \hat{p}_1 \hat{Q} \gamma_\nu (-8p_{1,\mu} k Q x^2 + 8Q_\mu m_1^2 x^3 - 4Q_\mu Q^2 x^4) + \\
& + \hat{p}_1 (-16p_{1,\mu} p_{1,\nu} Q^2 x^2 + 8p_{1,\mu} k_\nu Q^2 x^2 + 16p_{1,\mu} Q_\nu k Q x^2 - \\
& - 16p_{1,\mu} Q_\nu Q^2 x^3 + 8p_{1,\nu} k_\mu Q^2 x^2 - 16p_{1,\nu} Q_\mu k Q x^2 - \\
& - 16p_{1,\nu} Q_\mu Q^2 x^3 + 8k_\mu Q_\nu Q^2 x^3 + 8k_\nu Q_\mu Q^2 x^3 - 16Q_\mu Q_\nu Q^2 x^4 - \\
& - 8g_{\mu\nu} k Q Q^2 x^3 - 8g_{\mu\nu} Q^2 m_1^2 x^3 + 4g_{\mu\nu} Q^4 x^4) + \\
& + \hat{k} \hat{p}_1 \hat{Q} (8p_{1,\mu} Q_\nu x^2 - 8p_{1,\nu} Q_\mu x^2) +
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
& +\hat{k}\hat{Q}\gamma_\mu(8p_{1,\nu}m_1^2x^2 - 8p_{1,\nu}Q^2x^3 - 4Q_\nu Q^2x^4)+ \\
& +\hat{k}\hat{Q}\gamma_\nu(-8p_{1,\mu}m_1^2x^2 + 8p_{1,\mu}Q^2x^3 + 4Q_\mu Q^2x^4)+ \\
& \quad +\hat{k}\hat{Q}(8p_{1,\mu}Q_\nu m_1x^2 - 8p_{1,\nu}Q_\mu m_1x^2)+ \\
& \quad +\hat{k}\gamma_\mu(4p_{1,\nu}Q^2m_1x^2 + 4Q_\nu Q^2m_1x^3)+ \\
& \quad +\hat{k}\gamma_\nu(-4p_{1,\mu}Q^2m_1x^2 - 4Q_\mu Q^2m_1x^3)+ \\
& +\hat{k}(16p_{1,\mu}Q_\nu m_1^2x^2 - 8p_{1,\mu}Q_\nu Q^2x^3 - 16p_{1,\nu}Q_\mu m_1^2x^2+ \\
& \quad +8p_{1,\nu}Q_\mu Q^2x^3 - 8g_{\mu\nu}Q^2m_1^2x^3 + 4g_{\mu\nu}Q^4x^4)+ \\
& +\hat{Q}\gamma_\mu\gamma_\nu(-8m_1^4x^3 + 4kQQ^2x^4 + 12Q^2m_1^2x^4 - 4Q^4x^5)+ \\
& +\hat{Q}\gamma_\mu(-8p_{1,\nu}kQm_1x^2 + 8Q_\nu m_1^3x^3 - 4Q_\nu Q^2m_1x^4)+ \\
& +\hat{Q}\gamma_\nu(8p_{1,\mu}kQm_1x^2 - 8Q_\mu m_1^3x^3 + 4Q_\mu Q^2m_1x^4)+ \\
& \quad +\hat{Q}(-16p_{1,\mu}p_{1,\nu}m_1^2x^2 + 8p_{1,\mu}k_\nu Q^2x^3 - \\
& -16p_{1,\mu}Q_\nu m_1^2x^3 + 16p_{1,\nu}k_\mu m_1^2x^2 - 8p_{1,\nu}k_\mu Q^2x^3 - 8p_{1,\nu}Q_\mu Q^2x^4+ \\
& \quad +8k_\nu Q_\mu Q^2x^4 - 8Q_\mu Q_\nu Q^2x^5 - 8g_{\mu\nu}kQQ^2x^4 - 8g_{\mu\nu}Q^2m_1^2x^4+ \\
& \quad +4g_{\mu\nu}Q^4x^5) + g_{\mu\nu}(4kQQ^2m_1x^3 + 4Q^2m_1^3x^3 - 2Q^4m_1x^4)+ \\
& \quad +\gamma_\mu(8p_{1,\nu}kQQ^2x^3 - 8p_{1,\nu}Q^2m_1^2x^3 + 4p_{1,\nu}Q^4x^4+ \\
& \quad +8k_\nu Q^2m_1^2x^3 - 4k_\nu Q^4x^4 - 16Q_\nu m_1^4x^3 + 8Q_\nu kQQ^2x^4+ \\
& \quad +8Q_\nu Q^2m_1^2x^4) + \gamma_\nu(-8p_{1,\mu}kQQ^2x^3 - 8p_{1,\mu}Q^2m_1^2x^3+ \\
& \quad +4p_{1,\mu}Q^4x^4 + 8k_\mu Q^2m_1^2x^3 - 4k_\mu Q^4x^4 + 16Q_\mu m_1^4x^3- \\
& \quad -8Q_\mu kQQ^2x^4 - 24Q_\mu Q^2m_1^2x^4 + 8Q_\mu Q^4x^5)+ \\
& +24p_{1,\mu}p_{1,\nu}Q^2m_1x^2 - 8p_{1,\mu}k_\nu Q^2m_1x^2 - 16p_{1,\mu}Q_\nu kQm_1x^2+ \\
& +24p_{1,\mu}Q_\nu Q^2m_1x^3 - 16p_{1,\nu}k_\mu Q^2m_1x^2 + 16p_{1,\nu}Q_\mu kQm_1x^2+ \\
& +24p_{1,\nu}Q_\mu Q^2m_1x^3 - 16k_\mu Q_\nu Q^2m_1x^3 - 8k_\nu Q_\mu Q^2m_1x^3+ \\
& +24Q_\mu Q_\nu Q^2m_1x^4 + 8g_{\mu\nu}kQQ^2m_1x^3 + 8g_{\mu\nu}Q^2m_1^3x^3 - 4g_{\mu\nu}Q^4m_1x^4.
\end{aligned}$$

Аналогичные выражения для лептонных тензоров в калибровке Фрида — Йенни и фейнмановской калибровке могут быть найдены в работах [121—124; 130; 131]. Зная явные выражения для лептонных тензоров мы можем перейти к непосредственному вычислению поправок.

Таблица 6 — Радиационные поправки без учета отдачи к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре S-состояний атома мюонного дейтерия. Сокращение СЭ обозначает поправку на собственную энергию, ВП — вершинную поправку, ОФ. — поправку с охватывающим фотоном

| Тип поправки | СЭ, мэВ | ВП, мэВ | ОФ, мэВ | Суммарная поправка, мэВ |
|--|------------------------------------|---|--|--|
| Точечное ядро, аналитическое вы- ражение | $E_F\alpha(Z\alpha)^{\frac{3}{2}}$ | $-E_F\alpha(Z\alpha)(3\ln 2 + \frac{9}{4})$ | $E_F\alpha(Z\alpha)(4\ln 2 - \frac{5}{2})$ | $E_F\alpha(Z\alpha)(\ln 2 - \frac{13}{4})$ |
| Точечное ядро | 0.0039 | -0.0113 | 0.0007 | -0.0067 |
| Неточечное ядро | 0.0014 | -0.0042 | -0.0011 | -0.0039 |

Для построения потенциала сверхтонкого взаимодействия по амплитуде (3.42) мы используем технику проекционных операторов [86; 92; 93; 132]. Явный вид проекционных операторов в случае сверхтонкой структуры S-состояний мюонного дейтерия задается выражениями (1.82). Использование (1.82) в (3.42) позволяет удобным образом выделить часть амплитуды, дающую вклад в сверхтонкое взаимодействие, и перейти непосредственно к вычислению следа и сверткам по лоренцевским индексам с помощью системы Form [94]. Общая структура вкладов в энергетические сдвиги состояний с суммарными спинами 1/2 и 3/2 для прямых двухфотонных обменных диаграмм имеет вид:

$$\begin{aligned}
N_{1/2} = & \frac{1}{6} Tr \left\{ \sum_{\sigma} \Psi^{\sigma}(P) \bar{\Psi}^{\sigma}(P) (\gamma_{\rho} - v_{1,\rho}) \gamma_5 (1 + \hat{v}_1) L_{\mu\nu} (1 + \hat{v}_1) \times \right. \\
& \times \gamma_5 (\gamma_{\alpha} - v_{1,\alpha}) \left. \right\} \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) \times \\
& \times D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
N_{3/2} = & \frac{1}{4} Tr \left\{ \sum_{\sigma} \Psi_{\alpha}^{\sigma}(P) \bar{\Psi}_{\rho}^{\sigma}(P) (1 + \hat{v}_1) L_{\mu\nu} (1 + \hat{v}_1) \right\} \times \\
& \times \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Рассматриваемые нами поправки содержат в себе не только эффекты структуры ядра, но и поправки на отдачу. Для упрощения вычислений сначала

рассмотрим радиационные поправки на структуру ядра без эффектов отдачи и далее исследуем поправки на отдачу отдельно. Если пренебречь эффектами отдачи, то знаменатель пропагатора дейтрона сильно упрощается:

$$\frac{1}{[(p_2 + k)^2 - m_2^2 + i0]} \approx \frac{1}{(k^2 + 2kp_2 + i0)} \approx \frac{1}{(2k_0m_2 + i0)}. \quad (3.18)$$

Двухфотонные обменные диаграммы с перекрестными фотонами дают вклад в сверхтонкую структуру, который также определяется выражениями (3.42)-(3.12) с заменой $k \rightarrow -k$ в пропагаторе дейтрона. В результате суммарный вклад оказывается пропорционален $\delta(k_0)$ в силу известного соотношения:

$$\frac{1}{2m_2k_0 + i0} + \frac{1}{-2m_2k_0 + i0} = -\frac{i\pi}{m_2}\delta(k_0). \quad (3.19)$$

Таким образом интегрирование по k_0 исключается из интеграла по петлевому четырехимпульсу k и остается только трехмерное интегрирование по \mathbf{k} . В результате три типа поправок порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре S-состояний мюонного дейтерия без учета эффектов отдачи могут быть представлены в виде интегралов по трехмерному импульсу \mathbf{k} и фейнмановским параметрам:

$$\Delta E_{se}^{hfs} = E_F 6 \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 x dx \int_0^\infty \frac{F_1(k^2)F_3(k^2)dk}{x + (1-x)k^2}, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{vertex-1}^{hfs} &= -E_F 24 \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 x dx \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{F_1(k^2)F_3(k^2) \ln\left[\frac{x+k^2z(1-xz)}{x}\right] dk}{k^2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{vertex-2}^{hfs} &= E_F 8 \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \left\{ \frac{F_1(k^2)F_3(k^2)}{[x + k^2z(1-xz)]^2} \times \right. \\ &\times \left[-2xz^2(1-xz)k^4 + zk^2(3x^3z - x^2(9z+1) + x(4z+7) - 4) + \right. \\ &\left. \left. + x^2(5-x) \right] - \frac{1}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{jellyfish}^{hfs} &= E_F 4 \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \int_0^1 (1-z) dz \int_0^1 (1-x) dx \times \\
&\times \int_0^\infty \frac{F_1(k^2) F_3(k^2) dk}{[x + (1-x)k^2]^3} \left[6x + 6x^2 - 6x^2 z + 2x^3 - 12x^3 z - 12x^4 z + \right. \\
&+ k^2(-6z + 18xz + 4xz^2 + 7x^2 z - 30x^2 z^2 - 2x^2 z^3 - 36x^3 z^2 + \\
&\left. + 12x^3 z^3 + 24x^4 z^3) + k^4(9xz^2 - 31x^2 z^3 + 34x^3 z^4 - 12x^4 z^5) \right]. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Вклад формфактора $F_2(k^2)$ в (3.20)-(3.23) опущен, так как члены типа $F_2(k^2)F_3(k^2)$ подавлены степенями массы m_2 . Слагаемое $1/2$ в фигурных скобках (3.22) связано с итерационным членом квазипотенциала, который устраняет инфракрасную расходимость при вычислении интеграла по петлевому импульсу. Все поправки (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) определяются сходящимися интегралами. В случае точечного дейтрона интегрирование может быть выполнено аналитически для всех поправок. Вначале проводится интегрирование по x , а затем по k, z . Полный результат оказывается равным $E_F(\ln 2 - \frac{13}{4})$, что совпадает с работами [121–124]. Это аналитическое выражение для радиационных поправок к двухфотонным обменным диаграммам без учета отдачи был получен впервые в [133]. При проведении численных расчетов поправок (3.20)-(3.23), связанных с конечным размером ядра, мы используем параметризацию (??) для электромагнитных формфакторов дейтрона. Результирующие численные значения для каждой из поправок, а также сравнение с численными значениями поправок в приближении точечного ядра, представлены в таблице 6. Радиационные поправки к двухфотонным обменным амплитудам с учетом структуры ядра в сверхтонкой структуре мюонного дейтерия вычислены нами впервые.

3.2 Поправки на структуру ядра порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге

Рассмотрим радиационные поправки в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге, представленные на рисунке 3.1. Можно предварительно оценить величину такой поправки по значению фактора $\alpha^6\mu^3/m_1^2 \approx 0.012$ мэВ для атома мюонного водорода. Такая оценка говорит о необходимости рассмотреть вклад радиационных поправок в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам в лэмбовский сдвиг легких мюонных атомов. Радиационная поправка порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ состоит, как и в случае вклада в сверхтонкую структуру спектра энергии, из трех частей: поправки на собственную энергию, вершинной поправки и поправки с охватывающим фотоном.

Нужно отметить, что вклад радиационных поправок в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в случае точечного ядра был вычислен в работе [134]. С учетом конечного размера ядра вклад диаграмм на рисунке 3.1 в лэмбовский сдвиг атома водорода, пропорциональный квадрату зарядового радиуса, был получен в работах [135; 136]. В аналитической форме радиационные поправки в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$, пропорциональные квадрату зарядового радиуса, были получены в работах [137; 138].

Вклад двухфотонных обменных диаграмм в лэмбовский сдвиг и сверхтонкую структуру легких мюонных ВП атомов был ранее исследован в работах [28; 34; 139–141]. Как и в случае радиационных поправок к сверхтонкой структуре мы используем квазипотенциальный подход в квантовой электродинамике [40; 69; 142]. При вычислении радиационных поправок в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ мы пренебрегаем относительными импульсами частиц в начальном и конечном состояниях и получаем конечные аналитические выражения для каждой из поправок на

рисунке 3.1 в отдельности. Для упрощения расчетов мы также пренебрегаем эффектами отдачи, что приводит к выражениям для поправок, справедливым как для спина ядра $1/2$, так и 1 . Далее для простоты расчета будем рассматривать взаимодействие двух частиц спина $1/2$.

Начнем вычисление поправок порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ с общего выражения для амплитуд (прямых и перекрестных), представленных на рисунке 3.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{-i(Z\alpha)^2}{\pi^2} \int d^4k [\bar{u}(q_1)L_{\mu\nu}u(p_1)] D_{\mu\omega}(k)D_{\nu\lambda}(k) \times \\ & \times \left[\bar{v}(p_2)\Gamma_\lambda(k) \frac{-\hat{p}_2 - \hat{k} + m_2}{(p_2 + k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \Gamma_\sigma(k)v(q_2) + \right. \\ & \left. + \bar{v}(p_2)\Gamma_\sigma(k) \frac{-\hat{p}_2 + \hat{k} + m_2}{(p_2 - k)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \Gamma_\lambda(k)v(q_2) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $p_{1,2}$ и $q_{1,2}$ — 4-импульсы частиц в начальном и конечном состояниях, $p_{1,2} \approx q_{1,2}$, k — 4-импульс обменного фотона. Вершинный оператор определяется двумя формфакторами в виде:

$$\Gamma_\mu(k) = F_1(k^2)\gamma^\mu - \frac{F_2(k^2)}{2m_2}\sigma^{\mu\nu}k_\nu. \quad (3.25)$$

Пропагатор обменных фотонов взят в кулоновской калибровке и имеет вид:

$$D_{\lambda\sigma}(k) = \frac{1}{k^2} \left[g_{\lambda\sigma} + \frac{k_\lambda k_\sigma - k_0 k_\lambda g_{\sigma 0} - k_0 k_\sigma g_{\lambda 0}}{\mathbf{k}^2} \right]. \quad (3.26)$$

Лептонный тензор $L_{\mu\nu}$, как уже отмечалось ранее, имеет вполне определенный вид для каждой из рассматриваемых амплитуд. Используя пакет FeynCalc [129] и калибровку Фрида — Йенни, для поправки на собственную энергию было получено выражение (3.6). Для вершинной поправки лептонный тензор имеет вид (3.7). В случае поправки с охватывающим фотоном было получено выражение (3.12). Для того, чтобы выделить часть потенциала, дающую вклад в лэмбовский сдвиг, мы используем технику проекционных операторов. Проекционные операторы на состояния с полным спином 0 и 1 имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_0 &= \frac{1 + \hat{Q}}{2\sqrt{2}}\gamma_5, \\ \hat{\Pi}_1 &= \frac{1 + \hat{Q}}{2\sqrt{2}}\hat{\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где ϵ_μ — вектор поляризации состояния мюон-ядро со спином 1, $Q = (1,0,0,0)$. После применения проекционных операторов получаем две амплитуды, спроектированные на состояния пары мюон — ядро с суммарным спином 0 и 1. Общие выражения для числителей спроектированных прямых обменных амплитуд имеют следующий вид:

$$N(^1S_0) = \frac{1}{8} Tr \left\{ \gamma_5 (1 + \hat{Q}) L_{\mu\nu} (1 + \hat{Q}) \gamma_5 \left[F_1 \gamma^\lambda - \frac{F_2}{2m_2} \sigma^{\lambda\rho} k_\rho \right] \times \right. \\ \left. \times (-\hat{p}_2 - \hat{k} + m_2) \left[F_1 \gamma^\sigma + \frac{F_2}{2m_2} \sigma^{\sigma\beta} k_\beta \right] \right\} D_{\mu\sigma}(k) D_{\nu\lambda}(k), \quad (3.28)$$

$$N(^3S_1) = \frac{1}{24} Tr \left\{ \hat{\epsilon}^* (1 + \hat{Q}) L_{\mu\nu} (1 + \hat{Q}) \hat{\epsilon} \left[F_1 \gamma^\lambda - \frac{F_2}{2m_2} \sigma^{\lambda\rho} k_\rho \right] \times \right. \\ \left. \times (-\hat{p}_2 - \hat{k} + m_2) \left[F_1 \gamma^\sigma + \frac{F_2}{2m_2} \sigma^{\sigma\beta} k_\beta \right] \right\} D_{\mu\sigma}(k) D_{\nu\lambda}(k). \quad (3.29)$$

После вычисления следа и свертки по лоренцевским индексам при помощи пакета аналитических расчетов Form [94] были получены потенциалы $V(^1S_0)$ и $V(^3S_1)$, соответствующие состоянию пары мюон — ядро с суммарным спином 0 и 1. Потенциал, дающий вклад в лэмбовский сдвиг, может быть получен при помощи следующего соотношения [143; 144]:

$$V^{Ls} = V(^1S_0) + \frac{3}{4} V^{hfs}, \quad (3.30)$$

где $V^{hfs} = V(^3S_1) + V(^1S_0)$ — сверхтонкая часть квазипотенциала, $V(^1S_0)$ — проекция квазипотенциала на состояние пары мюон — ядро со спином 0. Использование (3.27) и (3.30) в (3.24) позволило удобным образом перейти к вычислению следа и сверткам по лоренцевским индексам. Для удобства вычисления интеграла по петлевому импульсу мы пренебрегаем эффектами отдачи. Как уже было показано для случая сверхтонкой структуры, интеграл по петлевому импульсу в этом случае значительно упрощается.

В случае ядра со спином 1 построение квазипотенциала может быть выполнено аналогично приведенному выше алгоритму. Основным отличием является необходимость использования проекционных операторов (1.82). Так как в наших вычислениях мы пренебрегаем эффектами отдачи, то полученные нами

выражения справедливы для всех легких мюонных ВП-атомов вне зависимости от величины спина ядра. Интегральные выражения для поправок зависят от квадрата электрического формфактора ядра. Три типа поправок порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге атома мюонного дейтерия были представлены в виде интегралов по петлевому импульсу \mathbf{k} и фейнмановским параметрам:

$$\Delta E_{se}^{Ls} = -\frac{6\alpha(Z\alpha)^5\mu^3}{\pi^2 m_1^2 n^3} \delta_{l0} \int_0^\infty \frac{[G_E(k^2)^2 - 1]}{k^2(k^2 - 1)^2} (1 - k^2 + 2k^2 \ln k) dk, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{vertex-1}^{Ls} &= \frac{48\alpha(Z\alpha)^5\mu^3}{\pi^2 m_1^2 n^3} \delta_{l0} \int_0^1 dz \int_0^1 x dx \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{[G_E(k^2)^2 - 1]}{k^4} \ln\left[\frac{x + k^2 z(1 - xz)}{x}\right] dk, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{vertex-2}^{Ls} &= \frac{8\alpha(Z\alpha)^5\mu^3}{\pi^2 m_1^2 n^3} \delta_{l0} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{[G_E(k^2)^2 - 1] dk}{k^4 [x + z(1 - xz)k^2]^2} \times \\ &\times \left[-8x^2 + k^2(-x^2 + 8z - 8xz - 4x^2 z + 2x^3 z - 8xz^2 + 16x^2 z^2 - 4x^3 z^2) + \right. \\ &\left. + k^4(2z - 3xz + 2xz^2 + 5x^2 z^2 - 8x^2 z^3 - 2x^3 z^3 + 4x^3 z^4) \right], \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{jellyfish}^{Ls} &= \frac{2\alpha(Z\alpha)^5\mu^3}{\pi^2 m_1^2 n^3} \delta_{l0} \int_0^1 (1 - z) dz \int_0^1 (1 - x) dx \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{[G_E(k^2)^2 - 1] dk}{[x + z(1 - xz)k^2]^3} \left[-24x - 24x^2 + 36x^4 + \right. \\ &+ k^2(24z - 96xz - 8xz^2 - 22x^2 z + 40x^2 z^2 + 76x^3 z + 24x^3 z^2 - 48x^4 z^2) + \\ &\left. + k^4(-66xz^2 + 32x^2 z^2 + 70x^2 z^3 - 36x^3 z^3 - 24x^3 z^4 + 12x^4 z^4) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Представим зарядовый формфактор в виде ряда следующим образом:

$$G_E(k^2)^2 - 1 \approx G_E(0)^2 + 2G_E(0)G_E'(0)k^2 - 1 = -\frac{1}{3}r_N^2 k^2, \quad (3.35)$$

где r_N — зарядовый радиус ядра. Используя данное разложение, представим приведенные выше поправки в аналитическом виде и сравним с результатами, полученными в других работах. С учетом разложения (3.35) имеем:

$$\Delta E_{se}^{Ls}(r_N^2) = \frac{\alpha(Z\alpha)^5\mu^3 r_N^2}{n^3} \frac{1}{2} \delta_{l0}, \quad (3.36)$$

$$\Delta E_{vertex-1}^{Ls}(r_N^2) = \frac{\alpha(Z\alpha)^5\mu^3 r_N^2}{n^3} (1 - 4 \ln 2) \delta_{l0}, \quad (3.37)$$

$$\Delta E_{vertex-2}^{Ls}(r_N^2) = \frac{\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3 r_N^2}{n^3} \left(\frac{4}{3} \ln 2 - 3 \right) \delta_{l0}, \quad (3.38)$$

$$\Delta E_{jellyfish}^{Ls}(r_N^2) = \frac{\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3 r_N^2}{n^3} \left(\frac{16}{3} \ln 2 - \frac{7}{3} \right) \delta_{l0}. \quad (3.39)$$

Еще одна поправка порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге мюонного дейтерия связана с однопетлевой мюонной поляризацией вакуума в двухфотонных обменных амплитудах. Она может быть получена при помощи замены (1.45) в фотонном пропагаторе. После интегрирования по спектральному параметру получим аналитическое выражение для поправки на однопетлевую мюонную поляризацию вакуума в двухфотонных обменных диаграммах порядка $\alpha(Z\alpha)^5$:

$$\Delta E_{VP}^{Ls} = -\frac{32\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3}{3\pi^2 m_1^2 n^3} \delta_{l0} \int_0^\infty \frac{[G_E(k^2)^2 - 1] dk}{3k^7} \left[12k - 5k^3 - \right. \\ \left. -6(2 - k^2) \sqrt{k^2 + 4} \arcsin \frac{k}{2} \right]. \quad (3.40)$$

Используя разложение (3.35) в (3.40), получим:

$$\Delta E_{VP}^{Ls} = -\frac{\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3 r_N^2}{2n^3} \delta_{l0}. \quad (3.41)$$

Все рассмотренные нами поправки к лэмбовскому сдвигу в атоме мюонного дейтерия порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ были представлены в виде конечных интегральных выражений. Использование разложения (3.35) позволяет выполнить интегрирование по петлевому импульсу аналитически. Полученные после интегрирования значения поправок представлены в таблице 7. Как уже отмечалось ранее, аналитическое выражение для радиационных поправок к двухфотонным амплитудам в лэмбовском сдвиге в приближении точечного ядра $\delta E^{Ls} = 4\left(1 + \frac{11}{128} - \frac{\ln 2}{2}\right) \frac{\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3}{m_1^2 n^3} \delta_{l0}$ было получено в [134]. В работе [131] выражения для лептонных тензоров вершинной поправки и поправки с охватывающим фотоном были построены в другой форме, однако результирующие вклады в лэмбовский сдвиг S-состояний совпадает с нашими результатами. При численном интегрировании в полученных интегральных выражениях для поправок мы используем параметризацию зарядового формфактора дейтрона из работы [95].

Таблица 7 — Радиационные поправки без учета отдачи к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге S-состояний атома мюонного дейтерия. Сокращение СЭ обозначает поправку на собственную энергию, ВП — вершинную поправку, ОФ — поправку с охватывающим фотоном, МПВ - поправку на мюонную поляризацию вакуума

| Тип поправки | СЭ, мэВ | ВП, мэВ | ОФ, мэВ | МПВ, мэВ | Суммарная поправка, мэВ |
|--|---------------|----------------------------|--------------------------------------|---------------|--|
| Разложение (3.35), аналитическое выражение | $\frac{1}{2}$ | $-(\frac{8}{3} \ln 2 + 2)$ | $(\frac{16}{3} \ln 2 - \frac{7}{3})$ | $\frac{1}{2}$ | $(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{23}{6} + \frac{1}{2})$ |
| Разложение (3.35) | 0.0088 | -0.0675 | 0.0239 | 0.0088 | -0.0260 |
| Неточечное ядро | 0.0037 | -0.0321 | 0.0087 | 0.0023 | -0.0174 |

В приближении (3.35) полученные нами аналитические выражения для поправок совпадают с результатами из работ [137; 138]. Численные значения включены в таблицу 7 и получены с использованием зарядового радиуса дейтрона из [145]. Как следует из результатов в таблице 7, учет структуры ядра с использованием параметризации зарядового формфактора сильно изменяет значение поправок по сравнению с использованием разложения (3.35). Для отдельных поправок численные значения отличаются более чем в 2 раза.

Полученные нами численные значения поправок порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в лэмбовском сдвиге атома мюонного дейтерия должны быть дополнительно учтены при сравнении с экспериментальными данными [6; 7; 12; 146; 147].

3.3 Поправки на структуру ядра с отдачей порядка $\alpha(Z\alpha)m_1/m_2E_F$ в сверхтонкой структуре S-состояний

Рассмотрим отдельно радиационные поправки в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре атома мюонного дейтерия с учетом эффектов отдачи [39]. Амплитуда рассеяния

мюона на дейтроне в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$\mathcal{M} = \frac{-i(Z\alpha)^2}{\pi^2} \int d^4k [\bar{u}(q_1) L_{\mu\nu} u(p_1)] D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k) \times$$

$$\times \left[\varepsilon_\rho^*(q_2) \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) \frac{-g_{\beta\tau} + \frac{(p_2+k)_\beta (p_2+k)_\tau}{m_2^2}}{((p_2+k)^2 - m_2^2 + i0)} \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) \varepsilon_\alpha(p_2) \right] + \quad (3.42)$$

+перекрестные амплитуды,

где $\varepsilon_\rho(q)$ — волновая функция свободного дейтрона, имеющего спин равный 1, $p_{1,2}$ и $q_{1,2}$ — 4-импульсы мюона и дейтрона в начальном и конечном состояниях: $p_{1,2} \approx q_{1,2}$. Вершина взаимодействия дейтрона и фотона имеет вид (3.25). Для обменных фотонов мы используем кулоновскую калибровку. Для построения квазипотенциала по амплитуде взаимодействия мы используем проекционные операторы (1.82). Это позволяет удобным образом выделить сверхтонкую часть квазипотенциала и перейти к вычислению следа и свертке по лоренцевским индексам. Выпишем более подробно общий вид числителей спроектированных амплитуд с учетом явного вида лептонного тензора для каждой из трех поправок. Для поправки на собственную энергию имеем:

$$N_{1/2}^\Sigma = -\frac{1}{6} Tr \left\{ \sum_\sigma \Psi^\sigma(P) \bar{\Psi}^\sigma(P) (\gamma_\rho - v_{1,\rho}) \gamma_5 (1 + \hat{v}_1) \frac{3\alpha}{4\pi} \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu \times \right.$$

$$\left. \times (1-x)(1 + \hat{v}_1) \gamma_5 (\gamma_\alpha - v_{1,\alpha}) \right\} \times \quad (3.43)$$

$$\times \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) [\mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) + \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 - k)] \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) \times$$

$$\times D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k),$$

$$N_{3/2}^\Sigma = -\frac{1}{4} Tr \left\{ \sum_\sigma \Psi_\alpha^\sigma(P) \bar{\Psi}_\rho^\sigma(P) (1 + \hat{v}_1) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{3\alpha}{4\pi} \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu (1-x)(1 + \hat{v}_1) \right\} \times \quad (3.44)$$

$$\times \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) [\mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) + \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 - k)] \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) \times$$

$$\times D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k).$$

Для вершинной поправки числители спроектированных амплитуд имеют следующий вид:

$$N_{1/2}^\Lambda = \frac{1}{6} Tr \left\{ \sum_{\sigma} \Psi^{\sigma}(P) \bar{\Psi}^{\sigma}(P) (\gamma_{\rho} - v_{1,\rho}) \gamma_5 (1 + \hat{v}_1) \frac{\alpha}{2\pi} \gamma_{\mu} (\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1) \times \right. \\ \left. \times \left[F_{\nu}^{(1)} + \frac{F_{\nu}^{(2)}}{\Delta} + \frac{F_{\nu}^{(3)}}{\Delta^2} \right] (1 + \hat{v}_1) \gamma_5 (\gamma_{\alpha} - v_{1,\alpha}) \right\} \times \quad (3.45)$$

$$\times \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) [\mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) + \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 - k)] \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) \times \\ \times D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k),$$

$$N_{3/2}^\Lambda = \frac{1}{4} Tr \left\{ \sum_{\sigma} \Psi_{\alpha}^{\sigma}(P) \bar{\Psi}_{\rho}^{\sigma}(P) (1 + \hat{v}_1) \frac{\alpha}{2\pi} \gamma_{\mu} (\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1) \times \right. \\ \left. \times \left[F_{\nu}^{(1)} + \frac{F_{\nu}^{(2)}}{\Delta} + \frac{F_{\nu}^{(3)}}{\Delta^2} \right] (1 + \hat{v}_1) \right\} \times \quad (3.46)$$

$$\times \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) [\mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) + \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 - k)] \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) \times \\ \times D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k).$$

В случае поправки с охватывающим фотоном имеем:

$$N_{1/2}^{\bar{\Xi}} = \frac{1}{6} Tr \left\{ \sum_{\sigma} \Psi^{\sigma}(P) \bar{\Psi}^{\sigma}(P) (\gamma_{\rho} - v_{1,\rho}) \gamma_5 (1 + \hat{v}_1) \frac{\alpha}{4\pi} \right. \\ \left. \times x(1 - z) \left(\frac{F_{\mu\nu}^{(1)}}{\Delta} + \frac{F_{\mu\nu}^{(2)}}{\Delta^2} + \frac{F_{\mu\nu}^{(3)}}{\Delta^3} \right) (1 + \hat{v}_1) \gamma_5 (\gamma_{\alpha} - v_{1,\alpha}) \right\} \times \quad (3.47)$$

$$\times \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) [\mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) + \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 - k)] \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) \times \\ \times D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k),$$

$$N_{3/2}^{\bar{\Xi}} = \frac{1}{4} Tr \left\{ \sum_{\sigma} \Psi_{\alpha}^{\sigma}(P) \bar{\Psi}_{\rho}^{\sigma}(P) (1 + \hat{v}_1) \frac{\alpha}{4\pi} \times \right. \\ \left. \times x(1 - z) \left(\frac{F_{\mu\nu}^{(1)}}{\Delta} + \frac{F_{\mu\nu}^{(2)}}{\Delta^2} + \frac{F_{\mu\nu}^{(3)}}{\Delta^3} \right) (1 + \hat{v}_1) \right\} \times \quad (3.48)$$

$$\times \Gamma_{\omega,\rho\beta}(q_2, p_2 + k) \mathcal{D}_{\beta\tau}(p_2 + k) \Gamma_{\lambda,\tau\alpha}(p_2 + k, p_2) D_{\mu\omega}(k) D_{\nu\lambda}(k).$$

Потенциал для каждой из радиационных поправок с учетом структуры ядра и отдачи к двухфотонным обменным диаграммам в сверхтонком расщеплении S-уровней мюонного дейтерия получается как разность спроектированных амплитуд $N_{3/2} - N_{1/2}$.

Так как при вычислении мы учитываем отдачу ядра, необходимо выполнить интегрирование по четырехмерному петлевому импульсу. Для удобства вычисления интеграла по петлевому импульсу выполним поворот Вика и перейдем в евклидово импульсное пространство [148]:

$$\begin{aligned} \int d^4k &= \int_0^\infty k^3 dk \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \\ &= 4\pi \int_0^\infty k^3 dk \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (3.49)$$

В результате три типа поправок порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре S-состояний мюонного дейтерия с учетом отдачи ядра были представлены в виде следующих интегралов по петлевому импульсу и фейнмановским параметрам:

$$\begin{aligned} \Delta E_\Sigma^{hfs} &= -\frac{12\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3}{n^3 \pi^3 m_2} \int_0^1 (1-x) dx \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \times \\ &\times \int \frac{k dk}{(k^2 + 4\mu^{-2} \cos^2 \varphi) (1-x + xk^2)^2 + 4x^2 k^2 \cos^2 \varphi} \times \\ &\times \left\{ F_2 F_3 \left(\frac{k^{10} x}{m_2^4} - \frac{k^{10}}{m_2^4} + \frac{k^8 x \cos^4 \varphi}{m_2^2} + \frac{2k^8 x \cos^2 \varphi}{m_2^2} + \frac{k^8 x}{m_2^2} - \right. \right. \\ &\left. - \frac{k^8 m_1^2 x}{m_2^4} - \frac{k^8 \cos^4 \varphi}{m_2^2} - \frac{2k^8 \cos^2 \varphi}{m_2^2} - \frac{k^8}{m_2^2} - \frac{k^6 m_1^2 x \cos^4 \varphi}{m_2^2} - \right. \\ &\left. - \frac{2k^6 m_1^2 x \cos^2 \varphi}{m_2^2} - \frac{k^6 m_1^2 x}{m_2^2} \right) + F_1 F_3 \left(-\frac{k^8 x \cos^2 \varphi}{m_2^2} + \frac{2k^8 x}{m_2^2} + \right. \\ &\left. + \frac{k^8 \cos^2 \varphi}{m_2^2} - \frac{2k^8}{m_2^2} + \frac{k^6 m_1^2 x \cos^2 \varphi}{m_2^2} - \frac{2k^6 m_1^2 x}{m_2^2} + 4k^6 x - 4k^6 - 4k^4 m_1^2 x \right) + \\ &\left. + F_3^2 \left(\frac{k^8 x \cos^2 \varphi}{m_2^2} - \frac{k^8 x}{m_2^2} - \frac{k^8 \cos^2 \varphi}{m_2^2} + \frac{k^8}{m_2^2} - \frac{k^6 m_1^2 x \cos^2 \varphi}{m_2^2} + \right. \right. \\ &\left. + \frac{k^6 m_1^2 x}{m_2^2} - k^6 x \cos^4 \varphi + k^6 x \cos^2 \varphi + k^6 \cos^4 \varphi - \right. \\ &\left. - k^6 \cos^2 \varphi - k^4 m_1^2 x \cos^4 \varphi + k^4 m_1^2 x \cos^2 \varphi + \right. \\ &\left. + 2k^4 m_1^2 \cos^4 \varphi - 2k^4 m_1^2 \cos^2 \varphi \right) \}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{1,\Lambda}^{hfs} = & -\frac{8\alpha(Z\alpha)^5\mu^3}{n^3\pi^3m_2} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^\infty kdk \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \times \\
& \times F_2F_3\left(-\frac{3k^4 \cos^2 \varphi}{m_2^4} + \frac{3k^4}{m_2^4} - \frac{9k^2 \cos^4 \varphi}{m_2^2} + \frac{6k^2 \cos^2 \varphi}{m_2^2} + \frac{3k^2}{m_2^2}\right) + \\
& + F_3^2\left(-\frac{3k^2 \cos^2 \varphi}{m_2^2} + \frac{3k^2}{m_2^2} + 3 \cos^4 \varphi - 3 \cos^2 \varphi\right) + \\
& + F_1F_3\left(-\frac{6k^2 \cos^2 \varphi}{m_2^2} + \frac{6k^2}{m_2^2} - 12 \cos^4 \varphi + 12\right) \times \\
& \times \frac{\ln [(x + k^2z(1 - xz)) / m_1^2x]}{(k^2 + 4m_1^2 \cos^2 \varphi) (k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \varphi)}, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{2,\Lambda}^{hfs} = & E_F \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^3(1 + \kappa)\mu} \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \times \\
& \times \left[\frac{G_1}{\Delta} + \frac{G_2}{\Delta^2} \right] \frac{1}{k^5 (k^2 + 4m_1^2 \cos^2 \varphi) (k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \varphi)}, \tag{3.52} \\
\Delta = & (k^2z(1 - xz) + m_1^2x)^2 + 4k^2m_1^2z^2(1 - x)^2 \cos^2 \varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1 = & F_3^2(4x^3z^4 \cos^4 \varphi k^{10} - 8x^2z^3 \cos^4 \varphi k^{10} + 4xz^2 \cos^4 \varphi k^{10} - \\
& - 4x^3z^4 \cos^2 \varphi k^{10} + 8x^2z^3 \cos^2 \varphi k^{10} - 4xz^2 \cos^2 \varphi k^{10} - \\
& - 24x^3z^2 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 + 76x^2z^2 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 - 40xz^2 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 + \\
& + 44x^2z \cos^4 \varphi m_1^2k^8 - 104xz \cos^4 \varphi m_1^2k^8 + 48z \cos^4 \varphi m_1^2k^8 + \\
& + 8x^3z^2 \cos^2 \varphi m_1^2k^8 - 20x^2z^2 \cos^2 \varphi m_1^2k^8 + 8xz^2 \cos^2 \varphi m_1^2k^8 - \\
& - 20x^2z \cos^2 \varphi m_1^2k^8 + 40xz \cos^2 \varphi m_1^2k^8 - 16z \cos^2 \varphi m_1^2k^8 + \\
& + 4x^3 \cos^4 \varphi m_1^4k^6 - 44x^2 \cos^4 \varphi m_1^4k^6 + 24x \cos^4 \varphi m_1^4k^6 + \\
& + 32x^2z \cos^4 \varphi m_1^4k^6 - 32xz \cos^4 \varphi m_1^4k^6 - 4x^3 \cos^2 \varphi m_1^4k^6 + \\
& + 20x^2 \cos^2 \varphi m_1^4k^6 - 8x \cos^2 \varphi m_1^4k^6) + F_1F_3(16x^3z^4k^{10} - \\
& - 16x^3z^4 \cos^4 \varphi k^{10} + 32x^2z^3 \cos^4 \varphi k^{10} - 16xz^2 \cos^4 \varphi k^{10} - \\
& - 32x^2z^3k^{10} + 16xz^2k^{10} - 16x^3z^3 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 - 16x^2z^3 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 + \\
& + 16x^3z^2 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 - 48x^2z^2 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 + 64xz^2 \cos^4 \varphi m_1^2k^8 - \\
& - 64x^2z \cos^4 \varphi m_1^2k^8 + 128xz \cos^4 \varphi m_1^2k^8 - 64z \cos^4 \varphi m_1^2k^8 - \\
& - 24x^3z^2m_1^2k^8 + 72x^2z^2m_1^2k^8 - 32xz^2m_1^2k^8 + 56x^3z^2 \cos^2 \varphi m_1^2k^8 - \tag{3.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -216x^2z^2 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + 128xz^2 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 - 40x^2z \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + \\
& + 168xz \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 - 96z \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + 24x^2zm_1^2k^8 - 72xzm_1^2k^8 + \\
& + 32zm_1^2k^8 - 16x^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 64x^2 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 - \\
& - 32x \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 48x^3z \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 144x^2z \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 - \\
& - 288xz \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 128z \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 8x^3m_1^4k^6 - 72x^2m_1^4k^6 + \\
& + 8x^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + 88x^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - 64x \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - \\
& - 32x^3z \cos^2(\varphi)m_1^4k^6 - 256x^2z \cos^2(\varphi)m_1^4k^6 + \\
& + 416xz \cos^2(\varphi)m_1^4k^6 - 128z \cos^2(\varphi)m_1^4k^6 + 32xm_1^4k^6), \\
G_2 = & F_3^2(-8x^4z^6 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 8x^3z^6 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& - 8x^4z^5 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 40x^3z^5 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - 32x^2z^5 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& - 24x^2z^4 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 24xz^4 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 8x^2z^3 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& - 8xz^3 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 40x^4z^4 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 40x^3z^4 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + \\
& + 48x^4z^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 176x^3z^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + 128x^2z^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& - 32x^3z^2 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + 104x^2z^2 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 72xz^2 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& - 8x^4z^4 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 8x^3z^4 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - 16x^4z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + \\
& + 48x^3z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - 32x^2z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 16x^3z^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& - 40x^2z^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 24xz^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - 24x^4z^2 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 \\
& - - 40x^3z^2 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + 96x^2z^2 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - 32xz^2 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& - 40x^4z \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + 136x^3z \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - 96x^2z \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& + 16x^4z^2 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 - 16x^3z^2 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 + 16x^4z \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& - 48x^3z \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 + 32x^2z \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 + 24x^4 \cos^4 \varphi m_1^8 k^6 - \\
& - 24x^3 \cos^4 \varphi m_1^8 k^6 - 8x^4 \cos^2 \varphi m_1^8 k^6 + 8x^3 \cos^2 \varphi m_1^8 k^6) + \\
& + F_1F_3(-16x^4z^5m_1^2k^{12} + 16x^3z^5m_1^2k^{12} + 32x^3z^4m_1^2k^{12} - 32x^2z^4m_1^2k^{12} -
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
& -16x^2z^3m_1^2k^{12} + 16xz^3m_1^2k^{12} + 32x^4z^6\cos^2\varphi m_1^2k^{12} - \\
& + 32x^3z^6\cos^2\varphi m_1^2k^{12} + 48x^4z^5\cos^2\varphi m_1^2k^{12} - 176x^3z^5\cos^2\varphi m_1^2k^{12} + \\
& + 128x^2z^5\cos^2\varphi m_1^2k^{12} - 32x^3z^4\cos^2\varphi m_1^2k^{12} + 128x^2z^4\cos^2\varphi m_1^2k^{12} - \\
& - 96xz^4\cos^2\varphi m_1^2k^{12} - 16x^2z^3\cos^2\varphi m_1^2k^{12} + 16xz^3\cos^2\varphi m_1^2k^{12} + \\
& + 32x^4z^4m_1^4k^{10} - 32x^3z^4m_1^4k^{10} + 64x^4z^5\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - \\
& - 64x^3z^5\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + 96x^4z^4\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 224x^3z^4\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + \\
& + 128xz^4\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 256x^3z^3\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + 640x^2z^3\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - \\
& - 384xz^3\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + 64x^3z^2\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 160x^2z^2\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + \\
& + 96xz^2\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + 32x^4z^3m_1^4k^{10} - 96x^3z^3m_1^4k^{10} + 64x^2z^3m_1^4k^{10} - \\
& - 32x^3z^2m_1^4k^{10} + 64x^2z^2m_1^4k^{10} - 32xz^2m_1^4k^{10} - 64x^4z^5\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + \\
& + 64x^3z^5\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - 128x^4z^4\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 256x^3z^4\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - \\
& - 128x^2z^4\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - 32x^4z^3\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 224x^3z^3\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - \\
& - 192x^2z^3\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 32x^3z^2\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - 160x^2z^2\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + \\
& + 128xz^2\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 384x^4z^3\cos^4\varphi m_1^6k^8 - 1152x^3z^3\cos^4\varphi m_1^6k^8 + \\
& + 1024x^2z^3\cos^4\varphi m_1^6k^8 - 256xz^3\cos^4\varphi m_1^6k^8 + 64x^4z^2\cos^4\varphi m_1^6k^8 - \\
& - 448x^3z^2\cos^4\varphi m_1^6k^8 + 896x^2z^2\cos^4\varphi m_1^6k^8 - 512xz^2\cos^4\varphi m_1^6k^8 + \\
& + 64x^4z\cos^4\varphi m_1^6k^8 - 192x^3z\cos^4\varphi m_1^6k^8 + 128x^2z\cos^4\varphi m_1^6k^8 - \\
& - 64x^4z^2m_1^6k^8 + 64x^3z^2m_1^6k^8 - 128x^4z^3\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 384x^3z^3\cos^2\varphi m_1^6k^8 - \\
& - 256x^2z^3\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 32x^4z^2\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 352x^3z^2\cos^2\varphi m_1^6k^8 - \\
& - 768x^2z^2\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 384xz^2\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 48x^4z\cos^2\varphi m_1^6k^8 - \\
& - 240x^3z\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 192x^2z\cos^2\varphi m_1^6k^8 - 16x^4zm_1^6k^8 + 80x^3zm_1^6k^8 - \\
& - 64x^2zm_1^6k^8 + 32x^4m_1^8k^6 - 32x^4\cos^4\varphi m_1^8k^6 + 32x^3\cos^4\varphi m_1^8k^6 - \\
& - 192x^4z\cos^4\varphi m_1^8k^6 + 448x^3z\cos^4\varphi m_1^8k^6 - 256x^2z\cos^4\varphi m_1^8k^6 - \\
& - 32x^3m_1^8k^6 - 64x^4\cos^2\varphi m_1^8k^6 + 64x^3\cos^2\varphi m_1^8k^6 + 192x^4z\cos^2\varphi m_1^8k^6 - \\
& - 448x^3z\cos^2\varphi m_1^8k^6 + 256x^2z\cos^2\varphi m_1^8k^6).
\end{aligned}$$

$$\Delta E_{\Xi}^{hfs} = -\frac{4\alpha(Z\alpha)^5\mu^3}{n^3\pi^3m_2} \int_0^1 (1-z)dz \int_0^1 xdx \int kdk \times \int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(k^2 + 4\mu^{-2}\cos^2\varphi)} \left[\frac{A_{1,\Xi}}{\Delta} + \frac{A_{2,\Xi}}{\Delta^2} + \frac{A_{3,\Xi}}{\Delta^3} \right], \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} A_{1,\Xi} = & F_3^2(-12k^6x^2z^3\cos^4\varphi + 12k^6x^2z^3\cos^2\varphi + 18k^6xz^2\cos^4\varphi - \\ & -18k^6xz^2\cos^2\varphi - 6k^6z\cos^4\varphi + 6k^6z\cos^2\varphi - 12k^4m_1^2x^2z\cos^4\varphi + \\ & +12k^4m_1^2x^2z\cos^2\varphi + 44k^4m_1^2xz\cos^4\varphi - 44k^4m_1^2xz\cos^2\varphi - \\ & -6k^4m_1^2x\cos^4\varphi + 6k^4m_1^2x\cos^2\varphi - 20k^4m_1^2z\cos^4\varphi + \\ & +20k^4m_1^2z\cos^2\varphi) + F_1F_3(-48k^6x^2z^3 + 72k^6xz^2 - 24k^6z + \\ & +48k^4m_1^2x^2z - 24k^4m_1^2x), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} A_{2,\Xi} = & (4x^4z^7\cos^4\varphi k^{10} - 12x^3z^6\cos^4\varphi k^{10} + 12x^2z^5\cos^4\varphi k^{10} - \\ & -4xz^4\cos^4\varphi k^{10} - 4x^4z^7\cos^2\varphi k^{10} + 12x^3z^6\cos^2\varphi k^{10} - \\ & -12x^2z^5\cos^2\varphi k^{10} + 4xz^4\cos^2\varphi k^{10} + 16x^4z^5\cos^6\varphi m_1^2k^8 - \\ & -48x^3z^5\cos^6\varphi m_1^2k^8 + 32x^2z^5\cos^6\varphi m_1^2k^8 - \\ & -32x^3z^4\cos^6\varphi m_1^2k^8 + 96x^2z^4\cos^6\varphi m_1^2k^8 - \\ & -64xz^4\cos^6\varphi m_1^2k^8 + 16x^2z^3\cos^6\varphi m_1^2k^8 - 48xz^3\cos^6\varphi m_1^2k^8 + \\ & +32z^3\cos^6\varphi m_1^2k^8 - 20x^4z^5\cos^4\varphi m_1^2k^8 + 40x^3z^5\cos^4\varphi m_1^2k^8 - \\ & -24x^2z^5\cos^4\varphi m_1^2k^8 + 44x^3z^4\cos^4\varphi m_1^2k^8 - 72x^2z^4\cos^4\varphi m_1^2k^8 + \\ & +40xz^4\cos^4\varphi m_1^2k^8 - 28x^2z^3\cos^4\varphi m_1^2k^8 + 32xz^3\cos^4\varphi m_1^2k^8 - \\ & -16z^3\cos^4\varphi m_1^2k^8 + 4xz^2\cos^4\varphi m_1^2k^8 + 4x^4z^5\cos^2\varphi m_1^2k^8 + \\ & +8x^3z^5\cos^2\varphi m_1^2k^8 - 8x^2z^5\cos^2\varphi m_1^2k^8 - \\ & -12x^3z^4\cos^2\varphi m_1^2k^8 - 24x^2z^4\cos^2\varphi m_1^2k^8 + \\ & +24xz^4\cos^2\varphi m_1^2k^8 + 12x^2z^3\cos^2\varphi m_1^2k^8 + \\ & +16xz^3\cos^2\varphi m_1^2k^8 - 16z^3\cos^2\varphi m_1^2k^8 - \\ & -4xz^2\cos^2\varphi m_1^2k^8 + 16x^4z^3\cos^6\varphi m_1^4k^6 - \\ & -80x^3z^3\cos^6\varphi m_1^4k^6 + 128x^2z^3\cos^6\varphi m_1^4k^6 - \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
& -64xz^3 \cos^6 \varphi m_1^4 k^6 - 16x^2 z^2 \cos^6 \varphi m_1^4 k^6 + 16xz^2 \cos^6 \varphi m_1^4 k^6 - \\
& -20x^4 z^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 96x^3 z^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 - 144x^2 z^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + \\
& +64xz^3 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 - 4x^3 z^2 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 - 8x^2 z^2 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + \\
& +8xz^2 \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 8x^2 z \cos^4 \varphi m_1^4 k^6 + 4x^4 z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - \\
& -16x^3 z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + 16x^2 z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + 4x^3 z^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + \\
& +24x^2 z^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - 24xz^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - 8x^2 z \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + \\
& +4x^3 \cos^4 \varphi m_1^6 k^4 + 4x^4 z \cos^4 \varphi m_1^6 k^4 - 8x^3 z \cos^4 \varphi m_1^6 k^4 + \\
& +8x^2 z \cos^4 \varphi m_1^6 k^4 - 4x^3 \cos^2 \varphi m_1^6 k^4 - 4x^4 z \cos^2 \varphi m_1^6 k^4 + \\
& +8x^3 z \cos^2 \varphi m_1^6 k^4 - 8x^2 z \cos^2 \varphi m_1^6 k^4) F_3^2 + \\
& +F_3 F_1 (16x^4 z^7 k^{10} - 48x^3 z^6 k^{10} + 48x^2 z^5 k^{10} - 16xz^4 k^{10} - \\
& -48x^4 z^5 m_1^2 k^8 - 32x^3 z^5 m_1^2 k^8 + 48x^2 z^5 m_1^2 k^8 + \\
& +112x^3 z^4 m_1^2 k^8 + 64x^2 z^4 m_1^2 k^8 - 96xz^4 m_1^2 k^8 - \\
& -80x^2 z^3 m_1^2 k^8 - 32xz^3 m_1^2 k^8 + 48z^3 m_1^2 k^8 + \\
& +16xz^2 m_1^2 k^8 + 64x^4 z^5 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 - 192x^3 z^5 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + \\
& +128x^2 z^5 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 - 192x^3 z^4 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + 512x^2 z^4 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 - \\
& -320xz^4 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + 128x^2 z^3 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 - 320xz^3 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + \\
& +192z^3 \cos^2 \varphi m_1^2 k^8 + 48x^4 z^3 m_1^4 k^6 + 64x^3 z^3 m_1^4 k^6 - \\
& -96x^2 z^3 m_1^4 k^6 - 80x^3 z^2 m_1^4 k^6 - 64x^2 z^2 m_1^4 k^6 + 96xz^2 m_1^4 k^6 - \\
& -64x^4 z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + 320x^3 z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - 576x^2 z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + \\
& +512xz^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - 192z^3 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + 64x^3 z^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 - \\
& -192x^2 z^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + 128xz^2 \cos^2 \varphi m_1^4 k^6 + 32x^2 z m_1^4 k^6 + \\
& +16x^3 m_1^6 k^4 - 16x^4 z m_1^6 k^4 - 32x^3 z m_1^6 k^4 + 48x^2 z m_1^6 k^4), \\
& A_{3,\Xi} = F_3^2 (-16x^5 z^9 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} + 16x^4 z^9 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} + \\
& +64x^4 z^8 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} - 64x^3 z^8 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& -96x^3 z^7 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} + 96x^2 z^7 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} +
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
& +64x^2z^6 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} - 64xz^6 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} - 16xz^5 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} + \\
& +16z^5 \cos^6 \varphi m_1^2 k^{12} + 32x^5z^9 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - 32x^4z^9 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& -128x^4z^8 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 128x^3z^8 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 192x^3z^7 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& -192x^2z^7 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - 128x^2z^6 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + 128xz^6 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} + \\
& +32xz^5 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - 32z^5 \cos^4 \varphi m_1^2 k^{12} - 16x^5z^9 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} + \\
& +16x^4z^9 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} + 64x^4z^8 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} - 64x^3z^8 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& -96x^3z^7 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} + 96x^2z^7 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} + 64x^2z^6 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} - \\
& -64xz^6 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} - 16xz^5 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} + 16z^5 \cos^2 \varphi m_1^2 k^{12} + \\
& +192x^5z^7 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} - 576x^4z^7 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} + 576x^3z^7 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -192x^2z^7 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} - 384x^4z^6 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} + 1152x^3z^6 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -1152x^2z^6 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} + 384xz^6 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} + 192x^3z^5 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -576x^2z^5 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} + 576xz^5 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} - 192z^5 \cos^8 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -432x^5z^7 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} + 1296x^4z^7 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} - 1248x^3z^7 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} + \\
& +384x^2z^7 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} + 816x^4z^6 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} - 2544x^3z^6 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} + \\
& +2496x^2z^6 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} - 768xz^6 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} - 336x^3z^5 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} \\
& + + 1200x^2z^5 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} - 1248xz^5 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} + 384z^5 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -48x^2z^4 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} + 48xz^4 \cos^6 \varphi m_1^4 k^{10} + 288x^5z^7 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -864x^4z^7 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + 768x^3z^7 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 192x^2z^7 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -480x^4z^6 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + 1632x^3z^6 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 1536x^2z^6 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + \\
& +384xz^6 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + 96x^3z^5 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 672x^2z^5 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + \\
& +768xz^5 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 192z^5 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} + 96x^2z^4 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -96xz^4 \cos^4 \varphi m_1^4 k^{10} - 48x^5z^7 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 144x^4z^7 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -96x^3z^7 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 48x^4z^6 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - 240x^3z^6 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + \\
& +192x^2z^6 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 48x^3z^5 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 48x^2z^5 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - \\
& -96xz^5 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} - 48x^2z^4 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} + 48xz^4 \cos^2 \varphi m_1^4 k^{10} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -64x^5z^5 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 + 64x^4z^5 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 + 192x^3z^5 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& -320x^2z^5 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 + 128xz^5 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 + 192x^4z^4 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& -576x^3z^4 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 + 576x^2z^4 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 - 192xz^4 \cos^8 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& +272x^5z^5 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 - 464x^4z^5 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 - 192x^3z^5 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& +640x^2z^5 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 - 256xz^5 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 - 480x^4z^4 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& +1440x^3z^4 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 - 1344x^2z^4 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 + 384xz^4 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& -48x^3z^3 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 + 48x^2z^3 \cos^6 \varphi m_1^6 k^8 - 352x^5z^5 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& +736x^4z^5 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - 192x^3z^5 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - 320x^2z^5 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& +128xz^5 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + 384x^4z^4 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - 1152x^3z^4 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& +960x^2z^4 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - 192xz^4 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + 96x^3z^3 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& -96x^2z^3 \cos^4 \varphi m_1^6 k^8 + 144x^5z^5 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 - 336x^4z^5 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 + \\
& +192x^3z^5 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 - 96x^2z^5 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 + 288x^3z^4 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& -192x^2z^4 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 - 48x^3z^3 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 + 48x^2z^3 \cos^2 \varphi m_1^6 k^8 - \\
& -80x^5z^3 \cos^6 \varphi m_1^8 k^6 + 176x^4z^3 \cos^6 \varphi m_1^8 k^6 - 96x^3z^3 \cos^6 \varphi m_1^8 k^6 - \\
& -16x^4z^2 \cos^6 \varphi m_1^8 k^6 + 16x^3z^2 \cos^6 \varphi m_1^8 k^6 + 160x^5z^3 \cos^4 \varphi m_1^8 k^6 - \\
& -352x^4z^3 \cos^4 \varphi m_1^8 k^6 + 192x^3z^3 \cos^4 \varphi m_1^8 k^6 + 32x^4z^2 \cos^4 \varphi m_1^8 k^6 - \\
& -32x^3z^2 \cos^4 \varphi m_1^8 k^6 - 80x^5z^3 \cos^2 \varphi m_1^8 k^6 + 176x^4z^3 \cos^2 \varphi m_1^8 k^6 - \\
& -96x^3z^3 \cos^2 \varphi m_1^8 k^6 - 16x^4z^2 \cos^2 \varphi m_1^8 k^6 + 16x^3z^2 \cos^2 \varphi m_1^8 k^6) + \\
& +F_1F_3(64x^5z^9m_1^2k^{12} - 64x^4z^9m_1^2k^{12} - 256x^4z^8m_1^2k^{12} + 256x^3z^8m_1^2k^{12} + \\
& +384x^3z^7m_1^2k^{12} - 384x^2z^7m_1^2k^{12} - 256x^2z^6m_1^2k^{12} + 256xz^6m_1^2k^{12} + \\
& +64xz^5m_1^2k^{12} - 64z^5m_1^2k^{12} - 64x^5z^9 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} + 64x^4z^9 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} + \\
& +256x^4z^8 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} - 256x^3z^8 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} - 384x^3z^7 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} + \\
& +384x^2z^7 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} + 256x^2z^6 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} - 256xz^6 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} - \\
& -64xz^5 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} + 64z^5 \cos^2 \varphi m_1^2k^{12} - 192x^5z^7m_1^4k^{10} + 192x^4z^7m_1^4k^{10} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +576x^4z^6m_1^4k^{10} - 576x^3z^6m_1^4k^{10} - \\
& -576x^3z^5m_1^4k^{10} + 576x^2z^5m_1^4k^{10} + 192x^2z^4m_1^4k^{10} - \\
& -192x^4z^4m_1^4k^{10} + 768x^5z^7\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 2304x^4z^7\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + \\
& +2304x^3z^7\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 768x^2z^7\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 1536x^4z^6\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + \\
& +4608x^3z^6\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 4608x^2z^6\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + 1536xz^6\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + \\
& +768x^3z^5\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 2304x^2z^5\cos^4\varphi m_1^4k^{10} + 2304xz^5\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - \\
& -768z^5\cos^4\varphi m_1^4k^{10} - 576x^5z^7\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 2112x^4z^7\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - \\
& -2304x^3z^7\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 768x^2z^7\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 960x^4z^6\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - \\
& -4032x^3z^6\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 4608x^2z^6\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - 1536xz^6\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - \\
& -192x^3z^5\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 1728x^2z^5\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - 2304xz^5\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + \\
& +768z^5\cos^2\varphi m_1^4k^{10} - 192x^2z^4\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + 192xz^4\cos^2\varphi m_1^4k^{10} + \\
& +192x^5z^5m_1^6k^8 - 192x^4z^5m_1^6k^8 - 384x^4z^4m_1^6k^8 + \\
& +384x^3z^4m_1^6k^8 - 768x^5z^5\cos^4\varphi m_1^6k^8 + \\
& +2304x^4z^5\cos^4\varphi m_1^6k^8 - 2304x^3z^5\cos^4\varphi m_1^6k^8 + 768x^2z^5\cos^4\varphi m_1^6k^8 + \\
& +768x^4z^4\cos^4\varphi m_1^6k^8 - 2304x^3z^4\cos^4\varphi m_1^6k^8 + 2304x^2z^4\cos^4\varphi m_1^6k^8 - \\
& -768xz^4\cos^4\varphi m_1^6k^8 + 192x^3z^3m_1^6k^8 - 192x^2z^3m_1^6k^8 + 576x^5z^5\cos^2\varphi m_1^6k^8 - \\
& -2112x^4z^5\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 2304x^3z^5\cos^2\varphi m_1^6k^8 - 768x^2z^5\cos^2\varphi m_1^6k^8 - \\
& -384x^4z^4\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 1920x^3z^4\cos^2\varphi m_1^6k^8 - 2304x^2z^4\cos^2\varphi m_1^6k^8 + \\
& +768xz^4\cos^2\varphi m_1^6k^8 - 192x^3z^3\cos^2\varphi m_1^6k^8 + 192x^2z^3\cos^2\varphi m_1^6k^8 - \\
& -64x^5z^3m_1^8k^6 + 64x^4z^3m_1^8k^6 + 64x^4z^2m_1^8k^6 - 64x^3z^2m_1^8k^6 + 64x^5z^3\cos^2\varphi m_1^8k^6 - \\
& -64x^4z^3\cos^2\varphi m_1^8k^6 - 64x^4z^2\cos^2\varphi m_1^8k^6 + 64x^3z^2\cos^2\varphi m_1^8k^6).
\end{aligned}$$

Для численного расчета поправок мы используем современную параметризацию формфакторов дейтрона [95]. Численные значения радиационных поправок в лептонную линию к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре атома мюонного дейтерия с учетом эффектов отдачи равны: $\Delta E_{\Sigma}^{hfs} = 0.0015(0.0014)$ мэВ, $\Delta E_{\Xi}^{hfs} = -0.0012(-0.0011)$ мэВ,

$\Delta E_{\Lambda}^{hfs} = -0.0039(-0.0042)$ мэВ. В круглых скобках указаны значения поправок без учета эффектов отдачи.

Заключение

В данной работе на основе квазипотенциального подхода были вычислены КЭД поправки, поправки на структуру ядра и отдачу порядка α^5 и α^6 в сверхтонкой структуре $1S$, $2S$ и $2P$ состояний атома мюонного дейтерия а также радиационные поправки к двухфотонным обменным диаграммам в лэмбовском сдвиге атома мюонного дейтерия. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. В сверхтонкой структуре S-состояний мюонного дейтерия вычислены поправки порядка α^5 и α^6 . Мы учитываем однопетлевую и двухпетлевую электронную поляризацию вакуума и однопетлевую мюонную поляризацию вакуума в первом, втором и третьем порядках теории возмущений. Учтены также поправки на структуру ядра к двухфотонным обменным диаграммам с учетом отдачи и поправки на структуру ядра в однофотонном взаимодействии в первом и втором порядках теории возмущений. В отличие от более ранних исследований энергетического спектра мюонного дейтерия в наших вычислениях мы используем трехмерный квазипотенциальный метод. Численные значения рассчитанных нами поправок представлены в таблице 1.
2. В сверхтонкой структуре P-состояний мюонного дейтерия вычислены поправки на поляризацию вакуума и квадрупольное взаимодействие. Поправки на электронную и мюонную поляризацию вакуума порядка α^5 и α^6 представлены в виде суммы поправок соответствующего порядка в первом, втором и третьем порядках теории возмущений. Впервые была вычислена поправка на поляризацию вакуума в квадрупольном взаимодействии. Учтено большое число новых поправок, по сравнению с предыдущими вычислениями сверхтонкой структуры $2P$ -состояния мюонного дейтерия. Результаты расчета поправок представлены в таблицах 3, 4 и 5.

3. Были рассчитаны радиационные поправки к двухфотонным обменным амплитудам порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ в сверхтонкой структуре и лэмбовском сдвиге атома мюонного дейтерия с учетом структуры ядра. При вычислении поправок на структуру ядра мы используем технику проекционных операторов, что позволяет сразу перейти к применению различных систем аналитических вычислений. Для радиационных фотонов была выбрана калибровка Фрида — Йенни, что позволило получить конечные интегральные выражения для отдельных поправок. При численном расчете используется современная параметризация формфакторов дейтрона. Численные значения поправок представлены в таблицах 6 и 7.
4. Исследована сверхтонкая структура основного состояния мезомолекулярных ионов водорода на основе стохастического вариационного метода. Базисные функции выбраны в гауссовой форме, что позволило получить аналитические выражения для матричных элементов гамильтониана. Для численного расчета с использованием стохастического вариационного метода была написана программа на языке MATLAB. Получены численные результаты для энергии основного состояния, сверхтонкой структуры, поправок на поляризацию вакуума, релятивизм и структуру ядра мезомолекулярных ионов $pd\mu$, $tp\mu$, $td\mu$.

Полученные в данной работе численные значения для сверхтонких расщеплений $1S$, $2S$ и $2P$ состояний в атоме мюонного дейтерия являются надежной оценкой для анализа и сравнения с экспериментальными данными коллаборации CREMA.

Список литературы

1. *Lamb, W. E.* Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method / W. E. Lamb, R. C. Retherford // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 72. — P. 241–243.
2. *Bethe, H. A.* The electromagnetic shift of energy levels / H. A. Bethe // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 72. — P. 241–243.
3. *Eides, M. I.* Theory of light hydrogenlike atoms / M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto // *Phys. Rep.* — 2001. — Vol. 342. — P. 63–261.
4. *Karshenboim, S. G.* Precision physics of simple atoms: QED tests, nuclear structure and fundamental constants / S. G. Karshenboim // *Phys. Rep.* — 2005. — Vol. 422. — P. 1–63.
5. *Mohr, P. J.* CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010 / P. J. Mohr, B. N. Taylor, D. B. Newell // *Rev. Mod. Phys.* — 2012. — Vol. 84. — P. 1527–1605.
6. The size of the proton / R. Pohl [et al.] // *Nature.* — 2010. — Vol. 466. — P. 213–218.
7. Proton structure from the measurement of 2S-2P transition frequencies of muonic hydrogen / A. Antognini [et al.] // *Science.* — 2013. — Vol. 339. — P. 417–420.
8. *Jentschura, U. D.* Lamb shift in muonic hydrogen — I. Verification and update of theoretical predictions / U. D. Jentschura // *Ann. Phys.* — 2011. — Vol. 326. — P. 500–515.
9. *Jentschura, U. D.* Lamb shift in muonic hydrogen — II. Analysis of the discrepancy of theory and experiment / U. D. Jentschura // *Ann. Phys.* — 2011. — Vol. 326. — P. 516–533.

10. Muonic hydrogen and the proton radius puzzle / R. Pohl, R. Gilman, G. A. Miller, K. Pachucki // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2013. — Vol. 63. — P. 175–204.
11. Theory of the 2S-2P Lamb shift and 2S hyperfine splitting in muonic hydrogen / A. Antognini, R. Pohl, N. François, A. Fernando // Ann. Phys. — 2013. — Vol. 331. — P. 127–145.
12. Laser spectroscopy of muonic deuterium / R. Pohl [et al.] // Science. — 2016. — Vol. 353. — P. 669–673.
13. Laser spectroscopy of muonic atoms and ions / R. Pohl [et al.] // JPS Conf. Proc. — 2017. — Vol. 18. — P. 011021.
14. New precision measurement for proton Zemach radius with laser spectroscopy / Y. Ma [et al.] // International Journal of Modern Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 40. — P. 1660046.
15. Measurement of the proton Zemach radius from the hyperfine splitting in muonic hydrogen atom / S. Kanda [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 1138. — P. 012009.
16. Illuminating the proton radius conundrum: the μHe^+ Lamb shift / A. Antognini [et al.] // Canadian Journal of Physics. — 2011. — Vol. 89. — P. 47–57.
17. Deuteron charge radius and Rydberg constant from spectroscopy data in atomic deuterium / R. Pohl [et al.] // Metrologia. — 2017. — Vol. 54. — P. 1–10.
18. *Pohl, R.* Laser spectroscopy of muonic hydrogen and the puzzling proton / R. Pohl // Journal of the Physical Society of Japan. — 2016. — Vol. 85. — P. 091003.
19. The Rydberg constant and proton size from atomic hydrogen / A. Beyer [et al.] // Science. — 2017. — Vol. 358. — P. 79–85.

20. New measurement of the 1S — 3S transition frequency of hydrogen: contribution to the proton charge radius puzzle / H. Fleurbaey [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 120. — P. 183001.
21. Steps towards the hyperfine splitting measurement of the muonic hydrogen ground state: pulsed muon beam and detection system characterization / A. Adamczak [et al.] // Journal of Instrumentation. — 2016. — Vol. 11. — P. 5007—5007.
22. Theory of the n=2 levels in muonic deuterium / J. J. Krauth [et al.] // Annals of Physics. — 2016. — Vol. 366. — P. 168—196.
23. Nonrelativistic contributions of order $\alpha^5 m_\mu c^2$ to the Lamb shift in muonic hydrogen and deuterium, and in the muonic helium ion / S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, E. Y. Korzinin, V. A. Shelyuto // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 060501.
24. *Carlson, C. E.* Proton-structure corrections to hyperfine splitting in muonic hydrogen / C. E. Carlson, V. Nazaryan, K. Griffioen // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 83. — P. 042509.
25. *Indelicato, P.* Nonperturbative evaluation of some QED contributions to the muonic hydrogen $n = 2$ Lamb shift and hyperfine structure / P. Indelicato // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 87. — P. 022501.
26. *Peset, C.* The Lamb shift in muonic hydrogen and the proton radius from effective field theories / C. Peset, A. Pineda // The European Physical Journal A. — 2015. — Vol. 51. — P. 156.
27. Toward a resolution of the proton size puzzle / G. A. Miller, A. W. Thomas, J. D. Carroll, J. Rafelski // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 84. — P. 020101.
28. *Borie, E.* Lamb shift in light muonic atoms — Revisited / E. Borie // Ann. Phys. — 2012. — Vol. 327. — P. 733—763.
29. *Borie, E.* Lamb shift in light muonic atoms / E. Borie // Z. Phys. — 1975. — Vol. 275. — P. 347—349.

30. *Borie, E.* Hyperfine structure of light exotic atoms / E. Borie // *Z. Phys.* — 1976. — Vol. 278. — P. 127–131.
31. *Borie, E.* Lamb shift in muonic ${}^3\text{He}$ / E. Borie // *Z. Phys.* — 1980. — Vol. 297. — P. 17–18.
32. *Drake, G. W. F.* Lamb shifts and fine-structure splittings for the muonic ions $\mu^- - \text{Li}$, $\mu^- - \text{Be}$, and $\mu^- - \text{B}$: A proposed experiment / G. W. F. Drake, L. L. Byer // *Phys. Rev. A.* — 1985. — Vol. 32. — P. 713–719.
33. *Borie, E.* Improved calculation of the muonic-helium Lamb shift / E. Borie, G. A. Rinker // *Phys. Rev. A.* — 1978. — Vol. 18. — P. 324–327.
34. *Borie, E.* The energy levels of muonic atoms / E. Borie, G. A. Rinker // *Rev. Mod. Phys.* — 1982. — Vol. 54. — P. 67–118.
35. *Pachucki, K.* Theory of the Lamb shift in muonic hydrogen / K. Pachucki // *Phys. Rev. A.* — 1996. — Vol. 53. — P. 2092–2100.
36. Radiative nonrecoil nuclear finite size corrections of order $\alpha(Z\alpha)^5$ to the hyperfine splitting of S-states in muonic hydrogen / R. N. Faustov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, V. V. Sorokin // *Physics Letters B.* — 2014. — Vol. 733. — P. 354–358.
37. Hyperfine structure of S states in muonic deuterium / R. N. Faustov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, V. V. Sorokin // *Physical Review A.* — 2014. — Vol. 90. — P. 012520.
38. Hyperfine structure of P states in muonic deuterium / R. N. Faustov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, V. V. Sorokin // *Physical Review A.* — 2015. — Vol. 92. — P. 052512.
39. Nuclear radiative recoil corrections to the hyperfine structure of S-states in muonic hydrogen / R. N. Faustov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, V. V. Sorokin // *Physics of Particles and Nuclei.* — 2017. — Vol. 48. — P. 819–821.

40. Radiative nonrecoil nuclear finite size corrections of order $\alpha(Z\alpha)^5$ to the Lamb shift in light muonic atoms / R. N. Faustov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, V. V. Sorokin // *Physics Letters B*. — 2017. — Vol. 775. — P. 79–83.
41. *Martynenko, A. P.* Vacuum polarization and quadrupole corrections to the hyperfine splitting of P-states in muonic deuterium / A. P. Martynenko, V. V. Sorokin // *Journal of Physics B*. — 2017. — Vol. 50. — P. 045001.
42. Сверхтонкая структура S- и P-состояний мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, Г. А. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Фаустов // *Ядерная физика*. — 2016. — Т. 79. — С. 143.
43. Сверхтонкая структура S-состояний мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, Г. А. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Фаустов // *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2015. — Т. 19. — С. 474–488.
44. Bound states of $dt\mu$, $pd\mu$ and $tp\mu$ mesomolecules / A. V. Eskin, V. I. Korobov, A. P. Martynenko, V. V. Sorokin // *EPJ Web Conf.* — 2019. — Vol. 204. — P. 05006.
45. Тонкая и сверхтонкая структура спектра энергии мюонного дейтерия / А. А. Крутов, А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Шамсутдинов // Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения». — 2012.
46. Вращательные и колебательные спектры мезомолекул $pd\mu$, $pt\mu$, $dt\mu$ / В. И. Коробов, А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин, А. В. Эскин // XVI Всероссийский молодежный Самарский конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике: сборник трудов конференции, (Самара, 13–17 ноября 2018 г.) — М. : ФИАН им. П.Н. Лебедева, 2018. — С. 189–196.

47. Сверхтонкая структура основных состояний мезомолекул / В. И. Коробов, А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин, А. В. Эскин // XVI Всероссийский молодежный Самарский конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике: сборник трудов конференции, (Самара, 13–17 ноября 2018 г.) — М. : ФИАН им. П.Н. Лебедева, 2018. — С. 230—237.
48. *Мартыненко, А. П.* Сверхтонкая структура S-состояний мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин // 55-я научная конференция МФТИ. — 2012.
49. *Мартыненко, А. П.* Сверхтонкая структура мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Фаустов // Всероссийское совещание по прецизионной физике и фундаментальным физическим константам ФФК-2013. — 2013.
50. *Сорокин, В. В.* Сверхтонкая структура S-состояний мюонного водорода / В. В. Сорокин // XVIII международная научная конференция объединения молодых ученых и специалистов ОИЯИ (ОМУС). — 2014.
51. *Мартыненко, А. П.* Сверхтонкая структура мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин // XL Самарская областная студенческая научная конференция: тезисы докладов. — 2014.
52. Сверхтонкая структура S-состояний мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, Г. А. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Фаустов // Математическая физика и ее приложения: материалы четвертой международной конференции. — 2014.
53. Сверхтонкая структура мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, Г. А. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Фаустов // Физика фундаментальных взаимодействий: тезисы докладов международной сессии-конференции секции ядерной физики ОФН РАН. — 2014.

54. Сверхтонкая структура S- и P-состояний мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, Г. А. Мартыненко, В. В. Сорокин, Р. Н. Фаустов // Всероссийское совещание по прецизионной физике и фундаментальным физическим константам ФФК-2014. — 2014.
55. *Мартыненко, А. П.* Сверхтонкая структура P-состояний мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин // Национальная молодежная научная школа по современным методам исследований наносистем и материалов "Синхротронные и нейтронные исследования". — 2015.
56. *Мартыненко, А. П.* Поправки на поляризацию вакуума и квадрупольное взаимодействие в сверхтонкой структуре мюонного дейтерия / А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин // XXV Съезд по спектроскопии, Молодежная научная школа по оптике и спектроскопии. — 2016.
57. *Мартыненко, А. П.* Радиационные поправки на структуру ядра к двухфотонным обменным диаграммам в лэмбовском сдвиге мюонного водорода / А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин // Международная молодежная научная конференция "Королевские чтения". — 2017.
58. *Мартыненко, А. П.* Тонкое и сверхтонкое расщепление P-уровней энергии мюонного водорода / А. П. Мартыненко, В. В. Сорокин // XV Всероссийский молодежный Самарский конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике: сборник трудов конференции, 14–18 ноября 2017 г.) — М. : ФИАН им. П.Н. Лебедева, 2017. — С. 189–195.
59. *Salpeter, E. E.* A relativistic equation for bound-state problems / E. E. Salpeter, H. A. Bethe // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 84. — P. 1232–1242.
60. *Logunov, A. A.* Quasi-optical approach in quantum field theory / A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze // Il Nuovo Cimento. — 1963. — Vol. 29. — P. 380–399.

61. Quasipotential formalism for a system of two particles with spins 0 and 1/2 / V. A. Matveev, V. R. Garsevanishvili, S. V. Goloskokov, L. A. Slepchenko // Theoretical and Mathematical Physics. — 1972. — Vol. 12. — P. 899—903.
62. Фаустов, Р. Н. Уровни энергии и электромагнитные свойства водородоподобных атомов / Р. Н. Фаустов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1972. — Т. 3. — С. 238—268.
63. Берестецкий, В. Б. Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М. : Физматлит, 2002. — 720 с.
64. Martynenko, A. P. 2S Hyperfine splitting of muonic hydrogen / A. P. Martynenko // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 71. — P. 022506.
65. Martynenko, A. P. Lamb shift in the muonic deuterium atom / A. P. Martynenko, A. A. Krutov // Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 84. — P. 052514.
66. Мартыненко, А. П. Сверхтонкая структура основного состояния мюонного водорода / А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов // ЖЭТФ. — 2004. — Т. 125. — С. 48.
67. Мартыненко, А. П. Теория изотопического сдвига мюонный водород — мюонный дейтерий / А. П. Мартыненко // ЖЭТФ. — 2005. — Т. 128. — С. 1169.
68. Martynenko, A. P. Lamb shift in the muonic helium ion / A. P. Martynenko // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 76. — P. 012505.
69. Theory of the Lamb shift in muonic helium ions / A. A. Krutov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, R. N. Faustov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2015. — Vol. 120. — P. 73—90.
70. Energy spectra of muonic atoms in quantum electrodynamics / A. E. Dorokhov [et al.] // EPJ Web Conf. — 2019. — Vol. 204. — P. 05007.

71. The proton size puzzle: experiment vs theory. / A. E. Dorokhov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, A. E. Radzhabov // EPJ Web Conf. — 2018. — Vol. 191. — P. 04001.
72. Hyperfine structure of S states in muonic ions of lithium, beryllium, and boron / A. E. Dorokhov [et al.] // Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 98. — P. 042501.
73. *Двоеглазов, В. В.* Уровни энергии водородоподобных атомов и фундаментальные константы / В. В. Двоеглазов, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1994. — Т. 3. — С. 144—228.
74. *Соколов, А. А.* Квантовая механика / А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский. — М. : Наука, 1979. — 528 с.
75. *Dorokhov, A. E.* The muon $g-2$: retrospective and future / A. E. Dorokhov, A. E. Radzhabov, A. S. Zhevlakov // EPJ Web Conf. — 2016. — Vol. 125. — P. 02007.
76. *Dorokhov, A. E.* Past, present and future of the muon $g-2$ / A. E. Dorokhov, A. E. Radzhabov, A. S. Zhevlakov // International Journal of Modern Physics: Conference Series. — 2015. — Vol. 39. — P. 1560107.
77. *Broadhurst, D. J.* Analytical on-shell QED results: Three loop vacuum polarization, four loop Beta function and the muon anomaly / D. J. Broadhurst, A. L. Kataev, O. V. Tarasov // Phys. Lett. B. — 1993. — Vol. 298. — P. 445—452.
78. *Kataev, A. L.* The renormalization group inspired approaches and estimates of the tenth order corrections to the muon anomaly in QED / A. L. Kataev, V. V. Starshenko // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 52. — P. 402—409.

79. *Gorishnii, S. G.* The three loop QED contributions to the photon vacuum polarization function in the $\overline{\text{MS}}$ scheme and the four loop corrections to the QED beta function in the on-shell scheme / S. G. Gorishnii, A. L. Kataev, S. A. Larin // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 341. — P. 448.
80. *Мартыненко, А. П.* Поправки порядка $(Z\alpha)^6 m_e^2/m_\mu$ к тонкой структуре мюония / А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов // ЖЭТФ. — 1999. — Т. 112. — С. 1221—1235.
81. *Veitia, A.* Nuclear recoil effects in antiprotonic and muonic atoms / A. Veitia, K. Pachucki // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 69. — P. 042501.
82. *Källén, G.* Fourth order vacuum polarization / G. Källén, A. Sabry // Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med. — 1955. — Vol. 29. — P. 1—20.
83. *Rose, M. E.* Relativistic electron theory / M. E. Rose. — New York : John Wiley & Sons, 1961. — 302 p.
84. *Martynenko, A. P.* Contribution of hadronic vacuum polarization to hyperfine splitting in muonic hydrogen / A. P. Martynenko, R. N. Faustov // Physics of Atomic Nuclei. — 1998. — Vol. 61. — P. 471.
85. *Khriplovich, I. B.* Corrections to the deuterium hyperfine structure due to deuteron excitations / I. B. Khriplovich, A. I. Milstein // JETP. — 2004. — Vol. 125. — P. 205.
86. *Martynenko, A. P.* Nuclear-structure corrections to the energy spectra of ordinary and muonic deuterium / A. P. Martynenko, R. N. Faustov // Phys. Atom. Nucl. — 2004. — Vol. 67. — P. 457—463.
87. *Eides, M. I.* Weak-interaction contributions to hyperfine splitting and Lamb shift in light muonic atoms / M. I. Eides // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85. — P. 034503.
88. *Hameka, H. F.* On the Use of Green Functions in Atomic and Molecular Calculations. I. The Green Function of the Hydrogen Atom / H. F. Hameka // Journ. Chem. Phys. — 1967. — Vol. 47. — P. 2728—2735.

89. *Lakdawala, S. D.* Hyperfine structure in muonic helium / S. D. Lakdawala, P. J. Mohr // Phys. Rev. A. — 1980. — Vol. 22. — P. 1572—1575.
90. *Pachucki, K.* Nuclear structure corrections in muonic deuterium / K. Pachucki // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 193007.
91. *Исаев, П. С.* Дисперсионные соотношения и формфакторы элементарных частиц / П. С. Исаев // ЭЧАЯ. — 1971. — Т. 2. — С. 67—104.
92. *Mondéjar, J.* Radiative-nonrecoil corrections of order $\alpha^2(Z\alpha)E_F$ to the hyperfine splitting of muonium / J. Mondéjar, J. Piclum, A. Czarnecki // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 062511.
93. *Czarnecki, A.* Positronium hyperfine splitting: analytical value at $O(m\alpha^6)$ / A. Czarnecki, K. Melnikov, A. Yelkhovsky // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 82. — P. 311—314.
94. *Vermaseren, J. A. M.* New features of FORM [Электронный ресурс] / J. A. M. Vermaseren. — 2000. — URL: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0010025> (visited on 01/20/2019).
95. Phenomenology of the deuteron electromagnetic form factors / D. Abbott [et al.] // Eur. Phys. J. A. — 2000. — Vol. 7. — P. 421—427.
96. *Герштейн, С. С.* Мюонный катализ и ядерный бридинг / С. С. Герштейн, Ю. В. Петров, Л. И. Пономарев // УФН. — 1990. — Т. 160. — С. 3—46.
97. *Korobov, V. I.* Variational calculation of mesic molecule bound states with orbital momentum $J = 1$ and spatial parity $\lambda = +1$ / V. I. Korobov, S. I. Vinit-sky // Phys. Lett. B. — 1989. — Vol. 228. — P. 21—23.
98. *Korobov, V. I.* A variational calculation of weakly bound rotational-vibrational states of the mesic molecules $dd\mu$ and $dt\mu$ / V. I. Korobov, I. V. Puzynin, S. I. Vinit-sky // Phys. Lett. B. — 1987. — Vol. 196. — P. 272—276.

99. *Vinitskii, S. I.* Variational calculations of the energy levels of p-mesic molecules of hydrogen isotopes / S. I. Vinitskii, V. I. Korobov, P. I. V. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1986. — Vol. 91. — P. 705–714.
100. Energy levels of a helium atom / D. T. Aznabayev, A. K. Bekbaev, I. S. Ishmukhamedov, V. I. Korobov // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2015. — Vol. 12. — P. 689–694.
101. *Bakalov, D.* Hyperfine structure of antiprotonic helium energy levels / D. Bakalov, V. I. Korobov // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 57. — P. 1662–1667.
102. *Varga, K.* Stochastic variational approach to quantum mechanical few — body problems / K. Varga, Y. Suzuki. — Springer, 1998. — 314 p.
103. *Varga, K.* Solution of few — body problems with the stochastic variational method I. Central forces with zero orbital momentum / K. Varga, Y. Suzuki // Computer Physics Communications. — 1997. — Vol. 106. — P. 157–168.
104. *Varga, K.* Precise solution of few — body problems with the stochastic variational method on a correlated Gaussian basis / K. Varga, Y. Suzuki // Phys. Rev. C. — 1995. — Vol. 52. — P. 2885–2905.
105. *Frolov, A. M.* On the bound states in the muonic molecular ions / A. M. Frolov // Eur. Phys. J. D. — 2012. — Vol. 66. — P. 212–223.
106. *Frolov, A. M.* Bound state spectra of three-body muonic molecular ions / A. M. Frolov, D. M. Wardlaw // Eur. Phys. J. D. — 2011. — Vol. 63. — P. 339–350.
107. *Elekina, E. N.* Fine and hyperfine structure of the muonic ${}^3\text{He}$ ion / E. N. Elekina, A. P. Martynenko // Physics of Atomic Nuclei. — 2010. — Vol. 73. — P. 1828–1837.

108. *Martynenko, A. P.* Fine and hyperfine structure of P-wave levels in muonic hydrogen / A. P. Martynenko // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2008. — Vol. 71. — P. 125–135.
109. *Brodsky, S. J.* Precise theory of the Zeeman spectrum for atomic hydrogen and deuterium and the Lamb shift / S. J. Brodsky, R. G. Parsons // *Phys. Rev.* — 1967. — Vol. 163. — P. 134–146.
110. *Собельман, И. И.* Введение в теорию атомных спектров / И. И. Собельман. — М. : Физматлит, 1963. — 640 с.
111. *Фриш, С. Э.* Оптические спектры атомов / С. Э. Фриш. — М.: Физико-математическая литература, 1963. — 641 с.
112. *Зелевинский, В. Г.* Лекции по квантовой механике / В. Г. Зелевинский. — Новосибирск: Сибирское универ. изд-во, 2002. — 504 с.
113. *Hertel, I. V.* Atoms, Molecules and Optical Physics 1 / I. V. Hertel, C. P. Schulz. — Springer, 2015. — 689 p.
114. *Gordon, W. F. D.* Handbook Springer of Atomic, Molecular and Optical Physics / W. F. D. Gordon. — Springer, 2006. — 1506 p.
115. *Brink, D. M.* Angular momentum / D. M. Brink, G. R. Satchler. — Oxford University Press, 1968. — 161 p.
116. *Metzner, R.* Recoil corrections to the hyperfine splitting of exotic atoms / R. Metzner, H. Pilkuhn // *Z. Physik A*. — 1978. — Vol. 286. — P. 147–148.
117. *Pilkuhn, H.* The fine and hyperfine structure formulas for baryonic atoms / H. Pilkuhn // *Z. Physik A*. — 1976. — Vol. 276. — P. 365–366.
118. *Pavanello, M.* Determination of deuteron quadrupole moment from calculations of the electric field gradient in D₂ and HD / M. Pavanello, W. .-.C. Tung, L. Adamowicz // *Phys. Rev. A*. — 2010. — Vol. 81. — P. 042526.

119. *Каршенбойм, С. Г.* Полные аналитические результаты для радиационных поправок к отдаче в сверхтонком расщеплении основного состояния мюония / С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес // ЖЭТФ. — 1988. — Т. 94. — С. 42.
120. *Каршенбойм, С. Г.* Однопетлевые перенормировки и свойства радиационных поправок в калибровке Фрида—Йенни / С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес // Ядерная физика. — 1988. — Т. 47. — С. 454.
121. *Karshenboim, S. G.* Analytic results for radiative-recoil corrections in muonium / S. G. Karshenboim, V. A. Shelyuto, M. I. Eides // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1987. — Vol. 92. — P. 1188—1200.
122. *Karshenboim, S. G.* Complete analytic results for radiative-recoil corrections to ground-state muonium hyperfine splitting / S. G. Karshenboim, V. A. Shelyuto, M. I. Eides // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1988. — Vol. 94. — P. 42—50.
123. *Каршенбойм, С. Г.* Аналитические результаты для радиационных поправок к отдаче в мюонии / С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес // ЖЭТФ. — 1987. — Т. 42. — С. 1188—1200.
124. Fried-Yennie gauge recalculation of the electron line induced radiative-recoil corrections to muonium hyperfine splitting / V. Y. Brook, M. I. Eides, S. G. Karshenboim, V. A. Shelyuto // Physics Letters B. — 1987. — Vol. 216. — P. 401—404.
125. *Fried, H. M.* New techniques in the Lamb shift calculation / H. M. Fried, D. R. Yennie // Phys. Rev. — 1958. — Vol. 112. — P. 1391.
126. *Tomozawa, Y.* Note on the Fried-Yennie gauge / Y. Tomozawa // Annals of Physics. — 1980. — Vol. 128. — P. 491—500.
127. *Sapirstein, J. R.* Radiative-recoil corrections to muonium and positronium hyperfine splitting / J. R. Sapirstein, E. A. Terray, D. R. Yennie // Phys. Rev. D. — 1984. — Vol. 29. — P. 2290—2314.

128. *Eides, M. I.* Radiative-recoil corrections of order $\alpha(Z\alpha)^5(m/M)m$ to the Lamb shift revisited / M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto // Phys. Rev. A. — 2001. — Vol. 63. — P. 052509.
129. *Mertig, R.* Feyn Calc — Computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes / R. Mertig, M. Böhm, A. Denner // Comput. Phys. Commun. — 1991. — Vol. 64. — P. 345.
130. *Adkins, G. S.* Calculation of the electron magnetic moment in Fried-Yennie-gauge QED / G. S. Adkins // Phys. Rev. D. — 1989. — Vol. 39. — P. 3798.
131. *Eides, M. I.* One-loop electron vertex in Yennie gauge / M. I. Eides, V. A. Shelyuto // Eur. Phys. J. C. — 2001. — Vol. 21. — P. 489—494.
132. *Faustov, R. N.* Nuclear structure corrections in the energy spectra of electronic and muonic deuterium / R. N. Faustov, A. P. Martynenko // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 67. — P. 052506.
133. *Kroll, N. M.* Second-Order Radiative Corrections to Hyperfine Structure / N. M. Kroll, F. Pollock // Phys. Rev. — 1952. — Vol. 86. — P. 876.
134. *Karplus, R.* Electrodynamical Displacement of Atomic Energy Levels. II. Lamb Shift / R. Karplus, A. Klein, J. Schwinger // Phys. Rev. — 1952. — Vol. 86. — P. 288—301.
135. *Pachucki, K.* Radiative correction to the electron charge density in the hydrogen atom / K. Pachucki // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 48. — P. 120—128.
136. *Eides, M. I.* Radiative correction to the nuclear-size effect and hydrogen-deuterium isotopic shift / M. I. Eides, H. Grotch // Phys. Rev. A. — 1997. — Vol. 56. — P. 2507—2509.
137. *Milstein, A. I.* Radiative corrections and parity nonconservation in heavy atoms / A. I. Milstein, O. P. Sushkov, I. S. Terekhov // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89. — P. 283003.

138. *Milstein, A. I.* Calculation of radiative corrections to the effect of parity non-conservation in heavy atoms / A. I. Milstein, O. P. Sushkov, I. S. Terekhov // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67. — P. 062103.
139. *Pachucki, K.* $\alpha(Z\alpha)^2 E_F$ correction to hyperfine splitting in hydrogenic atoms / K. Pachucki // Phys. Rev. A. — 1996. — Vol. 54. — P. 1994–1998.
140. *Tomalak, O.* Forward two-photon exchange in elastic lepton–proton scattering and hyperfine-splitting correction / O. Tomalak // The European Physical Journal C. — 2017. — Vol. 77. — P. 517.
141. *Pachucki, K.* Radiative recoil correction to the Lamb shift / K. Pachucki // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 52. — P. 1079.
142. *Martynenko, A. P.* Theory of the Lamb shift in muonic deuterium / A. P. Martynenko, A. A. Krutov, R. N. Shamsutdinov // Physics of Atomic Nuclei. — 2014. — Vol. 77. — P. 786–794.
143. *Faustov, R. N.* Proton polarizability and Lamb shift in the muonic hydrogen atom / R. N. Faustov, A. P. Martynenko // Physics of Atomic Nuclei. — 2000. — Vol. 63. — P. 845–849.
144. *Faustov, R. N.* Effects of vacuum polarization and of proton polarizability in the Lamb shift of muonic hydrogen / R. N. Faustov, A. P. Martynenko // Physics of Atomic Nuclei. — 2001. — Vol. 64. — P. 1282–1287.
145. *Angeli, I.* Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update / I. Angeli, K. P. Marinova // Atomic Data and Nuclear Data Tables. — 2013. — Vol. 99. — P. 69–95.
146. Theory of the $n = 2$ levels in muonic helium-3 ions / B. Franke [et al.] // The European Physical Journal D. — 2017. — Vol. 71. — P. 341.
147. Theory of the Lamb shift and fine structure in muonic ${}^4\text{He}$ ions and the muonic ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ isotope shift / M. Diepold [et al.] // Annals of Physics. — 2018. — Vol. 396. — P. 220–244.

148. *Martynenko, A. P.* Proton-polarizability effect in the Lamb shift for the hydrogen atom / A. P. Martynenko // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2006. — Vol. 69. — P. 1309—1316.
149. *Rose, M. E.* Elementary theory of angular momentum / M. E. Rose. — New York : John Wiley & Sons, 1957. — 248 p.
150. *Лабзовский, Л. Н.* Теория атома. Квантовая электродинамика электронных оболочек и процессы излучения / Л. Н. Лабзовский. — М. : Физматлит, 1963. — 640 с.
151. *Исаев, А. П.* Теория групп и симметрий: Конечные группы. Группы и алгебры Ли / А. П. Исаев, В. А. Рубаков. — URSS, 2018. — 504 с.

Приложение А

Релятивистские поправки в сверхтонкой структуре S- и P-состояний

Так как для описания связанного состояния мы используем квазипотенциальное уравнение Логунова — Тавхелидзе в нерелятивистском приближении, необходимо учесть релятивистские поправки в сверхтонкой структуре атома мюонного дейтерия. Для вычисления релятивистских поправок воспользуемся теорией Дирака. Гамильтониан Дирака для частицы в центрально-симметричном поле имеет вид:

$$H = c\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}) + \beta m_0 c^2 + e\Phi. \quad (\text{A.1})$$

Член взаимодействия, дающий поправку в сверхтонкую структуру, учитывая $c = 1$, $e = -e_0$, равен:

$$\Delta H^{hfs} = e_0 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}. \quad (\text{A.2})$$

Рассмотрим ВП атом, состоящий из ядра и мюона. Обозначим $j = L + S$ полный момент импульса мюона, а $F = j + I$ - полный момент импульса системы мюон-ядро, где I -спин ядра. Волновая функция атома тогда имеет вид [83]:

$$\Psi_F^m = \sum_{\mu} C(IjF; m - \mu, \mu) \Phi_I^{m-\mu} \Psi_j^{\mu}, \quad (\text{A.3})$$

где m — проекция полного момента на ось z , μ — проекция полного момента мюона на ось z , $C(IjF; m - \mu, \mu)$ — коэффициент Клебша — Гордана сложения моментов I и j . Преобразуем гамильтониан, учитывая формулу для векторного потенциала ядра:

$$\Delta H^{hfs} = e_0 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A} = e_0 \boldsymbol{\alpha} \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3} = e_0 \boldsymbol{\mu} \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3}, \quad (\text{A.4})$$

где $\boldsymbol{\mu} = g_N \mu_N \mathbf{I}$ — магнитный момент ядра, μ_N — ядерный магнетон, g_N — гиромагнитный фактор. В первом порядке теории возмущений необходимо вычислить следующий матричный элемент [83]:

$$\begin{aligned} \Delta E = \langle j'IF | \Delta H^{hfs} | jIF \rangle &= e_0 g_N \mu_N \sum_{\mu\mu'} C(j'IF; \mu', m - \mu') \times \\ &\times C(jIF; \mu, m - \mu) \langle Im - \mu | I | Im - \mu' \rangle \langle j\mu | \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} | j\mu' \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Для вычисления данного матричного элемента рассмотрим вначале более общий случай, когда вместо конкретных выражений имеется скалярное произведение $(T^1 \cdot T^2) = \sum_q (-1)^q T_q^1 T_{-q}^2$ двух некоторых произвольных неприводимых тензорных оператора ранга 1. В этом случае матричный элемент имеет вид [149]:

$$\begin{aligned} \langle j'IF | (T^1 \cdot T^2) | jIF \rangle &= \sum_{q\mu\mu'} (-1)^q C(j'IF; \mu', m - \mu') \times \\ &\times C(jIF; \mu, m - \mu) \langle j'\mu' | T_q^1 | j\mu \rangle \langle Im - \mu' | T_{-q}^2 | Im - \mu \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Для дальнейших расчетов необходима теорема Эккарта — Вигнера [63]:

$$\langle j'm' | T_q^k | jm \rangle = (-1)^k \frac{\langle j' || T^k || j \rangle}{\sqrt{2J' + 1}} C(jk j'; -m, q, m'), \quad (\text{A.7})$$

где T_q^k — неприводимый тензорный оператор ранга k , $\langle j' || T^k || j \rangle$ — приведенный матричный элемент, $C(jk j'; -m, q, m')$ — коэффициент Клебша — Гордана. В результате из формулы (A.6) получим:

$$\begin{aligned} \langle j'IF | (T^1 \cdot T^2) | jIF \rangle &= \sum_{q\mu\mu'} (-1)^q C(j'IF; \mu', m - \mu') \times \\ &\times C(jIF; \mu, m - \mu) \frac{C(j1j'; \mu, q, \mu')}{\sqrt{(2J' + 1)}} \frac{C(I1I; m - \mu, -q, m - \mu')}{\sqrt{(2I + 1)}} \times \\ &\times \langle j' || T^1 || j \rangle \langle I || T^2 || I \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Далее необходимо принять в внимание соотношение [83]:

$$\begin{aligned} C(j1j'; \mu, \mu' - \mu) C(j'IF; \mu', m - \mu') &= \sqrt{2f + 1} \sqrt{2J' + 1} \times \\ &\times \sum_f W(j1FI; j'f) C(1If; \mu' - \mu, m - \mu') C(jfF; \mu, m - \mu). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Полагая $q = \mu' - \mu$ и принимая во внимание данное соотношение, получим:

$$\begin{aligned} \langle j'IF | (T^1 \cdot T^2) | jIF \rangle &= \sum_{\mu\mu'f} (-1)^{\mu'-\mu} \frac{\sqrt{2f+1}}{\sqrt{2I+1}} C(jIF; \mu, m-\mu) \times \\ &\times C(I1I; m-\mu, \mu-\mu') C(1If; \mu' - \mu, m-\mu') C(jfF; \mu, m-\mu) \times \\ &\times W(j1FI; j'f) \langle j' || T^1 || j \rangle \langle I || T^2 || I \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Из нормировки и симметрии коэффициентов Клебша — Гордана имеем следующее соотношение:

$$\sum_{\mu'} (-1)^{\mu'-\mu} C(I1I; m-\mu, \mu-\mu') C(1If; \mu' - \mu, m-\mu') = (-1)^1 \delta_{If}. \quad (\text{A.11})$$

Дельта — функция δ_{If} снимает сумму по f в исходном выражении, а оставшаяся сумма по μ равна единице. Коэффициент W-Рака представим в следующем виде:

$$W(j1FI; j'I) = (-1)^{-1-F+I+J'} W(jIj'I; F1). \quad (\text{A.12})$$

В итоге получаем общую формулу для матричного элемента от скалярного произведения двух неприводимых тензорных операторов ранга 1 [83; 149]:

$$\begin{aligned} \langle j'IF | (T^1 \cdot T^2) | jIF \rangle &= (-1)^{I+J'-F} W(jIj'I; F1) \langle j' || T^1 || j \rangle \times \\ &\times \langle I || T^2 || I \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Применяя данную формулу к матричному элементу от гамильтониана (A.2), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rel}^{hfs} &= e_0 g_N \mu_N (-1)^{I+J'-F} W(jIj'I; F1) \langle I || \mathbf{I} || I \rangle \times \\ &\times \left\langle j' \left\| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right\| j \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Формула (A.14) является общей формулой для расчета релятивистских поправок и справедлива для S и P состояний, причем как для диагональных, так и для недиагональных матричных элементов. Для расчета также важны формулы для вычисления приведенных матричных элементов:

$$\langle I || \mathbf{I} || I \rangle = \frac{\langle Im | I_z | Im \rangle}{\begin{pmatrix} I & 1 & I \\ -m & 0 & m \end{pmatrix}} (-1)^{I-m}, \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{pmatrix} I & 1 & I \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} = (-1)^{I-m} \frac{m}{\sqrt{(2I+1)(I+1)I}}, \langle Im | I_z | Im \rangle = m. \quad (\text{A.16})$$

Отсюда:

$$\langle I \| \mathbf{I} \| I \rangle = \sqrt{(2I+1)(I+1)I}. \quad (\text{A.17})$$

Для второго приведенного матричного элемента аналогично получаем:

$$\begin{aligned} \left\langle j' \left\| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right\| j \right\rangle &= \frac{\left\langle j' \mu \left| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right| j \mu \right\rangle}{\begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ -\mu & 0 & \mu \end{pmatrix}} (-1)^{j'-\mu} = \\ &= \frac{\left\langle j' \mu \left| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right| j \mu \right\rangle \sqrt{(2J'+1)(J'+1)J'}}{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

В результате формула (A.14) перейдет в формулу:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rel}^{hfs} &= e_0 g_N \mu_N (-1)^{I+J'-F} \sqrt{(2I+1)(I+1)I} \sqrt{(2J'+1)} \times \\ &\times \sqrt{(J'+1)J'} \times W(jIj'I; F1) \left\langle j' \mu \left| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right| j \mu \right\rangle \mu^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

В случае диагонального матричного элемента $j = j'$ и коэффициент W-Рака имеет вид [110]:

$$W(IjIj; F1) = (-1)^{I+J+F+1} \frac{I(I+1) + J(J+1) - F(F+1)}{2\sqrt{I(I+1)J(J+1)(2I+1)(2J+1)}}. \quad (\text{A.20})$$

Подставляя (A.20) в (A.19) и замечая $(-1)^{2I+2J+1} = -1$, получаем для диагонального матричного элемента:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rel}^{hfs} &= e_0 g_N \mu_N \frac{1}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)] \times \\ &\times \left\langle j \mu \left| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right| j \mu \right\rangle \mu^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Представим $\left\langle j \mu \left| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right| j \mu \right\rangle$ в виде:

$$\left\langle j \mu \left| \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]}{r^3} \right| j \mu \right\rangle = -i A_{kk} R_{kk}. \quad (\text{A.22})$$

Радиальный интеграл в случае диагонального элемента имеет вид:

$$R_{kk} = 2 \int_0^\infty g_k f_k. \quad (\text{A.23})$$

Угловая часть имеет вид:

$$-iA_{kk} = \frac{4k\mu}{4k^2 - 1}. \quad (\text{A.24})$$

Радиальные интегралы вычисляются при помощи явного вида радиальных волновых функций. Для S- и P-состояний они имеют следующий вид [150]:

$$g_{s1} = r^{\gamma_1-1} \left(\frac{2\alpha m_1}{N_1} \right)^{\gamma_1+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{e_1+1}{2\Gamma(2\gamma_1+1)}} e^{-\frac{\alpha m_1 r}{N_1}}, \quad (\text{A.25})$$

$$f_{s1} = -\sqrt{\frac{1-e_1}{e_1+1}} g_{s1}, \quad (\text{A.26})$$

$$g_{s2} = \left(\frac{2\alpha m_1}{N_2} \right)^{\gamma_1+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(e_2+1)(2\gamma_1+1)}{4(N_2-1)N_2\Gamma(2\gamma_1+1)}} e^{-\frac{\alpha m_1 r}{N_2}} r^{\gamma_1-1} \times \\ \times \left(-\frac{2r\alpha m_1(N_2+1)}{(2\gamma_1+1)N_2} + N_2 \right), \quad (\text{A.27})$$

$$f_{s2} = -\sqrt{\frac{1-e_2}{e_2+1}} \frac{(2\gamma_1+1)(N_2+2)N_2 - 2\alpha m_1(N_2+1)r}{(2\gamma_1+1)N_2^2 - 2\alpha m_1(N_2+1)r} g_{s2}, \quad (\text{A.28})$$

$$g_{p12} = \left(\frac{2\alpha m_1}{N_2} \right)^{\gamma_1+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(e_2+1)(2\gamma_1+1)}{4(N_2-1)N_2\Gamma(2\gamma_1+1)}} e^{-\frac{\alpha m_1 r}{N_2}} r^{\gamma_1-1} \times \\ \times \left(-\frac{2r\alpha m_1(N_2-1)}{(2\gamma_1+1)N_2} + N_2 - 2 \right), \quad (\text{A.29})$$

$$f_{p12} = -\sqrt{\frac{1-e_2}{e_2+1}} \frac{(2\gamma_1+1)N_2^2 - 2\alpha m_1(N_2-1)r}{(2\gamma_1+1)(N_2-2)N_2 - 2\alpha m_1(N_2-1)r} g_{p12}, \quad (\text{A.30})$$

$$g_{p32} = r^{\gamma_2-1} \sqrt{\frac{e_3+1}{2\Gamma(2\gamma_2+1)}} \left(\frac{2\alpha m_1}{N_3} \right)^{\gamma_2+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha m_1 r}{N_3}}, \quad (\text{A.31})$$

$$f_{p32} = -\sqrt{\frac{1-e_3}{e_3+1}} g_{p32}, \quad (\text{A.32})$$

где

$$\gamma_i = \sqrt{i^2 - \alpha^2}, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = \sqrt{2(1+\gamma_1)}, \quad N_3 = 2, \\ e_1 = m_1\gamma_1, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+(\alpha/(1+\gamma_1))^2}}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{1+(\alpha/\gamma_2)^2}}.$$

После аналитического интегрирования по r с использованием данных волновых функций и разложения по степеням α для радиальных интегралов получим [83]:

$$R_{-1}(1S_{1/2}) = -2(Z\alpha)^3 \left(1 + \frac{3}{2}(Z\alpha)^2 \right) m_1^2, \quad (\text{A.33})$$

$$R_{-1}(2S_{1/2}) = -\frac{(Z\alpha)^3}{4} \left(1 + \frac{17}{8}(Z\alpha)^2\right) m_1^2, \quad (\text{A.34})$$

$$R_1(2P_{1/2}) = \frac{(Z\alpha)^3}{12} \left(1 + \frac{47}{24}(Z\alpha)^2\right) m_1^2, \quad (\text{A.35})$$

$$R_{-2}(2P_{3/2}) = -\frac{(Z\alpha)^3}{24} \left(1 + \frac{7}{24}(Z\alpha)^2\right) m_1^2. \quad (\text{A.36})$$

В итоге получим формулы для релятивистских поправок к диагональным матричным элементам сверхтонкой структуры S- и P-состояний:

$$E_{rel}^{hfs}(1S) = \frac{2\alpha^6 \mu_d \mu^3}{m_1 m_p} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)], \quad (\text{A.37})$$

$$E_{rel}^{hfs}(2S) = \frac{\alpha^6 \mu_d \mu^3}{4m_1 m_p} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{17}{8} \times \frac{1}{3} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)], \quad (\text{A.38})$$

$$E_{rel}^{hfs}(2P_{1/2}) = \frac{\alpha^6 (1 + \kappa_d) \mu^3}{48m_1 m_2} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{47}{9} \times \frac{1}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)], \quad (\text{A.39})$$

$$E_{rel}^{hfs}(2P_{3/2}) = \frac{\alpha^6 (1 + \kappa_d) \mu^3}{48m_1 m_2} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{7}{45} \times \frac{1}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)]. \quad (\text{A.40})$$

При получении данных формул учтено, что $eg_N \mu_N = \frac{(1+\kappa_d)\alpha}{2m_2} = \frac{\mu_d \alpha}{2m_p}$. Подставляя соответствующие значения квантовых чисел получим релятивистские поправки для сверхтонких расщеплений 1S и 2S уровней и конкретных уровней сверхтонкой структуры 2P уровня атома мюонного дейтерия:

$$E_{rel}^{hfs}(1S) = \frac{3}{2} (Z\alpha)^2 \Delta E_F(1S) = 0.00393 \text{ мЭВ}, \quad (\text{A.41})$$

$$E_{rel}^{hfs}(2S) = \frac{17}{8} (Z\alpha)^2 \Delta E_F(2S) = 0.00070 \text{ мЭВ}, \quad (\text{A.42})$$

$${}^{F=1/2} E_{rel}^{hfs,rel}(2P_{1/2}) = -\frac{\alpha^6 (1 + \kappa_d) \mu^3}{48m_1 m_2} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{47}{9} = -0.00017 \text{ мЭВ}, \quad (\text{A.43})$$

$${}^{F=3/2} E_{rel}^{hfs,rel}(2P_{1/2}) = \frac{\alpha^6 (1 + \kappa_d) \mu^3}{48m_1 m_2} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{47}{18} = 0.00008 \text{ мЭВ}, \quad (\text{A.44})$$

$${}^{F=1/2} E_{rel}^{hfs,rel}(2P_{3/2}) = -\frac{\alpha^6 (1 + \kappa_d) \mu^3}{48m_1 m_2} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{7}{18} = -0.00001 \text{ мЭВ}, \quad (\text{A.45})$$

$${}^{F=3/2} E_{rel}^{hfs,rel}(2P_{3/2}) = -\frac{\alpha^6 (1 + \kappa_d) \mu^3}{48m_1 m_2} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{7}{45} = -5 \cdot 10^{-6} \text{ мЭВ}, \quad (\text{A.46})$$

$${}^{F=5/2} E_{rel}^{hfs,rel}(2P_{3/2}) = \frac{\alpha^6 (1 + \kappa_d) \mu^3}{48m_1 m_2} \frac{m_1^3}{\mu^3} \frac{7}{30} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ мЭВ}. \quad (\text{A.47})$$

Данные поправки имеют порядок α^6 . Для релятивистских поправок к S-состояниям мы опускаем фактор $\frac{m_1^3}{\mu^3}$, так как данная поправка на отдачу порядка α^6 содержится в двухфотонных обменных диаграммах.

Отдельно необходимо рассмотреть релятивистские поправки в недиагональных матричных элементах в сверхтонкой структуре P-состояний. Для их вычисления мы используем формулу (A.14). Радиальный интеграл в данном случае имеет вид:

$$R_{kk} = \int_0^\infty (g_{1/2}f_{3/2} + g_{3/2}f_{1/2}). \quad (\text{A.48})$$

Угловая часть имеет вид:

$$-iA_l = \frac{[(l + 1/2)^2 - \mu^2]^{1/2}}{2l + 1} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad (\text{A.49})$$

Радиальный интеграл вычисляется с использованием явного вида радиальных волновых функций (A.29)-(A.32). В результате получим следующие формулы для релятивистских поправок в недиагональных матричных элементах:

$$E_{rel, F=1/2}^{hfs, off-diag} = -\frac{\alpha^6(1 + \kappa_d)\mu^3 m_1^3 3\sqrt{2}}{48m_1 m_2 \mu^3 32} = -0.0043 \text{ meV}, \quad (\text{A.50})$$

$$E_{rel, F=3/2}^{hfs, off-diag} = -\frac{\alpha^6(1 + \kappa_d)\mu^3 m_1^3 3\sqrt{5}}{48m_1 m_2 \mu^3 32} = -0.0067 \text{ meV}. \quad (\text{A.51})$$

Представленные выше аналитические выражения дают вклад порядка α^6 в сверхтонкую структуру S- и P-состояний атома мюонного дейтерия.

Приложение Б

Тензорные операторы и теорема Вигнера — Эккарта

При расчете различных матричных элементов, возникающих в сверхтонкой структуре S- и P-состояний ВП атомов, удобно использовать формализм неприводимых тензорных операторов. Пусть T — конечномерное представление группы G в пространстве $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$. Выберем базис $\mathbf{e}_i (i = 1, \dots, n)$ в пространстве $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$. Тогда каждому элементу $g \in G$ в представлении T может быть сопоставлена матрица $n \times n$ с элементами $T_{ij}(g) \in \mathbb{K}$:

$$T(g) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j T_{ji}(g). \quad (\text{Б.1})$$

Если ρ — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве \mathcal{V} , то набор операторов $\{\hat{T}_i^{(T)}\} (i = 1, \dots, n)$, действующих в пространстве \mathcal{V} , называется тензорным оператором группы G в представлении T при условии:

$$\rho(g) \cdot \hat{T}_i^{(T)} \cdot \rho(g^{-1}) = T_{ij}(g) \hat{T}_j^{(T)}, \quad \forall g \in G. \quad (\text{Б.2})$$

Тензорный оператор $\{\hat{T}_i^{(T)}\}$ называется неприводимым, если неприводимо представление T . Если G — группа Ли и $\mathcal{A}(G)$ — алгебра Ли, то определение тензорного оператора на уровне алгебры Ли имеет вид [151]:

$$[\rho(A), \hat{T}_i^{(T)}] = T_{ij}(A) \hat{T}_j^{(T)}, \quad \forall A \in \mathcal{A}(G). \quad (\text{Б.3})$$

Рассмотрим неприводимый тензорный оператор $\{\hat{T}_m^j\} (m = -j, \dots, j - 1, j)$ группы $SU(2)$ в представлении $T^{(j)}$. Для такого неприводимого тензорного оператора можно записать следующие общие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\rho(\mathfrak{h}), \hat{T}_m^j] &= m \hat{T}_m^j, \\ [\rho(\hat{e}_\pm), \hat{T}_m^j] &= \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \hat{T}_{m\pm 1}^j, \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

где ρ — любое унитарное представление группы $SU(2)$, включающее в себя все конечномерные представления $T^{(j)}$. На основе этих общих соотношений

можно сформулировать часто используемое в квантовой механике определение неприводимого тензорного оператора: неприводимый тензорный оператор $\{\hat{T}_m^j\}$ ранга j представляет собой совокупность $(2j+1)$ операторов, удовлетворяющих следующим коммутационным соотношениям с операторами углового момента:

$$\begin{aligned} [J_z, \hat{T}_m^j] &= m\hat{T}_m^j, \\ [J_{\pm}, \hat{T}_m^j] &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hat{T}_{m \pm 1}^j. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Скалярное произведение двух неприводимых тензорных операторов может быть записано в следующем общем виде:

$$\text{T}(\hat{1})_m^j \cdot \text{T}(\hat{2})_m^j = \sum_{m=-j}^j (-1)^m \text{T}(\hat{1})_m^j \text{T}(\hat{2})_{-m}^j. \quad (\text{Б.6})$$

При вычислении матричных элементов от неприводимых тензорных операторов удобно использовать теорему Вигнера — Эккарта:

$$\langle n'j'm' | f_{kq} | njm \rangle = (-1)^{j_{\max} - m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \langle n'j' || f_k || nj \rangle, \quad (\text{Б.7})$$

где j_{\max} — наибольшее из чисел j и j' , $\langle n'j' || f_k || nj \rangle$ — приведенный матричный элемент, $\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}$ — 3j-символ. Данная теорема определяет зависимость матричного элемента от проекций моментов и позволяет исключить эту зависимость. Вычисление приведенных матричных элементов происходит через повторное применение для них теоремы Вигнера — Эккарта. Так как приведенные матричные элементы не содержат зависимости от проекций моментов и компоненты неприводимого тензорного оператора, при применении к ним теоремы Вигнера — Эккарта мы можем положить q и m , m' любыми в пределах разрешенных значений. Выбор q и m , m' обусловлен, как правило, простотой вычисления матричного элемента. Обратимся теперь к коэффициентам, возникающим при сложении угловых моментов в квантовой механике, и дадим определение 3j- и 6j-символам.

Для усреднения различных выражений, содержащих операторы момента импульса, используются различные соотношения, возникающие при сложении

двух и трех моментов импульса в квантовой механике. Рассмотрим вначале сложение двух моментов импульса j_1 и j_2 . Волновая функция системы с суммарным импульсом $j = j_1 + j_2$ выражается через волновые функции $\psi_{j_1 m_1}^{(1)}$ и $\psi_{j_2 m_2}^{(2)}$ следующим образом:

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1 m_2} C(j_1 m_1, j_2 m_2; jm) \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}, \quad m_2 = m - m_1, \quad (\text{Б.8})$$

где $C(j_1 m_1, j_2 m_2; jm)$ — коэффициент Клебша — Гордана. Данный коэффициент может быть также выражен через 3j-символы следующим образом:

$$C(j_1 m_1, j_2 m_2; jm) = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.9})$$

Коэффициенты Клебша — Гордана определяют преобразование от полной ортонормированной системы $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ волновых функций состояний $|m_1 m_2\rangle$ к системе волновых функций $|jm\rangle$ при определенных значениях j_1, j_2 . Коэффициенты Клебша — Гордана удовлетворяют соотношениям ортогональности в силу унитарности преобразования:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1, m_2} C(j_1 m_1, j_2 m_2; jm) C(j_1 m_1, j_2 m_2; j' m') = \\ & = (2j + 1) \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & -m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

$$\begin{aligned} & \sum_j C(j_1 m_1, j_2 m_2; jm) C(j_1 m'_1, j_2 m'_2; jm) = \\ & = \sum_j (2j + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m'_2 & -m \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Рассмотрим далее сложение трех моментов j_1, j_2 и j_3 в j . Переход от одной схемы сложения моментов к другой определяется следующим соотношением:

$$\Psi_{j_{23} JM} = \sum_{j_{12}} \langle j_{12} | j_{23} \rangle \Psi_{j_{12} JM}, \quad (\text{Б.12})$$

где

$$\langle j_{12} | j_{23} \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + J} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix}. \quad (\text{Б.13})$$

Коэффициенты, связывающие волновые функции двух схем сложения моментов, пропорциональны 6j-символам $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{matrix} \right\}$. 6j-символы также связаны с коэффициентами W Рака следующим образом:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5} W(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6). \quad (\text{Б.14})$$

В явном виде 6j-символы выражаются через 3j-символы следующим соотношением:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{\text{всем}} (-1)^{\Sigma_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \times \quad (\text{Б.15})$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Через введенные выше коэффициенты можно выразить различные матричные элементы от неприводимых тензорных операторов. Сначала запишем выражение для матричного элемента от скалярного произведения двух неприводимых тензорных операторов $T_k(1)$ и $T_k(2)$ ранга k :

$$\begin{aligned} \langle j'IF | (T_q^k(1) \cdot T_q^k(2)) | jIF \rangle &= (-1)^{I+J'-F} W(jIj'I; Fk) \times \\ &\times \langle j' || T^k(1) || j \rangle \langle I || T^k(2) || I \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Также при вычислении приведенных матричных элементов необходимы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\langle n'_1 j'_1 J' || f_k^{(1)} || n_1 j_1 J \rangle = \\ &= (-1)^{j_1 \max + j_2 + J_{\min} + k} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{matrix} j'_1 & J' & j_2 \\ J & j_1 & k \end{matrix} \right\} \langle n'_1 j'_1 || f_k^{(1)} || n_1 j_1 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

$$\begin{aligned} &\langle n'_2 j'_2 J' || \hat{f}_k^{(2)} || n_2 j_2 J \rangle = \\ &= (-1)^{j_1 + j_2 \min + J_{\max} + k} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{matrix} j'_2 & J' & j_1 \\ J & j_3 & k \end{matrix} \right\} \langle n'_2 j'_2 || f_k^{(2)} || n_2 j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.18})$$

Приведенные выше соотношения были использованы при вычислении релятивистских поправок, усреднения по угловым координатам при вычислении сверхтонкой структуры P-состояний и для расчета поправок на квадрупольное взаимодействие.

Приложение В

Кулоновская функция Грина

Различные задачи, связанные с ВП атомами, требуют знания явного вида функции Грина уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом или кулоновской функции Грина. В частности, такая необходимость возникает при вычислении различных поправок во втором и третьем порядках теории возмущений. Уравнение для функции Грина, которое соответствует уравнению Шредингера

$$(\hat{H} - E)\psi = 0, \quad (\text{В.1})$$

имеет вид

$$(\hat{H} - E)G_E(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{В.2})$$

Функцию Грина можно всегда представить в виде следующего спектрально-го разложения:

$$G_E(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \sum_i \frac{\psi_i^*(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}')}{E_i - E}, \quad (\text{В.3})$$

где суммирование идет по всему спектру. Из данного представления видно, что функция $G_E(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ является аналитической на комплексной плоскости энергии E и на вещественной оси имеет полюсы в точках, соответствующих уровням энергии E_i . Однако выражение (В.3) неудобно для вычислений и для практического применения интересна возможность получения замкнутого выражения для G_E . Для кулоновской задачи это возможно.

Для большинства практических приложений представляет интерес разложение G_E по парциальным волнам:

$$G_E(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \sum_{l, m_l} \frac{1}{r r'} G_{El}(r; r') Y_{lm_l}^*(\Omega) Y_{lm_l}(\Omega'). \quad (\text{В.4})$$

Для δ -функции разложение по парциальным волнам имеет вид:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{rr'} \delta(r - r') \sum_{l, m_l} Y_{lm_l}^*(\Omega) Y_{lm_l}(\Omega'). \quad (\text{B.5})$$

Подставим оба разложения в уравнение (B.2). Далее зависимость от угловых переменных может быть отделена и для радиальной функции Грина $G_{El}(r; r')$ имеем уравнение:

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{z}{r} - E \right] G_{El}(r; r') = \delta(r - r'). \quad (\text{B.6})$$

Стандартный метод нахождения функции Грина произвольного линейного уравнения второго порядка состоит в следующем. Рассмотрим вначале уравнение вида

$$\hat{L}(x)y(x) \equiv \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) - \lambda \right] y(x) = 0, \quad (\text{B.7})$$

которое удовлетворяет на концах промежутка x_1, x_2 однородным предельным условиям

$$\alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y'(x_1) = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\beta_1 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Соответствующее уравнения для функции Грина имеет вид:

$$\hat{L}(x)g(x; x') = \delta(x - x'). \quad (\text{B.10})$$

Его решение имеет вид:

$$g(x; x') = y_1(x_{<}) y_2(x_{>}), \quad (\text{B.11})$$

где $y_{1,2}(x)$ — линейно-независимые решения уравнения (B.7), при этом решение $y_1(x)$ удовлетворяет предельному условию (B.8), а решение $y_2(x)$ — условию (B.9). Обозначения $x_{<}, (x_{>}$ соответствуют меньшему или большему из аргументов x, x' . Нормировка функции Грина заключается в требовании, чтобы она удовлетворяла уравнению (B.10) при условии $x = x'$. Это требование дает следующее условие:

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = \frac{1}{p(x)}. \quad (\text{B.12})$$

В левой части условия стоит определитель Вронского (вронскиан) уравнения (В.7).

Вернемся к уравнению (В.6). Подстановка $r = x/(2\sqrt{-2E})$ приводит левую часть этого уравнения к уравнению Уиттекера:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[\frac{v}{x} + \frac{1/4 - \mu^2}{x^2} - \frac{1}{4} \right] u(x) = 0, \quad (\text{В.13})$$

где $v = Z/\sqrt{-2E}$, $\mu = l + 1/2$. Уравнение (В.13) решается на промежутке $0 \leq x \leq \infty$. Предельные условия состоят в конечности функции $u(x)$ при $x = 0$ и в обращении ее в нуль при $x \rightarrow \infty$. Линейно-независимыми решениями уравнения (В.13), которые удовлетворяют этим двум предельным условиям, являются функции Уиттекера $M_{v,\mu}(x)$ и $W_{v,\mu}(x)$ соответственно. Эти функции могут быть выражены через вырожденную гипергеометрическую функцию следующим образом:

$$M_{v,\mu}(x) = x^{\mu+1/2} e^{-x/2} F(\mu - v + 1/2, 2\mu + 1, x), \quad (\text{В.14})$$

$$W_{v,\mu}(x) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2 - \mu - v)} M_{v,\mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2 + \mu - v)} M_{v,-\mu}(x). \quad (\text{В.15})$$

Теперь вычислим вронскиан. Для уравнения (В.6) $p(x) = -1/2$, что говорит о том, что вронскиан не зависит от x и его можно вычислять при произвольном значении x . Удобнее всего положить $x = 0$. В результате получаем:

$$\begin{aligned} M_{v,\mu} \left(\frac{2Z}{v} r \right) \frac{d}{dr} W_{v,\mu} \left(\frac{2Z}{v} r \right) - W_{v,\mu} \left(\frac{2Z}{v} r \right) \frac{d}{dr} M_{v,\mu} \left(\frac{2Z}{v} r \right) = \\ = -\frac{2Z}{v} \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2+\mu-v)}. \end{aligned} \quad (\text{В.16})$$

Таким образом, окончательно для функции Грина $G_{El}(r; r')$ по общей формуле (В.11) имеем:

$$G_{El}(r; r') = \frac{v}{Z} \frac{\Gamma(l+1-v)}{\Gamma(2l+2)} M_{v,l+1,2} \left(\frac{2Z}{v} r_{<} \right) W_{v,l+1,2} \left(\frac{2Z}{v} r_{>} \right). \quad (\text{В.17})$$

Данное выражение имеет полюсы при целых значениях $v = n \geq l + 1$. Они возникают как полюсы функции $\Gamma(l + 1 - v)$.

Иногда удобнее рассматривать уравнение Шредингера не как уравнение на собственные значения, а как обобщенное уравнение Штурма — Лиувилля:

$$-\frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{l(l+1)}{2r^2} \Phi(r) - E\Phi(r) = \frac{Z}{r} \Phi(r). \quad (\text{В.18})$$

Энергия E при этом полагается фиксированной и ищутся значения параметра Z , для которых существует решение, удовлетворяющее граничным условиям. Собственные функции $\Phi_{Zl}(r)$ обобщенного уравнения Штурма — Лиувилля образуют полную систему, откуда следует, что по ним можно разложить любую функцию. Также нужно отметить что функции $\Phi_{Zl}(r)$ ортогональны с весом $1/r$:

$$\int_0^\infty \Phi_{Z_1 l}(r) \Phi_{Z_2 l}(r) r dr = \delta_{Z_1 Z_2}. \quad (\text{B.19})$$

Подстановками $\Phi_{Zl}(r) = (1/r)U_{Zl}(r)$ и $r = \rho/(2\sqrt{-2E})$ обобщенное уравнение Штурма — Лиувилля переходит в уравнение (B.13) для функций Уиттекера. Общее решение этого уравнение может быть представлено в виде:

$$\Phi_{Zl}(r) = \frac{c_1}{\rho} M_{v,\mu}(\rho) + \frac{c_2}{\rho} W_{v,\mu}(\rho). \quad (\text{B.20})$$

Условие ограниченности решения при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ дают $c_2 = 0$ и $\mu - v + 1/2 = -n_r$, откуда $Z \equiv Z_{nl} = (n_r + l + 1) \sqrt{-2E}$. Отсюда видно, что в случае связанных состояний ($E < 0$) обобщенное уравнение Штурма — Лиувилля имеет дискретный спектр Z . n_r — радиальное квантовое число, связанное с главным квантовым числом соотношением $n = n_r + l + 1$. Ортонормированные функции Штурма — Лиувилля имеют вид:

$$\Phi_{n_r l}(r) = \frac{1}{(2l + 1)!} \left[\frac{\Gamma(2l + n_r + 2)}{\Gamma(n_r + 1)} \right]^{1/2} \frac{1}{r} M_{n_r + l + 1, l + 1/2} \left(\frac{2\sqrt{-2E}}{Z} r \right). \quad (\text{B.21})$$

Такие функции удобны в качестве базиса для разложений, в которых отсутствует сплошной спектр. Разложим кулоновскую функцию Грина по штурмовским функциям:

$$G_{El}(r; r') = rr' \sum_{n_r=0}^{\infty} \frac{\Phi_{n_r l}(r) \Phi_{n_r l}(r')}{Z_{n_r l} - Z}. \quad (\text{B.22})$$

Это разложение можно также представить в другом виде, вводя функции

$$R_{nl} \left(\frac{2r}{v} \right) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{Z}{vn}} \frac{1}{(2l + 1)!} \sqrt{\frac{\Gamma(n + l + 1)}{\Gamma(n - l)}} M_{n, l + 1/2} \left(\frac{2r}{v} \right). \quad (\text{B.23})$$

Для кулоновской функции Грина имеем:

$$G_{El}(r; r') = rr' \frac{v^2}{Z^2} \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{n}{n - v} R_{nl} \left(\frac{2r}{v} \right) R_{nl} \left(\frac{2r'}{v} \right). \quad (\text{B.24})$$

Такая форма разложения особенно удобна для получения так называемой редуцированной кулоновской функции Грина, радиальная часть которой имеет вид:

$$\tilde{G}_{E_{nl}}(r; r') = \lim_{E \rightarrow E_n} \left[G_{El}(r; r') - rr' \frac{R_{nl}(r)R_{nl}(r')}{E_n - E} \right]. \quad (\text{B.25})$$

Редуцированная кулоновская функция Грина уже не является функцией E и соответствует конкретному связанному состоянию. Выпишем явный вид редуцированной кулоновской функции Грина для 1S, 2S и 2P состояний:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1S}(r, r') &= -\frac{Z\alpha\mu^2}{\pi} e^{-(x_1+x_2)} g_{1S}(x_1, x_2), \\ g_{1S}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2x_<} - \ln 2x_> - \ln 2x_< + Ei(2x_<) + \frac{7}{2} - 2C - \\ &\quad -(x_1 + x_2) + \frac{1 - e^{2x_<}}{2x_<}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{2S}(r, r') &= -\frac{Z\alpha\mu^2}{16\pi x_1 x_2} e^{-(x_1+x_2)} g_{2S}(x_1, x_2), \\ g_{2S}(x_1, x_2) &= 8x_< - 4x_<^2 + 8x_> + 12x_<x_> - 26x_<^2x_> + 2x_<^3x_> - \\ &\quad - 4x_>^2 - 26x_<x_>^2 + 23x_<^2x_>^2 - x_<^3x_>^2 + 2x_<x_>^3 - x_<^2x_>^3 + \\ &\quad + 4e^x(1 - x_<)(x_> - 2)x_> + 4(x_< - 2)x_<(x_> - 2)x_> [-2C + Ei(x_<) - \\ &\quad - \ln(x_<) - \ln(x_>)], \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

где $x_< = \min(x_1, x_2)$, $x_> = \max(x_1, x_2)$, $x_1 = Wr$, $x_2 = Wr'$; $Ei(x)$ — интегральная экспоненциальная функция.

$$\begin{aligned} G_{2P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{\mu^2(Z\alpha)}{36z^2z'^2} \left(\frac{3}{4\pi} \mathbf{nn}' \right) e^{-(z+z')/2} g(z, z'), \\ g(z, z') &= 24z_<^3 + 36z_<^3z_> + 36z_<^3z_>^2 + 24z_>^3 + 36z_<z_>^3 + 36z_<^2z_>^3 + \\ &\quad + 49z_<^3z_>^3 - 3z_<^4z_>^3 - 12e^{z_<}(2 + z_< + z_<^2)z_>^3 - 3z_<^3z_>^4 + \\ &\quad + 12z_<^3z_>^3 [-2C + Ei(z_<) - \ln z_< - \ln z_>], \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

где $C = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера, $z = Wr$, $z_< = \min(z, z')$, $z_> = \max(z, z')$.