

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ворончихин Илья Вячеславович

**Рождение медиаторов темной материи
в экспериментах с фиксированной мишенью**

Специальность 1.3.3. — Теоретическая физика

*Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Кирпичников Дмитрий Викторович

Москва — 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Темная материя	15
1.1 Экспериментальные свидетельства	15
1.1.1 Кривые вращения.....	15
1.1.2 Крупномасштабная структура Вселенной	17
1.1.3 Гравитационное линзирование	18
1.1.4 Космическое микроволновое излучение	21
1.2 Современное космологическое представление	23
1.2.1 Уравнение Фридмана.....	23
1.2.2 Термодинамические параметры и эффективные степени свободы	25
1.2.3 Термальная история темной материи	29
1.3 Модели медиаторов скрытого сектора.....	36
1.3.1 Скалярный медиатор.....	36
1.3.2 Тензорный медиатор.....	37
 Глава 2. Рождение медиатора скрытого сектора	
в экспериментах с фиксированной мишенью	43
2.1 Сечение рождения медиатора в поле ядра	43
2.1.1 Матричные элементы.....	44
2.1.2 Излучение медиатора на древесном уровне.....	50
2.1.3 Излучение медиатора в методе Вайцеккера-Вильямса	53
2.2 Сечение аннигиляции через медиатор	61
2.2.1 Аннигиляция в темную материю через медиатор.....	62
2.2.2 Аннигиляция в лептон-антилептонную пару через медиатор.	64
 Глава 3. Ограничения на параметры темной материи	
из экспериментов с фиксированной мишенью	67
3.1 Лептонные эксперименты по поиску темной материи	67
3.1.1 Эксперименты с фиксированной мишенью	68
3.1.2 Коллайдерные эксперименты.....	75
3.2 Сечение излучения медиаторов скрытого сектора	75
3.2.1 Дифференциальное сечение рождения медиаторов в поле ядра	76

3.2.2	Полное сечение рождения медиаторов в поле ядра	81
3.3	Реликтовая плотность темной материи	85
3.3.1	Скалярный медиатор	85
3.4	Ограничения на константу взаимодействия	87
3.4.1	Ограничения для скалярного медиатора	90
3.4.2	Ограничения для тензорного медиатора	92
Заключение		97
Приложение А. Выражения для сечений и матричных		
	элементов	100
A.1	Матричные элементы, ширины и сечения	100
A.1.1	Матричные элементы	100
A.1.2	Ширины распада	106
A.1.3	Сечения рождения медиатора при рассеянии электрона в поле ядра	107
A.1.4	Сечения аннигиляции через медиатор	107
A.1.5	Интегралы в методе Вайцзеккера-Вильямса	109
Список литературы		112

Введение

Степень разработанности темы исследования

Наиболее успешной моделью для описания природы частиц является Стандартная модель [1], которая позволяет структурировать взаимодействия и фундаментальные частицы [2]. Однако, Стандартная модель не полностью объясняет все явления, в частности, ускоренное расширение и массовый состав Вселенной [3; 4]. Первые идеи о необходимости введения дополнительной невидимой компоненты материи во Вселенной возникли в 1930-х годах [5] при наблюдении слишком большой дисперсии скоростей галактик в скоплении. Далее, эти идеи окончательно стали частью фундаментальной физики в 1970-х [6] после анализа вращательных свойств объектов в галактиках с широким диапазоном светимости. Кроме того, изучение гравитационного линзирования позволило обнаружить дополнительные эффекты, в частности, то что частицы темной материи достаточно слабо взаимодействуют друг с другом при столкновении двух скоплений [7; 8]. Также, темная материя является важной составляющей для описания крупномасштабной структуры Вселенной [9; 10] и спектра фонового реликтового излучения [11; 12], что, в частности, мотивирует разработку моделей новой физики для тестирования таких сценариев в наземных экспериментах.

Космологическая модель строится на основе уравнения Эйнштейна, которое, в свою очередь, связывает геометрию пространства и содержимое в этом пространстве. Для получения решений уравнения Эйнштейна используются дополнительные условия на метрику из симметрий, в частности, можно использовать не противоречащие наблюдениям симметрии однородности и изотропности пространства на космологических масштабах [13]. Также стоит упомянуть, что согласно наблюдениям Вселенная расширяется по закону Хаббла [3]. В этом случае можно получить соответствующие уравнения Фридмана, которые описывают однородную, изотропную и расширяющуюся Вселенную. На текущий момент стандартным способом описания эволюции Вселенной является модель Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter) [14], где рассматривается холодная темная материя, т.е. частицы темного сектора являются нерелятивистскими,

во Фридмановской Вселенной, а ее ускоренное расширение описывается космологической постоянной [15]. Также стоит отметить, что модель Λ CDM может быть дополнена теорией инфляции [16–18], т. е. экспоненциальным расширением Вселенной в некоторый период времени [19; 20], что позволяет воспроизвести ее крупномасштабную структуру.

Предположение, что темная материя достигает теплового равновесия с частицами видимого сектора в ранней Вселенной, позволяет определить характерную область в пространстве параметров моделей темной материи. Действительно, в этом случае можно построить соответствующие кривые реликтовой плотности темной материи, которые отражают зависимость константы взаимодействия медиатора с частицами Стандартной модели от массы медиатора при наблюдаемой в настоящий момент плотности темной материи во Вселенной [21]. Далее, под термином реликтовые кривые (кривые реликтовой плотности или термальная мишень) темной материи мы будем понимать зависимость, описанную выше. Однако, существующие ограничения из прямого поиска [22–24] и из данных Большого адронного коллайдера [25] мотивируют исследования в области легкой термальной темной материи с массами меньше $\mathcal{O}(1)$ ГэВ. Для исследования параметров в таких областях масс, эксперименты с фиксированной мишенью, обладающие высокой интенсивностью пучка частиц, имеют неплохой потенциал [26].

Для того чтобы теоретические расчеты реликтовой плотности темной материи не противоречили наблюдениям [27–29], можно ввести новые порталные взаимодействия, где через медиатор темной материи может происходить взаимодействие видимого и темного секторов. В литературе рассматривается механизм получения наблюдаемой плотности темной материи через процесс *вымораживания* (freeze-out) [29]. В этом случае предполагается, что частицы темной материи аннигилируют в частицы Стандартной модели через медиатор. В частности, в качестве медиаторов темной материи используются новые гипотетические массивные частицы такие как: скаляр [30; 31], вектор [32; 33], псевдоскаляр [34; 35] тензорный медиатор [36; 37] и фермион [38; 39]. Кроме того, также рассматриваются модели миллизаряженной [21; 40; 41] и дипольной [42; 43] связи, где в качестве медиатора может выступать фотон Стандартной модели. Также стоит подчеркнуть, что отсутствие подавления по скорости

в полном сечении s -волновой аннигиляции легкой темной материи через медиатор приводит к значительным ограничениям из космического микроволнового излучения [4; 12].

Другой способ возникновения наблюдаемой плотности темной материи возможен через механизм *вмерзания* (freeze-in) [44]. В этом случае предполагается, что частицы Стандартной модели аннигилируют в частицы темной материи через медиатор. В этом случае плотность частиц темной материи увеличивается за счет достаточно слабых взаимодействий медиаторов с термальной компонентой частиц Стандартной модели [21]. Отметим, что можно также предположить существование моделей со сверхтяжелой темной материей, массы которой на несколько порядков меньше планковской массы. Однако, согласно наблюдаемой плотности темной материи, данный тип частиц не может иметь термальный контакт с видимой материей в ранней Вселенной [45]. Кроме того, из-за большого времени жизни таких частиц, обнаружение данного типа темной материи в прямых экспериментах достаточно осложнено [46; 47].

Поиск медиаторов в области масс легкой темной материи в характерном интервале $\mathcal{O}(1)$ МэВ до $\mathcal{O}(1)$ ГэВ хорошо мотивирован для экспериментов с фиксированной мишенью из-за комбинирования преимуществ высоких интенсивностей и достаточно большой энергии налетающего на мишень пучка заряженных лептонов ($l = e, \mu$) [48]. Отметим, что для описания рождения медиатора темной материи при торможении высокоэнергетического лептона в поле тяжелого покоящегося ядра удобно использовать приближение Вайцзеккера-Вильямса [49–52]. Метод Вайцзеккера-Вильямса, с точностью на уровне $\lesssim \mathcal{O}(10)\%$ относительно прямых расчетов на древесном уровне, позволяет описать рождение медиатора в поле ядра в экспериментах с фиксированной мишенью [53; 54]. Электромагнитное взаимодействие налетающих частиц с адронами можно описать с помощью параметризации вершины через форм-факторы ядер [55].

В общем случае, сечение рождения медиатора при рассеянии заряженного лептона на ядре складывается из упругой и неупругой компоненты сечения [50; 51; 53]. Неупругий вклад пропорционален заряду ядра Z и подавляется относительно упругого вклада в Z раз, т.е. для тяжелых ядер мишени с $Z \propto \mathcal{O}(100)$ неупругим вкладом можно пренебречь [54]. В данном исследовании будет ис-

пользовано приближение Вайцеккера-Вильямса для вычисления тормозного сигнала рождения медиаторов, $l + N \rightarrow l + N + \text{MED} (\rightarrow \text{DM} + \text{DM})$ как в существующих (NA64e и NA64 μ), так и в планируемых экспериментах с фиксированной мишенью (LDMX и M³).

Следует также отметить, что при падении высокоэнергетического электрона на мишень, существует дополнительный канал аннигиляции вторичных позитронов электромагнитного ливня на атомных электронах в темную материю, $e^+e^- \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM} + \text{DM}$ [56; 57]. Данный канал может приводить к заметному усилению чувствительности экспериментов с фиксированной мишенью в узкой области пространства параметров моделей легкой темной материи.

Отсутствие сигнала рождения темной материи как в тормозном, так и в аннигиляционном канале, позволяет получить ограничения на параметры модели темной материи с медиаторами в существующих экспериментах, либо оценить чувствительность к ее поиску в планируемых установках с фиксированной мишенью.

Актуальность исследования

При исследовании динамики астрофизических объектов возникли противоречия между наблюдениями и теоретическими предсказаниями их поведения в гравитационно-обусловленных явлениях. Это расхождение привело к необходимости разработки сценариев новой физики за рамками Стандартной модели. Разрешение полученного несоответствия возможно с помощью введения скрытой доминирующей материальной компоненты Вселенной – темной материи, идея которой в текущий момент является превалирующей над другими подходами, в частности, модификации ньютоновской теории гравитации. В частности, такое положение дел приводит к тому, что астрофизические свидетельства темной материи дают оценку ее плотности во Вселенной из ее влияния на видимую материю, но данные наблюдения не конкретизируют тип частиц темной материи. Пространство параметров моделей частиц темной материи достаточно велико, поэтому, как правило, при исследовании моделей темного сектора, приходится работать с фиксированным набором переменных (спин, масса, констан-

та связи или тип медиатора), описывающих взаимодействие темной материи и видимого сектора.

Отсутствие сигнальных событий, подтверждающих обнаружение частиц темной материи на установках по прямому их поиску и в столкновительных экспериментах на Большом адронном коллайдере [25], мотивирует исследование пространства параметров моделей скрытого сектора в других экспериментах. Среди экспериментов по прямому поиску темной материи можно выделить такие установки как DAMA [58], CDMS [59], XENON1T [60], PANDAX-4T [61] и др.

Для исследования пространства параметров моделей легкой термальной темной материи и ее медиаторов для масс $\lesssim \mathcal{O}(1)$ ГэВ эксперименты с фиксированной мишенью могут являться надежным дополнением к установкам по прямому поиску темной материи [25]. Получение ограничений в пространстве параметров легкой термальной темной материи из проводимых в настоящее время (NA64e [62] и NA64 μ [63]) и планируемых экспериментов (LDMX [21] и M³ [64]) с фиксированной мишенью является значимым и актуальным направлением фундаментальной физики, а именно Стандартной модели фундаментальных взаимодействий элементарных частиц и ее расширений, обусловленные проблемой темной материи. Объектом исследования является пространство параметров моделей частиц скрытого сектора, а предметом исследования рождение медиаторов темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью.

Цели и задачи работы.

Целью данного диссертационного исследования является получение ограничений на пространство параметров моделей темной материи в предположении отсутствия сигнальных событий рождения медиаторов темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью. Данная цель разбивается на следующие задачи.

1. Получить ограничения на константу взаимодействия лептона и тензорного медиатора при торможении заряженного лептона в поле тяжелых ядер фиксированной мишени для различных моделей форм-факторов [65].

2. Найти ограничения на константу взаимодействия скалярного и тензорного медиаторов с электроном при аннигиляции вторичных позитронов в мишени для электронного и позитронного первичных пучков для различных типов темной материи [66].
3. Получить зависимость константы взаимодействия скалярного медиатора с электроном от массы медиатора для наблюдаемой в настоящий момент плотности темной материи во Вселенной для дираковской, майорановской, скалярной и векторной термальной темной материи [67]. Оценить чувствительность экспериментов NA64e и LDMX в области параметров моделей соответствующих типов частиц темной материи.

Методика исследования

При выполнении диссертационной работы использовались методы современной теоретической физики, в частности, квантовой теории и космологии для получения сечений соответствующих процессов и для расчета кривых реликтовой плотности темной материи. В данной работе используются гипотеза о существовании легкой термальной темной материи и медиаторов различного спина, которые связывают ее с видимым сектором Стандартной Модели. На основе предположения об отсутствии сигнальных событий наблюдения темной материи в планируемых и проводимых в настоящее время экспериментах с фиксированной мишенью, получены ограничения на пространство параметров темной материи и оценена перспектива таких экспериментов обнаружить темную материю. Результаты, представленные в работе, получены путем численных вычислений и аналитических расчетов сечений с использованием программы Wolfram Mathematica и ее пакета FeynCalc, соответственно.

Положения, выносимые на защиту

1. Оценена чувствительность проводимых в настоящее время лептонных экспериментов с фиксированной мишенью для поиска моделей с тензорным медиатором скрытого сектора в предположении отсутствия сигнальных событий для данных установок при торможении высокоэнергетического заряженного лептона в поле тяжелого ядра. В част-

ности, показано, что эксперимент NA64e при достижении планируемой статистики в 5×10^{12} электронов, накопленных на мишени, может быть чувствителен к поискам тензорного медиатора с константой взаимодействия в диапазоне $c_{ee}^G \gtrsim 1.4 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$ для масс $200 \text{ МэВ} \lesssim m_G \lesssim 1 \text{ ГэВ}$ на уровне достоверности 90 % С. Л.. Также, эксперимент NA64 μ позволит ограничить константу взаимодействия тензорного медиатора и мюона на уровне достоверности 90 % С. Л. в диапазоне $c_{\mu\mu}^G \gtrsim 1.15 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$ для аналогичного интервала масс при планируемой статистике в 5×10^{13} мюонов, накопленных на мишени. В расчетах предполагалось, что тензорный медиатор распадается в основном канале на частицы скрытого сектора.

2. Для экспериментов NA64e и LDMX получены чувствительности в пространстве параметров моделей с тензорным медиатором темной материи на основе процессов резонансной аннигиляции вторичных позитронов электромагнитного ливня на атомарных электронах мишени для различных типов легкой темной материи. Соответствующее резонансное усиление чувствительности для NA64e и LDMX происходит в диапазоне масс $0.23 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{МЭД}} \lesssim 0.32 \text{ ГэВ}$ и $0.11 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{МЭД}} \lesssim 0.13 \text{ ГэВ}$, соответственно. Для константы взаимодействия тензорного медиатора с темной материей было выбрано значение $c_{\text{DM DM}}^G \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$.
3. Изучено влияние выбора существующих моделей параметризации упругих атомных форм-факторов на величину сечения рождения тензорного медиатора в поле ядра в приближении Вайцзеккера-Вильямса для диапазона масс $1 \text{ МэВ} \lesssim m_{\text{МЭД}} \lesssim 1 \text{ ГэВ}$. В частности, для проводимых в настоящее время экспериментов NA64e и NA64 μ с энергиями налетающей частицы порядка 100 ГэВ относительная разница в сечениях для рассматриваемых моделей упругих атомных форм-факторов не превышает значения в 5 %, аналогично, в случае планируемых экспериментов LDMX и M³ с энергиями налетающей частицы порядка 10 ГэВ, для относительной разницы справедлива оценка $\lesssim 30 \%$.
4. Показано, что для скалярного медиатора, взаимодействующего преимущественно с электроном, и текущей статистики в 9.37×10^{11} электро-

нов, накопленных на мишени, эксперимент NA64e позволяет исключить на уровне достоверности 90 % С. Л. дираковскую легкую темную материю для масс медиатора $m_\phi \lesssim 300$ МэВ. В частности, при расчете использовалось фиксированное значение аналога постоянной тонкой структуры для взаимодействия скалярного медиатора и дираковской темной материи в виде $\alpha_\psi = (c_{\psi\psi}^\phi)^2/(4\pi) = 0.5$, соотношение масс выбрано как $m_\psi/m_\phi = 1/3$. В расчетах предполагалось, что скалярный медиатор распадается в основном канале на частицы дираковской темной материи.

Научная новизна работы

Научная новизна работы заключается в оценке текущих ограничений для скалярного и тензорного медиаторов на основе предположения об отсутствии сигнальных событий рождения соответствующего медиатора в экспериментах с фиксированной мишенью.

1. Впервые получены ограничения на константу взаимодействия тензорного медиатора и заряженного лептона в экспериментах NA64e, NA64 μ , LDMX и M³, в предположении отсутствия сигнала от процессов рождения медиатора при рассеянии лептонов на ядрах мишени. При расчетах предполагалось, что медиатор распадается в основном канале на частицы скрытого сектора.
2. Впервые получены ограничения на константу взаимодействия электрона и тензорного медиатора в экспериментах NA64e и LDMX для процесса аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени в случае дираковской и скалярной темной материи.
3. Впервые изучено влияние различных моделей параметризации упругих атомных форм-факторов на сечение рождения медиатора скрытого сектора при рассеянии заряженного лептона в поле ядра, посчитанное в приближении Вайцзеккера-Вильямса.
4. Впервые рассчитаны ограничения на константу взаимодействия скалярного медиатора и электрона из экспериментов NA64e, LDMX в предположении отсутствия сигнала рождения такого медиатора при рассея-

нии заряженного лептона на ядрах мишени. При расчетах предполагалось, что медиатор распадается в основном канале на частицы темной материи.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты имеют важное теоретическое значение для нахождения феноменологически приемлемых сценариев новой физики за пределами Стандартной модели фундаментальных взаимодействий, предлагающих решение проблемы темной материи. Действительно, на текущий момент темная материя является превалирующей теорией для понимания эволюции Вселенной и объяснения ряда существенных противоречий между наблюдениями и предсказаниями. Получение ограничений на пространство параметров темной материи позволяет приблизиться к пониманию ее природы, путем постепенного исключения кандидатов на роль скрытой материи. В частности, полученные оценки ограничений могут быть использованы в планируемых и проводимых в настоящее время экспериментах с фиксированной мишенью, что позволит исследовать значительное пространство параметров легкой темной материи.

Основные публикации по теме диссертации

1. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing hidden spin-2 mediator of dark matter with NA64e, LDMX, NA64 μ , and M3 // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Т. 106, № 11. — С. 115041. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.115041. — arXiv: 2210.00751 [hep-ph].
2. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Resonant probing spin-0 and spin-2 dark matter mediators with fixed target experiments // *Phys. Rev. D.* — 2023. — Т. 107, № 11. — С. 115034. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.115034. — arXiv: 2304.14052 [hep-ph].
3. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing scalar, Dirac, Majorana, and vector dark matter through a spin-0 electron-specific mediator at electron fixed-target experiments // *Phys. Rev. D.* — 2024. — Т. 109, № 7. — С. 075012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.075012. — arXiv: 2312.15697 [hep-ph].

Степень достоверности. Основные статьи по теме диссертации были опубликованы в признанных международных изданиях, пройдя процедуру рецензирования. Достоверность результатов диссертационного исследования обуславливается использованием в нем апробированных в научной практике методов теоретической физики, а также их сравнением с уже известными результатами.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на:

1. XXI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», ТПУ, 24.04.24, г. Томск с темой "Излучение тензорного медиатора темной материи в экспериментах с фиксированной мишенью".
2. Научных семинарах с темой диссертационного исследования:
 - 08.05.24 в Томском Политехническом Университете
 - 27.05.24 в Институте Ядерных Исследований РАН
 - 26.09.24 в Петербургском Институте Ядерной Физики НИЦ "Курчатовский Институт"
3. Международном совещании от 13.12.22 коллаборации NA64 по теме "Probing spin-2 DM mediator with NA64e via resonant production $e^+e^- \rightarrow G \rightarrow \chi\chi$ ".

Личный вклад автора. Постановка задач и методов реализации осуществлялась автором диссертации совместно с научным руководителем. Все расчеты в диссертационном исследовании выполнены непосредственно соискателем.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 135 страниц с 12 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит 225 наименований.

Глава 1. В данной главе приводятся основные астрофизические свидетельства скрытого сектора, современное космологическое представление и используемые медиаторы скрытого сектора. А именно, в разделе 1.1 приводятся основные астрофизические наблюдения, которые мотивируют введение скрытого сектора. Далее, в разделе 1.2 описывается методика расчета кривых реликтовой плотности темной материи для механизма вымораживания (freeze-out). В разделе 1.3

описываются модели скалярного и тензорного медиаторов темной материи.

Глава 2. В данной главе рассматривается вычисление сечений для процессов излучения медиатора на ядрах мишени и аннигиляции через медиатор вторичных позитронов электромагнитного ливня на атомных электронах при падении высокоэнергетического лептона фиксированную мишень, когда медиатор преимущественно распадается в частицы темного сектора. В частности, в разделе 2.1 обсуждается вычисление сечения рождения медиатора на ядре в случаях приближения Вайцзеккера-Вильямса и расчетов на древесном уровне. Также, в разделе 2.2 рассматривается расчет аннигиляции через медиатор, где используется формула Брейта-Вигнера.

Глава 3. В данной главе приводятся полученные ограничения на константу смешивания тензорного и скалярного медиаторов с лептоном на основе процессов торможения лептона в поле ядер мишени в случае различных моделей форм-факторов и аннигиляции вторичных позитронов в мишени для различных типов темной материи. А именно, в разделе 3.1 приводятся основные параметры лептонных экспериментов с фиксированной мишенью, на основе которых рассчитываются ограничения на соответствующие константы взаимодействия. Далее, в разделе 3.2 описываются полученные дифференциальные и полные сечения, где были использованы приближение Вайцзеккера-Вильямса и расчеты на древесном уровне для процесса рождения медиатора в поле ядра. В разделе 3.3 обсуждаются полученные реликтовые кривые для скалярного медиатора, который преимущественно взаимодействует с электроном. В итоге, соответствующие ограничения на константу взаимодействия тензорного и скалярного медиаторов приведены в разделе 3.4.

Глава 1

Темная материя

Начиная с 1930-х для описания поведения ряда астрофизических наблюдений была необходима идея о существовании дополнительной скрытой материи. Кроме того, предположение о термальном равновесии между частицами темной материи и Стандартной модели в ранней Вселенной приводит к тому, что ее пространство параметров лежит в области чувствительности планируемых и проводимых в настоящее время экспериментов. Однако, ограничения в пространстве параметров тяжелой темной материи мотивируют изучение моделей легкой термальной темной материи и дополнительного порталного взаимодействия. Далее, в разделе 1.1 приводятся основные астрофизические наблюдения, которые мотивируют введение темной материи. Также, в разделе 1.2 описывается современное космологическое представление. Используемые модели скалярного и тензорного медиаторов темной материи приведены в разделе 1.3.

1.1 Экспериментальные свидетельства

Все экспериментальные свидетельства существования темной материи основаны на астрофизических гравитационных эффектах, которые невозможно объяснить используя только видимую материю. В данном разделе описаны основные экспериментальные наблюдения, на основе которых обосновывается использование темной материи.

1.1.1 Кривые вращения

При изучении красного смещения в 1931 году Эдвином Хабблом и Милтоном Хьюмасоном был замечен большой разброс скоростей видимых объектов в астрофизических скоплениях [68]. Однако, анализ астрофизических объектов в то время осложнялся тем, что не излучающие в оптическом диапазоне объекты не поддавались наблюдению за исключением их гравитационного влияния на другие объекты в скоплениях. Изучая проблему разброса скоростей, в 1933 году Фриц Цвикки на основе анализа скопления Кома показал большое расхождение между массами видимых астрофизических объектов и оценкой их массы

на основе измеренной скорости, рассматривая галактики как стабильную и изолированную систему. Действительно, предполагая сферически симметричное распределение N астрофизических объектов с одинаковой массой m , теорема о вириале для потенциальной энергии, которая задана как n -степень от расстояния, и оценка массы скопления $M = Nm$ принимают вид, соответственно [5]:

$$2 \langle T \rangle = n \langle U \rangle, \quad M \sim (1/G) \langle v^2 \rangle / \langle 1/r \rangle,$$

где $\langle 1/r \rangle$ - средний обратный радиус, $\langle v^2 \rangle$ - среднее квадрата скорости и G - гравитационная постоянная. Полученные результаты приводили к выводу, что вириальная масса скопления в разы больше излучающей в оптической диапазоне видимой массы, тогда для разрешения полученного расхождения можно предположить существование дополнительной скрытой материи, которая была названа темной материей [5; 69; 70]. Однако, результаты этой работы не были общепризнанными в научной среде тех лет и многими оспаривались, в частности, предполагая гиперболические орбиты большинства тел в скоплении или нестабильность галактик [71].

Далее, в 1980 году Кент Форд и Вера Рубин опубликовали полученные зависимости скорости вращения звезд от расстояния до соответствующего центра галактики на основе свойств 21 спиральной галактики в широких диапазонах массы и светимости. В частности, результаты приводили к выводу, что для под-

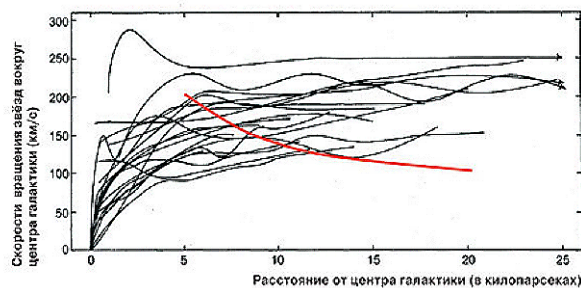


Рисунок 1.1 — Распределение скоростей объектов в галактиках в зависимости от расстояния до ее центра [6]. Красной линией показано теоретически предсказанное поведение скоростей в галактиках согласно ньютоновской механике без учета темной материи. Черными линиям соответствуют экспериментально полученные кривые вращения.

держания наблюдаемых скоростей объектов с удалением от центра галактики необходимо соответствующее увеличение массы галактики с удалением от ее

центра [6]. Однако, поведение кривых вращения противоречит ньютоновской механике, согласно которой скорость объектов в галактике v зависит от радиуса r до центра галактики с массой M следующим образом $v = \sqrt{GM/r}$ т.е. должна убывать с увеличением радиуса. Из вида ротационных кривых на графике 1.1 следует, что начиная с некоторого расстояния объектов галактики от ее центра скорость можно считать постоянной, что влечет зависимость массы галактики от расстояния до ее центра как $M(r) \sim r$.

Выводы на основе анализа ротационных кривых приводят к идее существования массивного гало, которое представляет собой распределение темной материи в аккреционный диск. Действительно, распределение плотности всей материи в спиральной галактике может быть представлено как сумма состоящего из видимой материи тонкого диска и сферически симметричного гало темной материи [72]. Кроме того, сферическая симметрия распределения темной материи относительно гравитационного центра является следствием слабого взаимодействия темной материи между собой [7; 8; 73]. В частности, масса гало, M_{halo} , для Млечного пути может быть оценена как:

$$M_{\text{halo}}(r) = 4\pi \int_0^{R_{\text{halo}}} \rho_{\text{DM}}(r)r^2 dr, \quad \rho_{\text{NFW}}(r) = \rho_0 \frac{r_s}{r} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^{-2},$$

где $\rho_{\text{NFW}}(r)$ - распределение темной материи в модели Наварро-Френка-Уайта [74], $r_s = 20$ кпк $\approx 6.2 \times 10^{21}$ см - характерный радиус распределения темной материи, ρ_0 - нормированная плотность.

Также стоит упомянуть, что добавление гало темной материи к видимой материи при численном моделировании позволяет объяснить стабильность некоторых галактик [75; 76].

1.1.2 Крупномасштабная структура Вселенной

Неравномерность в распределении объектов во Вселенной была замечена еще в 1932 году [77], хотя на достаточно больших масштабах вселенная выглядела однородной. Более того было показано, что Вселенная имеет кластерную структуру с большими пустотами, где для формирования соответствующей структуры необходима темная материя [8], которая, в свою очередь, занимает около 85% от всей плотности материи во Вселенной. В частности, использование

неоднородности в ранней Вселенной при численном моделировании позволяет воспроизвести кластерную структуру. Можно предположить, что темная материя является горячей, однако на примере нейтрино с массами несколько эВ, результаты моделирования не согласуются с наблюдаемой крупномасштабной структурой [9]. В итоге, использование холодной темной материи при моделировании дает результат, который согласуется с наблюдаемым распределением видимой материи во Вселенной [10; 78].

1.1.3 Гравитационное линзирование

Темная материя проявляет себя явно только через гравитационное воздействие на видимые астрофизические объекты. Тогда, отклонение фотонов от прямолинейного распространения в искривлённом гравитацией пространстве позволяет анализировать распределение всей материи во Вселенной. В частности, при достаточной массе астрофизических объектов может происходить эффект гравитационного линзирования, который по проявлению схож с оптическим эффектом и заключается в изменении направления распространения излучения от источника. Также стоит упомянуть, что гравитационная линза является нечувствительной к природе частиц темной материи и, в отличие от оптической линзы, не имеет фокусной точки, но при этом у нее есть фокальная линия. Впервые гравитационное линзирование наблюдали в 1919 году во время солнечного затмения в скоплении Гиады, которое стало первым экспериментальным подтверждением общей теории относительности [79; 80]. Дальнейшим развитием экспериментальных свидетельств темной материи стала идея Фрица Цвикки, что гравитационное линзирование может возникать не только на солнце, но и на любом астрофизическом скоплении с необходимой массой [70]. Однако, в тот момент, когда была выдвинута эта идея, технических возможностей для наблюдения этого эффекта было недостаточно. В настоящий момент, гравитационное линзирование является наиболее универсальным методом для анализа распределения массы во Вселенной [81], что позволяет построить соответствующую карту распределения массы во Вселенной и наблюдать ее крупномасштабную структуру.

Сильное гравитационное линзирование представляет собой случай, когда массы астрофизического скопления достаточно для создания нескольких изображений одного и того же источника позади скопления с точки зрения наблюдателя. В момент, когда источник находится прямо позади массивного скопления относительно наблюдателя, возникает эффект колец Эйнштейна, который характеризуется углом Эйнштейна θ_E в радианах следующим образом [82]:

$$\theta_E = \sqrt{2r_S D_{LS}} / \sqrt{D_S D_L} \sim \sqrt{M}, \quad D = x/\theta, \quad r_S = 2GM/c^2,$$

где x - физический диаметр объекта, $\theta = 2 \arctan(x/(2D)) \sim x/D$ - угловой диаметр объекта, D_S , D_L - расстояние по угловому диаметру для до источника и линзы соответственно, D_{LS} - расстояние по угловому диаметру между линзой и источником, r_S - радиус Шварцшильда [83], M - масса скопления, которое создает эффект сильного гравитационного линзирования. Из выражения для угла Эйнштейна видно, что эффект сильного гравитационного линзирования позволяют измерять массу массивных скоплений. Первая сильная гравитационная линза была обнаружена в 1979 году с помощью радиотелескопа, где два квазара были на малом угловом расстоянии друг от друга с одинаковым красным смещением и спектром поглощения [84]. Улучшение технического оснащения в космических и наземных телескопах для астрофизических наблюдений позволило обнаружить эффект гравитационного линзирования для множества скоплений и определить их массу. В частности, эффект гравитационного линзирования проявляется для объектов с массой видимой материи, которой недостаточно для проявления этого эффекта, что указывает на присутствие скрытой массы.

Далее, слабое гравитационное линзирование представляет собой эффект действия массивного скопления, при котором фотоны все еще отклоняются, но для проявления сильного линзирования недостаточно массы скопления. Большинство объектов во вселенной не подвергаются сильному гравитационному линзированию, где свет очень слабо отклоняется от прямолинейного распространения вдали от ядра галактики или скопления галактик. Однако, при слабом линзировании возникает сдвиг, который меняет наблюдаемую форму астрофизических объектов. Хотя эффект искажения для индивидуальных астрофизических объектов может быть незаметен, для обнаружения слабого линзирования

ния можно использовать анализ большого количества объектов, находящихся рядом [85; 86]. Практически, слабое линзирование проявляет себя как некоторое выделенное направление вытянутости наблюдаемой формы астрофизических объектов, где двухмерность наблюдаемой картины дополняют расстоянием на основе измерения красного смещения от видимых объектов.

Также существует эффект гравитационного микролинзирования, при котором излучающие объекты становятся ярче в результате движения гравитационной линзы перед источником. Действительно, данный эффект дает важное следствие, что максимальная масса локальных сгустков темной материи не превышает массы нескольких порядков массы Луны [87]. В частности, данный эффект дает ограничения на использование первичных черных дыр как кандидатов на роль темной материи [88—90].

Очень важным аргументом существования темной материи является скопление Пуля ($1E0657 - 56$), которое состоит из двух групп галактик после их столкновения. Видимую материю в скоплении наблюдали с помощью рентгеновского излучения [7], а распределение массы всей материи получили на основе карты слабого гравитационного линзирования [8]. На графике 1.2 представлено составное изображение на основе измерений рентгеновского излучения и масс, откуда видно, что наибольшая плотность массы сосредоточена в областях, где нет видимой материи. Еще одним важным следствием анализа скопления Пу-

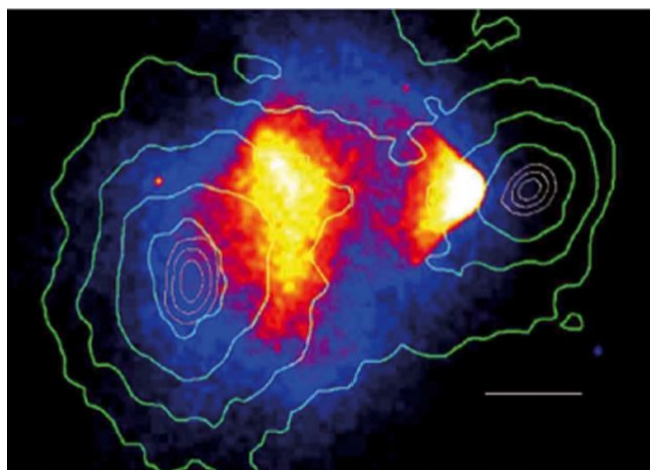


Рисунок 1.2 — Составное изображение скопления Пуля ($1E0657 - 56$). Цветовой схемой обозначена карта рентгеновского излучения от скопления [7]. Изолиниями обозначено распределение масс в скоплении, которое получено на основе слабого линзирования [8]

ля является ограничение на столкновение темной материи самой с собой, поскольку массовые центры столкнувшихся галактик не сильно деформированы. В частности, соответствующие ограничения на самовзаимодействие темной материи на основе анализа формы кластера Пули принимают вид [73]:

$$\sigma_{\text{self}}/m_{\text{DM}} < 10^{-24} \text{ см}^2 \text{ ГэВ}^{-1}.$$

Стоит упомянуть, что модифицированная теория гравитации может объяснить некоторые свидетельства темной материи [91; 92]. Однако, поведение темной материи кластера Пуля, в котором эффект слабого линзирования явно оказывается не привязан к видимой материи, ставит под сомнение подход модификации теории гравитации [8; 92].

1.1.4 Космическое микроволновое излучение

Предсказание о космическом микроволновом излучении было сделано в рамках изучения нуклеосинтеза в ранней Вселенной [93–95], обнаружение которого стало важным подтверждением теории Большого взрыва [96]. При значении красного смещения $z = 1090$ наступает эпоха рекомбинации, в которой происходит связывание электронов и протонов из первичной плазмы и, следовательно, космическая среда становится прозрачной для фотонов [97]. В обсерватории COBE (COsmic Background Explorer) было показано, что для космического фонового излучения анизотропия составляет $\delta T/T \approx 10^{-5}$, что возникает из-за неравномерного распределения вещества в эпоху рекомбинации [98]. Также, полученная анизотропия была подтверждена в эксперимента WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [99]. Действительно, флуктуации в барионной первичной плазме приводят к неравномерной плотности вещества, которая усиливается гравитационным притяжением и ослабляется радиационным давлением, что приводит к барионным акустическим колебаниям в первичной плазме [100; 101]. Далее, анализируя двухточечную корреляционную функцию, для реликтового фонового излучения можно показать чувствительность поляризационного спектра для излучения к плотностям различных компонент Вселенной [11; 102].

Также стоит отметить, что наблюдаемая анизотропия космического микроволнового излучения является чувствительной к инъекции дополнительной

энергии в первичную плазму ранней Вселенной. В частности, аннигиляция в видимый сектор темной материи в момент эпохи рекомбинации приводит к дополнительным ионизации и нагреву первичной плазмы [103]. Таким образом, в случае отсутствия подавления по скорости в сечении, наблюдаемая анизотропия фонового микроволнового излучения ограничивает термально усредненное сечение из влияния темной материи на первичную плазму как [4; 12; 29]:

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{СМВ}} \lesssim \frac{3.6 \times 10^{-27} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}}{f(z, m_{\text{DM}})} \left(\frac{m_{\text{DM}}}{1 \text{ ГэВ}} \right),$$

где $f(z, m_{\text{DM}})$ - эффективная доля энергии, которая инжектируется при аннигиляции темной материи и поглощается первичной плазмой; z - красное смещение и подразумевается отсутствие подавления сечения σ по скорости частиц темной материи. Однако, для оценки ограничений можно пренебречь зависимостью $f(z, m_{\text{DM}})$ от красного смещения z , что подразумевает поглощение всей инжектированной энергии галактической средой с заданной эффективностью $f(z) \simeq f_{\text{eff}}(m_{\text{DM}})$ [4; 103; 104]. Кроме того, в случае рассмотрения масс легкой темной материи и медиатора, взаимодействующего преимущественно с электроном, для оценки ограничений на темную материю можно положить $f_{\text{eff}}(m_{\text{DM}}) \simeq 1$ [105].

Для легкой термальной темной материи отсутствие подавления по скорости для механизма ее аннигиляции через медиатор (плотность темной материи уменьшается за счет введенного порталного взаимодействия) может привести к противоречию с наблюдаемым спектром космического фонового излучения [4]. Для того чтобы избежать инжектированная дополнительной энергии в эпоху рекомбинации, можно рассмотреть модели неупругой темной материи, в случае которой в скрытом секторе существуют несколько массовых состояний. В этом случае частицы неупругой темной материи переходят до эпохи рекомбинации в состояние с наименьшей массой, которое и формирует наблюдаемую реликтовую плотность темной материи. Действительно, достаточно большие значения для расщепления масс подавляют основной канал генерации наблюдаемой плотности и позволяют избежать ограничений из спектра космического излучения на темную материю, аннигилирующую в s-волну [106]. Кроме того, процессы коаннигиляции с частицами видимой материи переводят термально

усредненное сечение рассеяния в эффективное, в котором учитываются возникающие дополнительные каналы и расщепление масс [107].

1.2 Современное космологическое представление

Для описания поведения материи в общей теории относительности используется действие Эйнштейна-Гильберта с дополнительными слагаемыми \mathcal{L}_M , которое описывает материю, и космологической постоянной Λ [15] в следующей форме:

$$S \supset \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G_{\text{gr}}} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right), \quad (1.1)$$

где $g^{\mu\nu}$ - метрика, $g = \det(g_{\mu\nu})$; G_{gr} - гравитационная постоянная; тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda;$$

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ - скаляр Риччи; $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ - аффинная связность. Варьируя по метрике действие выше и полагая $\delta S = 0$, получим уравнение Эйнштейна и симметризованный тензор энергии-импульса (ТЭИ) в виде, соответственно:

$$R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M.$$

В частности, приведенное выше уравнение Эйнштейна связывает геометрию пространства с материальным содержимым в ней. Далее, для частиц во Вселенной используется ТЭИ для идеальной жидкости [108; 109]:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

где u_μ - 4-скорость; ε и P - суммы всех вкладов в полные плотность энергии и давление во Вселенной.

1.2.1 Уравнение Фридмана

Предположение об однородности и изотропности Вселенной, что подтверждается малой анизотропией космического фонового излучения [4], и расширения Вселенной по закону Хаббла [3] формируют космологический принцип [13]. Данным условиям в общем виде удовлетворяет метрика Фридмана, которая

выражается следующим образом [110]:

$$g_{\mu\nu} = (1, -a^2(t)\gamma_{ij}), \quad g^{\mu\nu} = (1, -1/a^2(t)\gamma^{ij}), \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$

где γ^{ij} - однородная и изотропная метрика; $a(t)$ - масштабный фактор, характеризующий расширение Вселенной. Однородную и изотропную метрику можно записать в следующей форме [111–114]:

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{R^2}{1 - kr^2}, R^2 r^2, R^2 r^2 \sin^2(\theta) \right),$$

где $k = 0, 1, -1$ для плоской, закрытой и открытой Вселенной, соответственно и использованы координаты (χ, θ, ϕ) с $r = \sin(\chi)$ для 3-сферы заданного радиуса R , $r = \sinh(\chi)$ для 3-гиперболоида с заданными полуосями R и $r = \chi$ для метрики Минковского в сферических координатах. Для введенной метрики символы Кристоффеля примут вид:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\sigma}}{2}(\partial_{\alpha}g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}g_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}), \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = -H(t)g_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = H(t)\delta_j^i, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

где $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ - параметр Хаббла [3; 4], который характеризует скорость расширения Вселенной.

Далее, используя метрику Фрийдмана, получим выражение для ненулевых компонент тензора Риччи и скаляра Риччи, соответственно:

$$R_{00} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} \right) g^{ij}, \quad R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right).$$

С учетом выражений $T_0^0 = \varepsilon$ и $T_i^i = -P\delta_j^i$, уравнения Фрийдмана принимают вид:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3},$$

которое позволяет описать эволюцию масштабного фактора во времени.

Используя параметр плотности $\Omega_i = \varepsilon_i/\varepsilon_{cr}$, получим первое уравнение Фрийдмана в виде:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda}, \quad (1.4)$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{(H_0 a_0)^2}, \quad \Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \varepsilon_{cr} = \frac{3H_0^2}{(8\pi G)},$$

где ε_{cr} - критическая плотность энергии, т.е. плотность в случае плоской Вселенной; H_0 , a_0 - значения параметра Хаббла и масштабного фактора на текущий момент времени; Ω_r , Ω_m , Ω_k , Ω_Λ - параметры плотности излучения, материи, кривизны и темной энергии, соответственно. Согласно современным наблюдениям [4]:

$$|\Omega_k| < 0.01, \quad \Omega_r = 9.4 \times 10^{-5}, \quad \Omega_b = 0.05, \quad \Omega_c = 0.27, \quad \Omega_\Lambda = 0.68, \quad (1.5)$$

где $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$; Ω_b , Ω_c - плотности всей, видимой и холодной темной материи, соответственно, и использовано $\varepsilon \sim a^{-3}$ в случае материи (нерелятивистский случай), $\varepsilon \sim a^{-4}$ в случае излучения (релятивистский случай), что можно увидеть в разделе 1.2.2.3. Из уравнения (1.4) видно, что на первых этапах доминировало излучение, далее материя, а на текущем этапе начинает доминировать темная энергия. Кроме того, принимая во внимание малое значение Ω_k , можно считать, что Вселенная является плоской.

1.2.2 Термодинамические параметры и эффективные степени свободы

Из-за большого числа степеней свободы системы возникают статистические закономерности, которые позволяют описать систему независимо от поведения отдельных частиц. В частности, для описания используется функция распределения, которая для i -ого типа частиц с импульсом $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ в термодинамическом равновесии при температуре T_i принимает следующий вид [115]:

$$f_i(T_i, E_i) = g_i \left(e^{(E_i - \mu_i)/T_i} + \eta_i \right)^{-1} \approx g_i \left(e^{E_i/T_i} + \eta_i \right)^{-1},$$

где g_i - внутренние степени свободы; $\eta_i = 1, -1, 0$ - статистика Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна и Максвелла-Больцмана, соответственно, и μ_i - химический потенциал. Далее, макроскопические параметры для i -ого типа частиц принимают соответствующее выражения [116]:

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_i(T_i, E) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^3 I(x_i, \eta_i), & P_i &= \int \frac{p^2}{3E} f_i(T_i, E) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \\ \varepsilon_i &= \int E f_i(T_i, E) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^4 J(x_i, \eta_i), & s_i &= \frac{\varepsilon_i + P_i}{T_i}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\xi = p_i/T_i$; $x_i = m_i/T_i$; n_i - плотность частиц; ε_i - плотности энергии; P_i - давление; s_i - плотность энтропии и использованы обозначения:

$$I(x_i, \eta_i) = \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\exp\left(\sqrt{\xi^2 + x_i^2}\right) + \eta_i}, \quad J(x_i, \eta_i) = \int_0^\infty \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x_i^2} d\xi}{\exp\left(\sqrt{\xi^2 + x_i^2}\right) + \eta_i}.$$

Также стоит упомянуть интегральные представления дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и гамма-функции Эйлера $\Gamma(n)$, соответственно [117]:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x + 1}, \quad \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx.$$

1.2.2.1 Термодинамические параметры темной материи

Далее, используя статистику Ферми-Дирака в случае горячей темной материи, для которой справедливо $E \approx p$ и $m_j \ll T_j$, термодинамические параметры выражаются образом:

$$\begin{aligned} n_i &\approx \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^3 I(0, \eta_i) = (3/4)\zeta(3) \frac{g_i}{\pi^2} T_i^3, & \varepsilon_i &\approx \frac{g_i}{2\pi^2} T_i^3 J(0, \eta_i) = (7/8)g_i \frac{\pi^2}{30} T_i^4, \\ P_i &\approx \frac{1}{3}\varepsilon_i, & s_i &\approx \frac{4\varepsilon_i}{3T_i} = (7/8)g_i \frac{2\pi^2}{45} T_i^3, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где T_j - температура отщепления j -ого типа частиц ($T_j < T_i$); $\zeta(3)$ - постоянная Апери; $\zeta(4) = \pi^4/90$. Для статистики Бозе-Эйнштейна необходимо заменить фермионные префакторы $(3/4) \rightarrow 1$ для плотности частиц и $(7/8) \rightarrow 1$ для плотности энергии.

Аналогично, для холодной темной материи выполняется соотношение $m_j \gg T_j$, тогда макроскопические параметры можно записать в следующем виде:

$$n_i \approx g_i \left(\frac{m_i T_i}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m_i/T_i}, \quad \varepsilon_i \approx m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T_i \approx m_i n_i, \quad P_i \approx n_i T_i, \quad (1.8)$$

где справедливо $\exp(E_i/T_i) \gg \eta_i$ т.е. использована статистика Максвелла-Больцмана и учтены выражения:

$$I(x, \eta_i) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2x)^{3/2} e^{-x}, \quad J(x, \eta_i) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2x)^{3/2} \left(x + \frac{3}{2}\right) e^{-x},$$

Откуда видно, что связь давления, плотности частиц и температуры представляет собой классическое уравнение Менделеева-Клапейрона для идеального га-

за, а для давления и плотности энергии справедливо $P_i/\varepsilon_i \ll 1$. Также стоит упомянуть, что в случае теплой темной материи, т.е. когда скорости частиц скрытого сектора промежуточные, необходимо считать интегралы выше численно.

1.2.2.2 Степени свободы плотностей энергии и энтропии

Следующим этапом, суммируя по всем типам частиц для горячей первичной плазмы при температуре T в ранней Вселенной, получим полные плотности энергии и энтропии в виде, соответственно:

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i = g_{*\varepsilon}(T) \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad s = \sum_i s_i = g_{*s}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3, \quad (1.9)$$

где число эффективных степеней свободы для плотностей энергии и энтропии принимают следующие выражения, соответственно:

$$g_{*\varepsilon}(T) = g_*^{\text{th}}(T) + g_{*\varepsilon}^{\text{dec}}(T), \quad g_{*s}(T) = g_*^{\text{th}}(T) + g_{*s}^{\text{dec}}(T), \quad (1.10)$$

степени свободы в термодинамическом равновесии для всех типов частиц:

$$g_*^{\text{th}}(T) = \sum_{\text{boson}} g_j \theta(T - T_j) + 7/8 \sum_{\text{fermion}} g_j \theta(T - T_j),$$

и после отщепления для плотностей энергии и энтропии в виде, соответственно:

$$g_{*\varepsilon}^{\text{dec}}(T) = \sum_{\text{boson}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4 \theta(T_j - T) + 7/8 \sum_{\text{fermion}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4 \theta(T_j - T),$$

$$g_{*s}^{\text{dec}}(T) = \sum_{\text{boson}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 \theta(T_j - T) + 7/8 \sum_{\text{fermion}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 \theta(T_j - T),$$

T_j - температура отщепления j -ого типа частиц. Явный вид зависимости эффективных степеней свободы от температуры для частиц Стандартной модели может быть найден в работе [116]. Далее, кратко приведем основные этапы термальной истории Вселенной для частиц Стандартной модели. При температуре T выше $v_{\text{EW}} \simeq 246$ ГэВ все частицы находятся в термодинамическом равновесии и $g_{*\varepsilon}(T) = g_{*s}(T) = 106.75$. Также стоит отметить, что при $T \gtrsim m_e$ для степеней свободы справедливо $g_{*\varepsilon}(T) \approx g_{*s}(T)$. Первое падение значения числа эффективных степеней свободы возникает при уменьшении температуры T от $m_t \simeq 173$ ГэВ до 20 ГэВ в связи с отделением бозонов слабого вза-

имодействия и t-кварка. Далее, происходит связывание кварков и глюонов и, следовательно, резкое падение числа эффективных степеней свободы от Λ_{QCD} до $m_b = 4.7$ ГэВ, где $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 200$ МэВ - энергетическая шкала сильных взаимодействий. Действительно, на кварки и глюоны приходится наибольшее число степеней свободы. Также, небольшое падение значения числа эффективных степеней свободы происходит при температурах T ниже масс электрона и мюона, при которой соответствующие частицы отщепляются из термальной ванны. При уменьшении температуры фотонов ниже массы электрона, т.е. когда все частицы отделились, $g_{*\varepsilon}(T)$ уменьшается до 3.36, а $g_{*s}(T)$ до 3.94. При достижении значений температуры $T \lesssim 1$ кэВ начинается первичный нуклеосинтез. При температуре $T \simeq 0.4$ эВ Вселенная становится прозрачной для фотонов, что приводит к возникновению космического фонового излучения [45; 116].

1.2.2.3 Связь полной плотности энергии и масштабного фактора

Далее, фиксируя $\mu = 0$ в тождестве Бъянки $\Delta_\nu T^{\mu\nu} = 0$ для тензора энергии-импульса (1.2), получим уравнение непрерывности $\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0$. Также, с учетом выражений излучения (1.7), материи (1.8) и $\varepsilon = \text{const}$ для темной энергии, получим зависимость плотности энергии и давления от масштабного фактора как $\varepsilon \sim a^{-3(1+\omega)}$ и $P \sim \omega\varepsilon$, соответственно, где $\omega = 0$ в случае материи, $\omega = 1/3$ для излучения, $\omega = -1$ в случае темной энергии. Откуда видно, что темная энергия обладает отрицательным давлением.

1.2.2.4 Связь времени и температуры

Предполагая термодинамическое равновесие в первичной плазме ранней Вселенной, из второго закона термодинамики в следующем виде:

$$d\varepsilon = Tds + (Ts - P - \varepsilon)dV/V,$$

и уравнения непрерывности получим уравнение на плотность энтропии, закон сохранения полной энтропии и связь постоянной Хаббла с температурой, соот-

ветственно:

$$\dot{s} + 3Hs = 0, \quad g_{*s} T^3 a^3 = \text{const}, \quad H(t) = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}, \quad (1.11)$$

где было предположена независимость числа эффективных степеней свободы от температуры. С учетом уравнения Фрийдмана (1.4), постоянная Хаббла связана с параметром x как [118]:

$$H(t) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \varepsilon = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_{*s}}{10}} \frac{T^2}{M_{Pl}} = \frac{H(m)}{x^2}, \quad (1.12)$$

где $x = m/T$, G - гравитационная постоянная, $M_{Pl} = \sqrt{1/(8\pi G)}$ - редуцированная масса Планка и использовано обозначение:

$$H(m) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{g_{*s}}{10}} \frac{m^2}{M_{Pl}} \approx 0.331 g_{*s}^{1/2} \frac{m^2}{M_{Pl}}. \quad (1.13)$$

В результате, принимая во внимание следствие сохранения полной энтропии (1.11), получим временную зависимость:

$$-\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = T^2 \frac{H(m)}{m^2} \Rightarrow t = \frac{x^2}{2H(m)} \approx 1.51 g_{*s}^{-1/2} \frac{M_{Pl}}{m^2} x^2, \quad t \sim T^{-2}. \quad (1.14)$$

Полученное соотношение выше позволяет далее перейти в уравнениях от временной зависимости к температурной.

1.2.3 Термальная история темной материи

1.2.3.1 Уравнение Больцмана

Уравнение Больцмана в общей теории относительности для плотности распределения f принимает вид:

$$\widehat{L}[f] = \widehat{C}[f], \quad \widehat{L}[f] = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^\mu},$$

где $\widehat{L}[f]$ - оператор Лиувилля, характеризующий скорость изменения во времени плотности фазового пространства [115]; $\widehat{C}[f]$ - оператор столкновений, который описывает изменение числа частиц в единицу времени [119; 120]; $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ - символы Кристоффеля (1.3).

1.2.3.2 Операторы столкновения и Лиувилля

Из космологического принципа следует независимость функции распределения от координат и направления импульса частиц, т.е. $f(t, E)$, тогда в метрике Фридмана оператор Лиувилля примет вид:

$$\widehat{L}[f] = E \frac{\partial f}{\partial t} - H(t) |p|^2 \frac{\partial f}{\partial E},$$

Также, интегрируя оператор Лиувилля по лоренц - инвариантному объему $d\Pi$, получим:

$$\int \widehat{L}[f] d\Pi = \dot{n} + 3H(t)n, \quad d\Pi = g \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E},$$

где n - плотность частиц; g - количество внутренних степеней свободы частицы и $3H(t)n$ характеризует изменение плотности частиц в связи с расширением. Кроме того, при этом учтено, что функция распределения для $|p| \rightarrow \infty$ равна нулю из-за отсутствия частиц с бесконечным импульсом, а при $|p| = 0$ принимает конечное значение, и предположена равномерная сходимости интеграла от функции распределения при переносе производной по времени за знак интеграла.

Взаимодействие между тремя и более частицами маловероятно, поэтому оператор столкновений можно представить в виде [121]:

$$\widehat{C}[f] = \int \omega(f; i) (f(t, \Pi_3) f(t, \Pi_4) - f(t, \Pi_1) f(t, \Pi_2)) d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4, \quad (1.15)$$

где данное выражение написано с учетом того, что в первом порядке теории возмущений слагаемым связанным с запертом Паули и вынужденным излучением можно пренебречь и положить $1 \pm f \approx 1$.

Далее, для реакции $2 \rightarrow 2$ можно написать сечение рассеяния в виде:

$$\sigma_{12 \rightarrow 34} = \frac{1}{4g_3 g_4 I} \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4) |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2, \quad (1.16)$$

где интегрирование идет по конечным состояниям и I - инвариант Меллера для начальных частиц [122]:

$$I = \sqrt{(p_1, p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = 1/2 \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} = E_1 E_2 \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2},$$

где $\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = (s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)$ - треугольная функция; $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1/E_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_2/E_2$ - скорости 1 и 2 частиц, соответственно; относительная

скорость начальных частиц:

$$v_{\text{rel}} = \frac{I}{(p_1, p_2)} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{s - m_1^2 - m_2^2} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}}{1 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} \stackrel{v_1 \parallel v_2}{=} \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{1 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)},$$

скорость Меллера для начальных частиц:

$$v_{\text{Mol}} = \frac{I}{E_1 E_2} = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2} \stackrel{v_1 \parallel v_2}{=} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|.$$

Из выражений выше видно, что скорость Меллера не обладает лоренцевой инвариантностью и связана с относительной скоростью как [121]:

$$v_{\text{Mol}} = v_{\text{rel}}(p_1, p_2)/(E_1 E_2) = v_{\text{rel}} [1 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)].$$

Однако, поток частиц $F = n_1 n_2 v_{\text{Mol}}$, который появляется в выражении сечения рассеяния, представляет собой инвариант [123]. Кроме того, в нерелятивистском приближении и для коллинеарных скоростей, относительная и меллерова скорости совпадают. В частности, для системы центра масс при $m = m_1 = m_2$ для скорости Меллера и инвариантной массы справедливо, соответственно:

$$v_{\text{Mol}} = 2\sqrt{1 - 4m^2/s}, \quad s = 4m^2/(1 - (v_{\text{Mol}})^2/4) \stackrel{\text{low vel.}}{\approx} 4m^2 + m^2(v_{\text{Mol}})^2, \quad (1.17)$$

и выполняется соотношение $v_{\text{Mol}} = 2v^*$, где v^* - скорость начальных частиц в системе центра масс.

Тогда, используя выражение для сечения (1.16), для термально усредненного сечения рассеяния можно записать:

$$\langle \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}} \rangle = \frac{1}{n_1 n_2} \int d\Pi_1 d\Pi_2 f(t, q, \Pi_1) f(t, q, \Pi_2) v_{\text{Mol}} \sigma_{12 \rightarrow 34}, \quad (1.18)$$

где усреднение происходит по начальным состояниям. В итоге, для оператора столкновений (1.15) в случае реакции $2 \rightarrow 2$ справедливо:

$$\widehat{C}[f] = -c \langle \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}} \rangle (n_1 n_2 - n_1^{\text{eq}} n_2^{\text{eq}}), \quad (1.19)$$

где n_1, n_2 - плотность частиц и античастиц темной материи, соответственно; n_{eq} - плотность частиц в термодинамическом равновесии; $c = 1$ для случая идентичных частиц 1 и 2, т.е. $n = n_1 = n_2$ и $c = 1/2$ для случая, когда частица 1 является античастицей для частицы 2 и химическим потенциалом можно пренебречь, т.е. $n = n_1 + n_2 \approx 2n_1$ [124]. В частности, для холодной темной материи для n_{eq} справедливо выражение (1.8).

1.2.3.3 Термальное усреднение сечения рассеяния

Далее, явный вид для термального усреднения сечения рассеяния (1.18) принимает следующее выражение [29; 121; 125]:

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle = \frac{1}{N_{\langle \sigma v \rangle}} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} \sigma(s) \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{\sqrt{s}} K_1 \left(\frac{\sqrt{s}}{T} \right) ds, \quad (1.20)$$

где $N_{\langle \sigma v \rangle} = 8T \prod_{i=1,2} m_i^2 K_2 \left(\frac{m_i}{T} \right)$ и $K_i(z)$ - модифицированные функции Бесселя второго рода порядка i [117]:

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_1^\infty e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu-1/2} dt, \quad \text{Re}(\nu) > -1/2, \quad |\arg(z)| < \pi/2.$$

Также следует отметить, что при получении выражения выше использовались предположения о справедливости для рассматриваемых частиц распределения Максвелла-Больцмана, термального равновесия и пренебрежение химическим потенциалом [121]. В частности, формула (1.20) справедлива для параметра $x > 1/3$, т.е. предполагается, что темная материя не является горячей.

Кроме того, можно использовать нерелятивистское приближение для выражения термального усреднения сечения рассеяния и разложить сечение в ряд по скоростям v_{Mol}^k с коэффициентами a_k , тогда справедливо выражение [118; 126]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle &= \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} v_{\text{Mol}}^3 \sigma(v_{\text{Mol}}) e^{-xv_{\text{Mol}}^2/4} dv_{\text{Mol}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{k+1} \Gamma(k + 3/2) \frac{a_k}{k!} x^{-k} \approx a_0 + 6a_1 x^{-1} + 30a_2 x^{-2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Также стоит отметить, что $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$ представляют собой аннигиляции в s-волну, p-волну и d-волну, соответственно [127]. Дополнительно, раскладывая в ряд переменные Мандельштама и матричных элемент процесса $2 \rightarrow 2$, можно получить явный вид коэффициентов для нерелятивистского приближения без расчетов полного сечения [128]. Однако, использование нерелятивистского приближения для аннигиляции с узким резонансным пиком может привести к ошибкам [67; 121].

Стоит заметить, что выражения (1.20) и (1.21) для термального усреднения сечения рассеяния связаны через приближение для $K_i(x)$ в виде [121]:

$$\frac{x}{K_2^2(x)} K_1 \left(\frac{2x}{\sqrt{1 - v_{\text{Mol}}^2/4}} \right) \simeq \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-xv_{\text{Mol}}^2/4}. \quad (1.22)$$

Кроме того, в случае наличия нескольких каналов распада темной материи через медиатор используется эффективное термально усредненное сечение рассеяния [45; 129].

1.2.3.4 Реликтовая плотность темной материи

В итоге, приведем приближенное аналитическое выражение для плотности частиц темной материи. Согласно выражениям выше, уравнение Больцмана можно записать в общем виде для реакции $2 \rightarrow 2$ как:

$$\dot{n} + 3H(t)n = \widehat{C}[f],$$

В частности, для полных плотностей числа частиц n и энтропии s справедливо $n \sim s \sim 1/a^3$ при отсутствии взаимодействия, т.е. происходит их уменьшение с течением времени из-за расширения Вселенной. Подставляя оператор столкновений (1.19) в уравнение Больцмана, для полной плотности числа частиц n получим следующее выражение [127]:

$$\dot{n} + 3H(t)n = -c \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle (n^2 - n_{\text{eq}}^2),$$

где $\sigma = \sigma_{12 \rightarrow 34}$ - сечение аннигиляции (1.16), просуммированное по конечным и усредненное по начальным состояниям; для термально усредненного сечения справедливо (1.20) и (1.21), а для n_{eq} выполняется выражение (1.8).

Для компенсации эффекта расширения Вселенной при рассмотрении эволюции числа взаимодействующих частиц введем переменную $Y = n/s$. В этом случае уравнение Больцмана можно переписать в виде:

$$\dot{Y} = -sc \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle (Y^2 - Y_{\text{eq}}^2), \quad Y_{\text{eq}} = n_{\text{eq}}/s.$$

Далее, используя зависимость температуры и времени (1.14), получим уравнение Больцмана в терминах Y -переменной в виде:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{cs(m_{\text{DM}})}{x^2 H(m_{\text{DM}})} \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle (Y^2(x) - Y_{\text{eq}}^2(x)),$$

где m_{DM} - масса частиц темной материи; $H(m_{\text{DM}})$ - параметр Хаббла (1.13) и $s(m_{\text{DM}})$ - полная плотность энтропии (1.9). Полученное уравнение представляет собой частный случай уравнения Риккати и не имеет общего решения в аналитическом виде без каких-либо приближений.

Эволюцию отдельного типа частиц можно разделить на три стадии: тепловое равновесие, отщепление и вымерзание. При тепловом равновесии скорость взаимодействия Γ много больше скорости расширения, т.е. $\Gamma \gg H$, тогда na^3 экспоненциально падает с увеличением массы. При сравнимых значениях скорости взаимодействия и скорости расширения $\Gamma \simeq H$ частицы перестают активно взаимодействовать, и начинается отщепление этого типа частиц от термальной ванны. При скорости взаимодействия много меньше скорости расширения $\Gamma \ll H$ частицы отделяются от термальной ванны с $n \sim 1/a^3$ и, тем самым, создают реликтовый избыток темной материи во Вселенной [28]. В частности, в момент, когда выполняется критерий Гамова:

$$\Gamma = c n_{\text{eq}}(x_f) \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle |_{x=x_f} \simeq H(x_f), \quad (1.23)$$

происходит отщепление рассматриваемого типа частиц при критической температуре T_f и параметре $x_f = m_{\text{DM}}/T_f$. Также, переменная Y стремится к реликтовым значениям Y_∞ , которое можно оценить на интервале (x_f, ∞) , т.е. справедливо:

$$\frac{dY}{dx} \approx -\frac{cs(m_{\text{DM}})}{x^2 H(m_{\text{DM}})} Y^2(x) \Rightarrow Y^{-1}(\infty) = \frac{cs(m_{\text{DM}})}{H(m_{\text{DM}})} J(x_f), \quad (1.24)$$

где $Y_f \gg Y_\infty$ - значение переменной Y в момент вымерзания, учтено соотношение $Y(x > x_f) \gg Y_{\text{eq}}(x > x_f)$ и введено обозначение:

$$J(x_f) = \int_{x_f}^{\infty} \frac{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle}{x^2} dx. \quad (1.25)$$

В результате, используя выражения для критической плотности энергии (1.5), полной плотности энтропии (1.9), постоянной Хаббла (1.13) и оценки реликтовых значений Y переменной (1.24), получим параметр плотности холодной темной материи [130]:

$$\Omega_c = \frac{m_{\text{DM}} s_0 Y_0}{\varepsilon_{\text{cr}}} = \frac{\pi}{9} \frac{1}{c} \frac{T_0^3}{M_{\text{Pl}}^3 H_0^2} \frac{g_{*s}(T_0)}{g_{*s}(m)} \left(\frac{g_{*\varepsilon}(m_{\text{DM}})}{10} \right)^{1/2} J^{-1}(x_f) \quad (1.26)$$

где g_{*s} - число эффективных степеней свободы для плотности энтропии (1.10);
 $T_0 = 2.35 \cdot 10^{-13}$ ГэВ - температура Вселенной на текущий момент,
 $H_0 = 2.13 h \cdot 10^{-42}$ ГэВ - текущее значение постоянной Хаббла,
 $M_{Pl} = 2.43 \cdot 10^{18}$ ГэВ - редуцированная масса Планка и для текущих значений положено $Y_0 \approx Y_\infty$. В частности, подставляя численные значения в формулу (1.26) и принимая во внимание, что $g_{*s}(T_0) = 3.91$ и $g_{*e}(m) \approx g_{*s}(m)$, получим итоговую формулу для расчета реликтовой плотности темной материи в следующем виде:

$$\Omega_c h^2 = 0.85 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{g_{*s}^{-1/2}(m_{DM})}{c} J^{-1}(x_f) \text{ ГэВ}^{-2} \quad (1.27)$$

где $h \approx 0.67 \pm 0.01$ - безразмерная постоянная Хаббла.

Кроме того, используя разложение по скоростям (1.21) в формуле (1.25), получим систему уравнений на параметр вымерзания и константу связи холодной темной материи с видимой материей в следующей форме [64; 121; 127]:

$$x_f = \ln \left(\sigma_0 \frac{3\sqrt{5}M_{Pl}}{2\pi^{5/2}} \frac{g_i m_{DM}}{\sqrt{g_{*s}(m_{DM})}} \right), \quad (1.28)$$

$$\Omega_c h^2 = \frac{0.85 \cdot 10^{-10}}{c} \frac{(k+1)x_f^{k+1}}{g_{*s}^{1/2}(m_{DM})\sigma_0} \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (1.29)$$

где g_i - внутренние степени свободы рассматриваемого типа частиц и k - порядок первого ненулевого слагаемого σ_0 в нерелятивистском разложении термально усредненного сечения (1.21).

Дополнительно, для повышения точности расчетов в формуле для параметра плотности темной материи (1.26) необходимо учитывать фазовый переход КХД, тогда в этом случае необходимо заменить $g_{*s}(T)$ на эффективные степени свободы $g_{*eff}(T)$, которые принимают следующий вид [121; 124; 131; 132]:

$$g_{*eff}(T) = \frac{g_{*s}(T)}{\sqrt{g_{*e}(T)}} \left(1 + \frac{T}{3g_{*s}(T)} \frac{dg_{*s}(T)}{dT} \right). \quad (1.30)$$

Действительно, в этом случае реликтовые кривые будут иметь более выраженный скачок при температуре в диапазоне от 10^{-1} ГэВ до $2 \cdot 10^{-1}$ ГэВ, который связан с выделением дополнительного тепла [133]. Однако, для дальнейших расчетов используется приближение $g_{*eff}(T) = g_{*s}(T)$.

Также стоит упомянуть, что значение параметра вымерзания x_f можно оценить в случае s-волны путем исключения из формул (1.26) и (1.23) термаль-

но усредненного сечения, где $J(x_f) = \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle / x_f$. Действительно, в этом случае x_f принимает значения $\mathcal{O}(10)$, и, следовательно, характерное значение термального усреднения сечения аннигилирующего в s-волну можно записать как $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle \simeq 2.5 \times 10^{-9} \text{ ГэВ}^{-2} \approx 3 \times 10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ [134; 135]

1.3 Модели медиаторов скрытого сектора

Наиболее популярные сценарии медиаторов с характерными массами выше $\mathcal{O}(1)$ ГэВ имеют ряд ограничений из данных по прямому детектированию. Это мотивирует рассмотрение частиц темного сектора в области масс меньше $\mathcal{O}(1)$ ГэВ. В частности, предметом описания данной главы будут основы моделей с медиаторами спина-0 и спина-2. Отметим, что в общем случае, рассмотрение достаточно легких медиаторов позволяет самосогласованно объяснить значения реликтовой плотности темной материи, после момента ее отщепления в ранней Вселенной.

Эффективная теория поля представляет собой модельно-независимый способ описания расширений Стандартной модели, в основе которой лежит теорема об отщеплении [136–138]. А именно, добавление к плотности лагранжиана Стандартной модели дополнительных операторов с размерностью $d > 4$ позволяет вводить модели новой физики [139]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{c_i}{\Lambda^{i-d}} \mathcal{O}_i, \quad (1.31)$$

где i - размерность оператора, c_i - коэффициенты Вильсона, \mathcal{O} - введенные операторы эффективного взаимодействия [140; 141], Λ - характерный масштаб новой физики и $d = 4$.

1.3.1 Скалярный медиатор

Лагранжиан для низких энергий может возникать через специфичный для аромата эффективный оператор размерности-5 [21; 142–145]

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} \supset \sum_{i=e,\mu,\tau} \left[\frac{c_i}{\Lambda} \phi \bar{E}_L^i H e_R^i + \text{h. c.} \right],$$

где c_i - коэффициент Вильсона для индекса аромата $i = (e, \mu, \tau)$, H , E_L^i и e_R^i - дублет Хиггса, лептонный дублет и лептонный синглет, соответ-

ственно. Далее, можно выбрать связь медиатора ϕ только с одним ароматом, чтобы избежать не сохраняющихся лептонно-флейворных токов, в частности, $c_e \neq 0$ и $c_\mu \equiv c_\tau \equiv 0$ [21; 142]. Диагонализируя массовые члены после нарушения электрослабой симметрии в рамках эффективной теории поля теории [29; 146; 147], можно получить связь между частицами Стандартной модели и скалярным медиатором. В частности, фокусируясь на скалярном медиаторе, который взаимодействует только с электроном из частиц видимого сектора, и различных типах темной материи, используются следующие эффективные лагранжианы взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^S \supset \frac{1}{2}c_{SS}^\phi \phi S^2 + c_{ee}^\phi \phi \bar{e}e, \quad (1.32)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^\psi \supset c_{\psi\psi}^\phi \phi \bar{\psi}\psi + c_{ee}^\phi \phi \bar{e}e, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^\chi \supset \frac{1}{2}c_{\chi\chi}^\phi \phi \bar{\chi}\chi + c_{ee}^\phi \phi \bar{e}e, \quad (1.34)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^V \supset \frac{1}{4}c_{VV}^\phi \phi V^{\mu\nu} \tilde{V}_{\mu\nu} + c_{ee}^\phi \phi \bar{e}e, \quad (1.35)$$

где c_{SS}^ϕ , $c_{\psi\psi}^\phi$, $c_{\chi\chi}^\phi$, c_{VV}^ϕ - константы взаимодействия скалярного медиатора и различных типов темной материи как: вещественной скалярной S [146], дираковской ψ [29; 145], майорановской χ [21; 146] и векторной V_μ [34; 148–150], соответственно; c_{ee}^ϕ - константа связи между скалярным медиатором и электроном [21; 142]; $V^{\mu\nu}$ - тензор напряженности поля и $\tilde{V}_{\mu\nu} = 1/2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\alpha\beta}$ - дуальный тензор напряженности поля. Для расчета матричных элементов использовались известные правила Фейнмана. Дополнительно, для проверки в случае майорановской темной материи использовался формализм двухкомпонентных спиноров из источника [151]. Также стоит отметить, что для констант взаимодействия медиатора и темной материи вводится постоянная для скрытого сектора $\alpha_{\text{DM}} = (c_{\text{DM DM}}^{\text{MED}})^2/(4\pi)$ по аналогии с постоянной тонкой структуры.

1.3.2 Тензорный медиатор

В данном разделе рассматривается минимальное расширение Стандартной модели добавлением массивного медиатора спина 2, который описывается полем $G_{\mu\nu}$. Предполагается, что массивный тензорный медиатор взаимодействует со Стандартной моделью только через лептон и фотон с универсальной свя-

зью. Кроме того, взаимодействие массивного тензорного медиатора и материи рассматривается на древесном уровне.

1.3.2.1 Дополнительные измерения

Идея о дополнительном измерении была предложена в 20-х и 30-х годах 19 века для объединения единственных известных на тот момент электромагнитных и гравитационных сил Гуннаром Нордстрёмом в рамках ньютоновской механики [152] и Теодором Калуцей в рамках общей теории относительности [153]. Далее, Оскар Клейн [154] дал интерпретацию дополнительному измерению в рамках квантовой механики и ввел гипотезу о компактности дополнительного измерения для соответствия наблюдаемому 4-мерному пространству. В рамках оригинальной теории Калуцы-Клейна характерный масштаб дополнительного измерения был планковский и, как следствие, приводил к значениям массы электрона сравнимой с этой шкалой.

Также стоит отметить, что одно из дальнейших расширений идеи о скрытых дополнительных измерениях было использовано в рамках модели Рэндалл-Сандрума [155; 156] для решения проблемы иерархии в физике элементарных частиц. В рамках данного подхода материя находится на многообразии, называемом брана, вложенном в объемлющее пространство с заданной 5-мерной метрикой следующего вида:

$$ds^2 = \omega^2(z)(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2) \quad (1.36)$$

где $z \in [z_0, z_1]$ - дополнительное измерение, z_0, z_1 - положения браны с частицами Стандартной модели и скрытого сектора, соответственно. Компактность пространства приводит к появлению различных мод частиц Калуцы-Клейна, которые образуют башню Калуцы-Клейна. Кроме того, теория Рэндалл-Сандрума может быть использована для введения взаимодействия частиц Стандартной модели и темного сектора [36; 37].

1.3.2.2 Свободное поле

Рассмотрим линеаризованную теорию для массивной частицы спина 2 $G^{\mu\nu}$ в виде [157]:

$$S_{\text{FP}} = -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\sigma G_{\mu\nu} \partial^\sigma G^{\mu\nu} - 2\partial_\mu G_{\nu\sigma} \partial^\nu G^{\mu\sigma} + \\ + 2\partial_\mu G^{\mu\nu} \partial_\nu G - \partial_\sigma G \partial^\sigma G - m_G^2 (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - G^2)], \quad (1.37)$$

где $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$ - метрика Минковского; m_G - масса массивного тензорного медиатора и обозначено $G = G_\mu{}^\mu$. Далее, варьируя действие (1.37) по полю массивного тензорного медиатора $G^{\mu\nu}$, уравнение Фирца-Паули принимает следующий вид:

$$\partial_\sigma \partial^\sigma G^{\mu\nu} - \partial_\sigma \partial_\mu G^\sigma{}_\nu - \partial_\sigma \partial_\nu G^\sigma{}_\mu + \\ + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma G^{\lambda\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu G - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial^\sigma G + m_G^2 (G_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} G) = 0. \quad (1.38)$$

Поддействовав на уравнения выше производной ∂^μ , справедливо дополнительное условие $\partial^\mu (G_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} G) = 0$, которое упрощает уравнение движения:

$$\partial_\sigma \partial^\sigma G^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu G + m_G^2 (G_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} G) = 0.$$

Свернув промежуточное выражение с метрическим тензором $\eta_{\mu\nu}$, получим условие нулевого следа для массивного тензорного медиатора $G = 0$, и, следовательно, влечет $\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0$. В итоге, уравнение движения массивного тензорного медиатора представляет собой уравнение Клейна-Гордона $(\partial_\sigma \partial^\sigma + m_G^2) G_{\mu\nu} = 0$, и справедливо его классическое решение в виде суммы плоских волн.

Далее, для произвольной размерности D , из симметричности поля $G_{\mu\nu}$ число соответствующих степеней свободы равно $D(D+1)/2$, а с учетом условий $\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0$ и $G = 0$, число степеней свободы уменьшается до $(D^2 - D - 2)/2$, в частности, при $D = 4$ число степеней свободы равно 5. Сумма по поляризациям частицы со спином 2 принимает вид:

$$P^{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_\lambda \varepsilon^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \lambda) = \\ = \frac{1}{2} (P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta} P^{\nu\alpha}) - \frac{1}{D-1-\xi} P^{\mu\nu} P^{\alpha\beta}, \quad (1.39)$$

где $P^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} + (1 - \xi)p^\mu p^\nu / m_G^2$; p^μ - импульс тензорного медиатора; $\xi = 1$ - калибровка Фейнмана (безмассовый тензорный медиатор), $\xi = 0$ - калибровка Ландау (массивный тензорный медиатор) и для $P^{\mu\nu\alpha\beta}$ учтены соотношения симметрии: $(\mu \leftrightarrow \nu)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ и $(\mu \leftrightarrow \alpha, \nu \leftrightarrow \beta)$, которые параметризуют сумму по поляризациям через $P^{\mu\nu}$ и p^μ в общем виде. В результате, пропатор массивного тензорный медиатор в импульсном представлении принимает следующий вид [36; 158]:

$$\mathcal{D}_G^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = iP^{\mu\nu\alpha\beta} / (p^2 - m_G^2). \quad (1.40)$$

1.3.2.3 Взаимодействие

Рассмотрим взаимодействие массивного тензорного медиатора и материи на древесном уровне. Эффективный лагранжиан взаимодействия массивного медиатора спина 2 и материи Стандартной модели и темного сектора можно записать как [36; 37]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^G \supset - \sum_i c_i^G G^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^i, \quad (1.41)$$

где $c_i^G = (c_{\text{SM}}^G, c_{\text{DM}}^G)$ - размерные константы взаимодействия для тензорного медиатора и частиц Стандартной модели и скрытого сектора, размерность которых связана с масштабом новой физики и $T_{\mu\nu}^i$ - симметризованный тензор энергии-импульса (ТЭИ) [83; 159] для частиц Стандартной модели ($i = \text{SM}$) и темного сектора ($i = \text{DM}$).

Для массивных скалярного S , векторного V и диракового фермионного ψ полей, симметризованный ТЭИ темного сектора принимает вид, соответственно [37; 160]:

$$T_{\mu\nu}^S = \partial_\mu S \partial_\nu S - (1/2)\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho S)^2 + (1/2)\eta_{\mu\nu}m_S^2 S^2, \quad (1.42)$$

$$T_{\mu\nu}^V = \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}V_{\lambda\rho}V^{\lambda\rho} - V_{\mu\lambda}V^\lambda{}_\nu + m_V^2 V_\mu V_\nu - (1/2)m_V^2\eta_{\mu\nu}V_\alpha V^\alpha, \quad (1.43)$$

$$T_{\mu\nu}^\psi = -(i/4)\bar{\psi} \left[\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right] \psi + \eta_{\mu\nu}m_{\text{DM}}\bar{\psi}\psi + (i/2)\eta_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\rho \overleftrightarrow{\partial}_\rho \psi, \quad (1.44)$$

где m_{DM} - масса соответствующего типа темной материи и использовано обозначение $\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi = (\partial_\mu \bar{\psi}) \psi - \bar{\psi} (\partial_\mu \psi)$. Далее, на основе приведенных выше выражений для симметризованного ТЭИ, для скалярного, векторного и спинорного

полей, справедливы следующие правила Фейнмана, соответственно [36]:

$$T_{\mu\nu}^{\text{GSS}}(q_1, q_2) = -ic_{\text{SS}}^{\text{G}} [\eta_{\mu\nu} m_{\text{DM}}^2 - C_{\mu\nu\alpha\beta} q_1^\alpha q_2^\beta], \quad (1.45)$$

$$T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{GVV}}(k_1, k_2) = -ic_{\text{VV}}^{\text{G}} [m_{\text{DM}}^2 C_{\mu\nu\alpha\beta} + (C_{\mu\nu\alpha\beta\sigma\lambda} + C_{\nu\mu\alpha\beta\sigma\lambda}) k_1^\sigma k_2^\lambda], \quad (1.46)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{G}\psi\psi}(p_1, p_2) = \frac{-ic_{\psi\psi}^{\text{G}}}{4} \left[\gamma_\mu (p_1 + p_2)_\nu + \gamma_\nu (p_1 + p_2)_\mu - 2\eta_{\mu\nu} (\not{p}_1 + \not{p}_2 - 2m_{\text{DM}}) \right], \quad (1.47)$$

где p_1, p_2 - 4-импульсы влетающего и вылетающего фермионов; q_1, q_2 - 4-импульсы влетающих скаляров; k_1, k_2 - 4-импульсы влетающих векторных частиц $V^\alpha(k_1)$ и $V^\beta(k_2)$ и используется обозначения:

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

$$C_{\mu\nu\alpha\beta\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\eta_{\beta\sigma}\eta_{\alpha\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\eta_{\alpha\beta}) + \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\lambda} + \eta_{\mu\alpha}(\eta_{\beta\nu}\eta_{\sigma\lambda} - \eta_{\sigma\beta}\eta_{\lambda\nu}).$$

Далее, рассмотрим взаимодействие массивного тензорного медиатора в рамках квантовой электродинамики. В этом случае тензор энергии-импульса для частиц Стандартной модели [160]:

$$T_{\mu\nu}^{\text{SM}} = \left[\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} - F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu \right] - \frac{i}{4}\bar{l} \left[\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right] l + \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu} \bar{l} \gamma_\rho \overleftrightarrow{D}^\rho l, \quad (1.48)$$

где l - лептон стандартной модели; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - тензор напряженности для фотонного поля A_μ стандартной модели; $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ - ковариантная производная для $U(1)$ калибровочного поля и использовано обозначение $\bar{l} \overleftrightarrow{D}_\mu l = [D_\mu^* \bar{l}] l - \bar{l} [D_\mu l]$. Аналогично, для лептонного и фотонного полей получим:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Gl}} = -ic_{ll}^{\text{G}}/4 \left[\gamma_\mu (p_1 + p_2)_\nu + \gamma_\nu (p_1 + p_2)_\mu - 2\eta_{\mu\nu} (\not{p}_1 + \not{p}_2 - 2m_l) \right], \quad (1.49)$$

$$T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{G}\gamma\gamma} = -ic_{ll}^{\text{G}} (C_{\mu\nu\alpha\beta\sigma\lambda} + C_{\nu\mu\alpha\beta\sigma\lambda}) k_1^\sigma k_2^\lambda, \quad (1.50)$$

где p_1, p_2 - 4-импульсы влетающего и вылетающего лептонов, соответственно; k_1, k_2 - 4-импульсы вылетающих фотонов. Кроме того, из ковариантной производной возникает контактная вершина, для которой взаимодействие описывается в виде:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Gl}\gamma} = -ic_{li}^{\text{G}} e/2 [\eta_{\alpha\nu} \gamma_\mu + \eta_{\mu\alpha} \gamma_\nu - 2\eta_{\mu\nu} \gamma_\alpha]. \quad (1.51)$$

Мы будем использовать универсальную константу взаимодействия тензорного медиатора с фотоном и сектором заряженных лептонов [37].

Результаты первой главы

В данном разделе рассмотрены основные экспериментальные наблюдения, которые мотивируют введение скрытой массы и дают ограничения на параметры для легкой термальной темной материи и необходимых для нее медиаторов. Далее, кратко приведена методика расчета реликтовой плотности для темной материи, что позволяет в комбинации с экспериментами ограничивать природу различных типов легкой темной материи и ее медиаторов. Также, рассмотрены эффективные лагранжианы взаимодействия для скалярного и тензорного медиаторов скрытого сектора в случае взаимодействия с заряженным лептоном.

Глава 2

Рождение медиатора скрытого сектора в экспериментах с фиксированной мишенью

Комбинация преимуществ высокой интенсивности и достаточно большой энергии налетающего пучка в экспериментах с фиксированной мишенью может усилить существующие ограничения в области термальной легкой темной материи. В случае невидимой моды, т.е. когда медиатор преимущественно распадается в частицы темного сектора, переход энергии в темный сектор может произойти при излучении медиатора в случае рассеяния высокоэнергетического лептона на ядрах мишени [53; 54; 161] и при аннигиляции через медиатор вторичных позитронов электромагнитного ливня на атомных электронах после взаимодействия первичного пучка с мишенью [56; 57]. В случае рождения медиатора на ядрах мишени можно использовать приближение Вайцзеккера-Вильямса, которое аппроксимирует сечение, посчитанное в древесном приближении без использования упрощений интегрирования по фазовому объему вылетающих частиц. Кроме того, резонансные процессы аннигиляции через медиатор могут быть рассчитаны через формулу Брейта-Вигнера. Далее, в разделе 2.1 обсуждается вычисление сечения рождения медиатора в поле ядра в невидимой моде, также в разделе 2.2 рассматриваются процессы аннигиляции через медиатор.

2.1 Сечение рождения медиатора в поле ядра

Процесс рождения медиатора в контексте невидимой моды экспериментов с фиксированной мишенью может быть представлен как процесс рассеяния высокоэнергичного лептона на тяжелых ядрах мишени. В этом случае, сечение рождения медиатора на ядрах мишени может быть вычислено с использованием расчетов на древесном уровне и приближения Вайцзеккера-Вильямса, где учет взаимодействия налетающего лептона с ядром задан через форм-фактор. Кроме того, различные модели форм-факторов могут оказывать влияние на конечную форму дифференциальных сечений, что может сказаться на соответствующих ограничениях для легкой темной материи. Далее, в разделе 2.1.1

приводятся соответствующие матричные элементы для процесса рождения скалярного и тензорного медиаторов в поле ядра. Также, в разделах 2.1.2 и 2.1.3 приводятся вычисления дифференциальных сечений в случае расчетов на древесном уровне и в приближении Вайцзеккера-Вильямса для рассматриваемого процесса, соответственно.

2.1.1 Матричные элементы

В данном разделе рассматриваются общая для экспериментов с фиксированной мишенью кинематика (раздел 2.1.1.1), используемые модели формфакторов (раздел 2.1.1.2), а также соответствующие матричные элементы для скалярного и тензорного медиаторов (раздел 2.1.1.3) для процесса рождения медиатора в поле ядра.

2.1.1.1 Кинематика

Предполагая, что ядро в начальный момент времени покоилось, тогда соответствующий процесс $2 \rightarrow 3$ с кинематической точки зрения может быть представлен в виде:

$$l^\pm(p) + N(P_i) \rightarrow l^\pm(p') + N(P_f) + \text{MED}(k), \quad (2.1)$$

где $p = (E_l, \mathbf{p})$, $p' = (E'_l, \mathbf{p}')$ - импульсы входящего и выходящего лептонов, соответственно, $k = (E_{\text{MED}}, \mathbf{k})$ - импульс медиатора, $P_i = (M, 0)$ и $P_f = (P_f^0, \mathbf{P}_f)$ - импульсы исходного и конечного ядер, соответственно, $q = (q_0, \mathbf{q}) \equiv P_i - P_f$ - переданный ядру импульс и виртуальность фотона t :

$$t \equiv -q^2 = -(P_i - P_f)^2 = 2M \left(\sqrt{M^2 + P_f^2} - M \right) > 0. \quad (2.2)$$

Тогда, переменные Манделъштама для реакции $2 \rightarrow 3$ удобно ввести в следующем согласованном с литературой виде [53]:

$$\tilde{s} = (p' + k)^2 - m_l^2, \quad \tilde{u} = (p - k)^2 - m_l^2, \quad \tilde{t} = (p - p')^2 - m_{\text{MED}}^2, \quad (2.3)$$

для полученных переменных (2.3) выполняется $\tilde{s} + \tilde{u} + \tilde{t} = t$. Далее, используя уравнения на массовой оболочке как $p'^2 = m_l^2$ и $P_f^2 = M^2$, получим следующие

уравнения:

$$q_0 = -t/(2M) \approx 0, \quad |\mathbf{q}|^2 = t^2/(4M^2) + t, \quad t = 2M(\sqrt{M^2 + |\mathbf{q}|^2} - M) \approx |\mathbf{q}|^2, \quad (2.4)$$

где приняты во внимание следующие типичные величины $|\mathbf{q}| \lesssim \mathcal{O}(100)$ МэВ и $M \propto \mathcal{O}(100)$ ГэВ для экспериментов с фиксированной мишенью [54].

Процессу рождения медиатора при торможении лептона в поля тяжелого ядра (2.1) соответствует комптон-подобный процесс:

$$l^\pm(p) + \gamma(q) \rightarrow l^\pm(p') + \text{MED}(k), \quad (2.5)$$

также удобно ввести переменные Мандельштама в следующем виде:

$$s_2 = (p+q)^2 = (p'+k)^2, \quad u_2 = (p-k)^2 = (p'-q)^2, \quad t_2 = (p-p')^2 = (q-k)^2, \quad (2.6)$$

где обозначения для процессов $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ согласованы. А именно, скалярные произведения для соответствующих импульсов комптон-подобного процесса получаются из скалярных произведений для процесса $2 \rightarrow 3$ при $t = 0$, т.е. когда фотон находится на массовой оболочке.

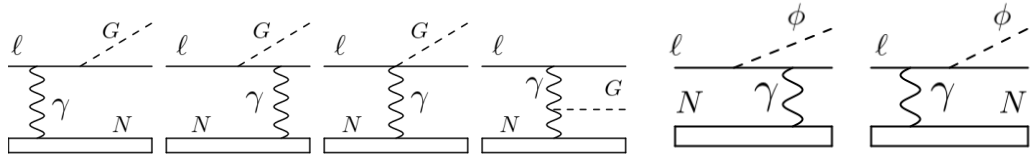


Рисунок 2.1 — Диаграммы процессов излучения скалярного ϕ и тензорного G медиаторов в поле ядра N при падении на ядро лептона l .

2.1.1.2 Атомные и ядерные форм-факторы

В общем случае, взаимодействие электромагнитного поля и адрона может быть эффективно представлено как [162]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu \mathcal{J}^\mu, \quad (2.7)$$

где \mathcal{J}^μ - адронный ток. Стоит отметить, что из-за сложности устройства внутренней структуры адронов, ток \mathcal{J}^μ описывается феноменологически, где структура адронного тока устанавливается исходя из общих кинематических соображений, в частности, что приводит к параметризации тока форм-факторами [55].

Важную роль в интерпретации форм-факторов играет система отсчета Брейта, в которой начальная и конечная энергии адрона совпадают, и,

как следствие, для квадрата переданного импульса в этой системе справедливо $t = |\mathbf{q}|^2 > 0$ [163]. Как можно заметить, выражение для t согласуется с полученным выражением (2.43) для кинематики экспериментов с фиксированной мишенью. В общем случае лабораторная система нетривиально связана с системой Брейта. Однако, для тяжелых ядер типичный импульс передачи равен $|\mathbf{q}| \lesssim 100$ МэВ, а типичная масса ядра равна $M \propto \mathcal{O}(100)$ ГэВ. Тогда, с учетом $|\mathbf{q}| \ll M$, изменением начального и конечного состояний ядра можно пренебречь, поэтому система Брейта в этом случае совпадает с системой покоя ядра, т.е. лабораторной системой [55]. Связь между углами в лабораторной системе θ_L и системе Брейта θ_B принимает следующий вид [164]:

$$\cos^2(\theta_B/2) = \cos^2(\theta_L/2)/(1 + \tau), \quad \tau = q^2/(4M^2) \ll 1 \Rightarrow \theta_B \approx \theta_L. \quad (2.8)$$

Следовательно, в дальнейших рассуждениях используется лабораторная система и индекс для лабораторной системы и системы Брейта может быть опущен. В случае упругих взаимодействий тип адрона не меняется, и, как следствие, форм-факторы зависят только от квадрата переданного импульса, т.е. $(P, q) = 0$, где $P = P_i + P_f$.

Ток перехода при электромагнитном взаимодействии для бесспинового тяжелого ядра в общем случае [53; 54; 161; 165; 166] может быть записан как:

$$\mathcal{J}^\mu = F_s(t)(P_f + P_i)^\mu, \quad (2.9)$$

где $F_s(t)$ - скалярный форм-фактор, который является положительной вещественной функцией при $t > 0$. Для тяжелых ядер форм-фактор связан с плотностью заряда ядра в лабораторной системе отсчета через обратное преобразование Фурье [167]:

$$F(t) = \int \rho(r) e^{itr} d^3r = 4\pi \int \frac{r}{t} \rho(r) \sin(tr) dr, \quad (2.10)$$

где $\rho(r)$ - соответствующая ядерная плотность. Действительно, для тяжелых ядер вклад от магнитного форм-фактора либо отсутствует, либо им можно пренебречь [55; 166]. Тогда, в этом случае внутренняя структура бесспинового ядра при электромагнитном взаимодействии влияет только через пространственное распределение заряда и соответствующий форм-фактор, при нулевом переданном импульсе, характеризует эффективный заряд рассматриваемой системы.

Далее, принимая во внимание экранирование ядра кулоновским полем за счет атомных электронов, ядерный форм-фактор, связанный только с зарядовой плотностью ядра, переходит в атомный форм-фактор, который учитывает соответствующий эффект экранирования. Действительно, в пределе малых переданных импульсов, т.е. $t \rightarrow 0$, ядерный форм-фактор ведет себя как $F_{\text{nuc1}}(t) \rightarrow 1$, в отличие от атомного форм-фактора, для которого справедливо $F_{\text{atom}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Кроме того, плотность экранирующего заряда атомного форм-фактора может быть представлена как свертка плотности заряда ядра с удельной плотностью экранирования. В частности, используя свойства Фурье преобразований, для получения атомного форм-фактора следует умножить ядерный форм-фактор (2.10) на экранирующий множитель $t/(t_a + t)$, использованный Л. Шиффом [168], который представляет собой форм-фактор экранированного атома водорода [50].

Рассмотрим упругий форм-фактор для атома, который был использован Тсаи [51] и Шиффом [169], в следующем виде [53]:

$$F_{\text{TS}}(t) = \frac{t}{(t_a + t)} F_{\text{TS}_{\text{nuc1}}}(t), \quad F_{\text{TS}_{\text{nuc1}}}(t) = \frac{1}{(1 + t/t_d)}, \quad (2.11)$$

где $\sqrt{t_a} = 1/R_a$ - типичный импульс, связанный с экранировкой ядра кулоновским полем от атомных электронов, $R_a = 111Z^{-1/3}/m_e$ - типичная величина атомного радиуса, $\sqrt{t_d} = 1/R_n$ - типичный импульс, связанный с размером ядра, $R_n \simeq 1/\sqrt{d}$ и $d = 0.164A^{-2/3}$ ГэВ². Также стоит отметить, что ядерному форм-фактору $F_{\text{TS}_{\text{nuc1}}}(t)$ соответствует зарядовая плотность Юкавы [167]. В частности, если $t/t_a \ll 1$, то имеет место режим полного экранирования, что означает малый переданный ядром импульс и характерные значения атомного упругого форм-фактора много меньше единицы, $F_{\text{TS}}(t) \simeq t/t_a \ll 1$. С другой стороны, режима экранирования не возникает при $t/t_a \gg 1$. В этом случае упругий форм-фактор атома ведет себя как $F_{\text{TS}}(t) \simeq 1/(1 + t/t_d)$ и преобладает вклад от учета размера ядра.

Далее, перейдем к ядерному форм-фактору Хельма $F_{\text{H}_{\text{nuc1}}}(t)$, который связан с плотностью заряда как свертка сферически однородного заряда внутри ядра и гауссовского профиля для более точного учета края ядра [170]. Тогда, ядерный форм-фактор Хелма $F_{\text{H}_{\text{nuc1}}}(t)$ и соответствующий атомный форм-фак-

тор Хельма $F_{\text{H}}(t)$ принимают вид [35; 171]:

$$F_{\text{H}_{\text{nucl}}}(t) = \frac{3j_1(\sqrt{t}R_{\text{H}})}{\sqrt{t}R_{\text{H}}} e^{-s_{\text{H}}^2 t/2}, \quad F_{\text{H}}(t) = t/(t_{\text{a}} + t) F_{\text{H}_{\text{nucl}}}(t), \quad (2.12)$$

где $j_1(x)$ - сферическая функция Бесселя первого рода, эффективный ядерный радиус R_{H} может быть параметризован как:

$$R_{\text{H}} = \sqrt{c_{\text{H}}^2 + (7/3)\pi^2 a_{\text{H}}^2 - 5s_{\text{H}}^2},$$

где $s_{\text{H}} = 0.9$ фм - толщина ядерной оболочки, $a_{\text{H}} = 0.52$ фм и $c_{\text{H}} = (1.23A^{1/3} - 0.6)$ фм. Стоит отметить, что для форм-фактора Хельма используется условие $F_{\text{H}_{\text{nucl}}} = 0$ при $t \gtrsim (4.49/R_{\text{H}})^2$, т.е. значением форм-фактора в этом интервале квадрата переданного импульса ядру можно пренебречь [35].

Рассмотрим экспоненциальный атомный форм-фактор, который принимает вид [172]:

$$F_{\text{E}}(t) = t/(t_{\text{a}} + t) \exp(-tR_{\text{exp}}^2/6), \quad (2.13)$$

где средний радиус ядра определяется как $R_{\text{exp}} = (0,91A^{1/3} + 0,3)$ фм. Как обсуждалось выше, для учета экранирования кулоновского поля ядра атомными электронами в уравнении (2.13) введен экранирующий множитель $t/(t_{\text{a}} + t)$.

Опишем поведение упругих форм-факторов $F(t)$, в зависимости от квадрата переданного импульса t , что показано на графике 2.2. При значениях t от $\mathcal{O}(10^{-8})$ ГэВ² до $\mathcal{O}(10^{-3})$ ГэВ² все рассматриваемые атомные и ядерные форм-факторы принимают значение $\mathcal{O}(1)$ ГэВ², однако при значениях $t \lesssim \mathcal{O}(10^{-8})$ ГэВ² атомные форм-факторы стремятся к 0, а ядерный форм-фактор принимает постоянное значение $\mathcal{O}(1)$. При $t \gtrsim \mathcal{O}(10^{-3})$ ГэВ² ядерные форм-факторы совпадают с соответствующими атомными форм-факторами. Кроме того, в этой области происходит резкое падение значений форм-фактора. В частности, резкое падение происходит для хельмовского форм-фактора при $t \simeq \mathcal{O}(10^{-2})$ ГэВ², для экспоненциального при $t \simeq \mathcal{O}(10^{-1})$ ГэВ², однако форм-фактор Тсаи-Шиффа падает достаточно медленно, по степенному закону. Стоит отметить, что существуют также модели форм-фактора, учитывающие плотность заряда как сумму функций Гаусса, Фурье-Бесселя и плотности заряда Клейна-Нистранда [167; 173–176]. Также, в литературе обсуждается распределение Ферми для заряда ядра [171; 175].

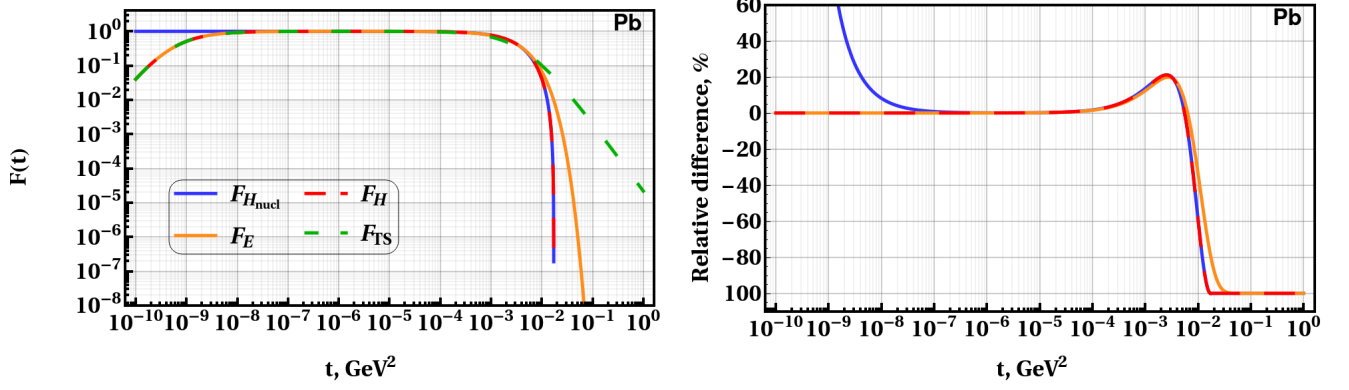


Рисунок 2.2 — (Слева) форм-факторы как функция от квадрата переданного импульса для форм-факторов Тсаи-Шиффа F_{TS} (зеленая пунктирная линия), ядерного Хелма $F_{H_{nucl}}$ (синяя сплошная линия), атомного Хелма F_H (красная пунктирная линия) и атомного экспоненциального F_E (оранжевая пунктирная линия). (Справа) относительная разница между эталонным форм-фактором Тсаи-Шиффа и другими форм-факторами.

2.1.1.3 Матричные элементы

Матричный элемент для процесса излучения медиатора в поле ядер мишени (2.1) может быть записан как:

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 3}^{\text{MED}} = c_{ll}^{\text{MED}} e^2 \mathcal{L}^\mu \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) \mathcal{J}^\nu = C_{\mathcal{M}} \mathcal{L}^\mu P_\mu, \quad (2.14)$$

где \mathcal{L}^μ - лептонный ток с излучением медиатора; \mathcal{J}^ν - адронный ток (2.9); $F(t)$ - форм-фактор (2.10) и обозначено $C_{\mathcal{M}} = c_{ll}^{\text{MED}} Z e^2 F(-q^2)/q^2$. Напомним, что в случае тензорного медиатора константа связи c_{ll}^G имеет размерность ГэВ^{-1} , а в случае скалярного медиатора, c_{ll}^ϕ , эта константа связи безразмерна. Аналогично, матричный элемент для комптон-подобного процесса излучения медиатора (2.5) принимает следующий вид:

$$i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}} = ic_{ll}^{\text{MED}} e \mathcal{L}^\mu \varepsilon_\mu(q), \quad (2.15)$$

где для $\varepsilon_\mu(k)$ используется калибровка Ландау, а для $\varepsilon_\nu(q)$ применяется калибровка Фейнмана. Для лептонного тока с излучением спин-0 медиатора справедливо:

$$\mathcal{L}^\mu = \bar{u}(p') \left(\gamma^\mu \frac{\gamma_\sigma (p - k)^\sigma + m_l}{\tilde{u}} + \frac{\gamma_\sigma (p' + k)^\sigma + m_l}{\tilde{s}} \gamma^\mu \right) u(p). \quad (2.16)$$

Лептонный ток $\mathcal{L}^\mu = \sum_{i=1}^4 (\mathcal{L}_i)^\mu$ с излучением спин-2 медиатора состоит из слагаемых:

$$(\mathcal{L}_1)_\lambda = -i\varepsilon^{*\mu\nu}(k)\bar{u}(p')T_{\mu\nu}^{(Gll)}(p'+k, p')\frac{\not{p}' + \not{k} + m_l}{\tilde{s}}\gamma_\lambda u(p), \quad (2.17)$$

$$(\mathcal{L}_2)_\lambda = -i\varepsilon^{*\mu\nu}(k)\bar{u}(p')\gamma_\lambda\frac{\not{p} - \not{k} + m_l}{\tilde{u}}T_{\mu\nu}^{(Gll)}(p, p-k)u(p), \quad (2.18)$$

$$(\mathcal{L}_3)_\lambda = -i\varepsilon^{*\mu\nu}(k)\bar{u}(p')\left(T_{\mu\nu\lambda}^{(Gll\gamma)}/e\right)u(p), \quad (2.19)$$

$$(\mathcal{L}_4)_\lambda = +i\varepsilon^{*\mu\nu}(k)T_{\mu\nu\beta\lambda}^{(G\gamma\gamma)}(p-p', q)\bar{u}(p')\frac{\gamma^\beta}{\tilde{t} + m_{\text{MED}}^2}u(p). \quad (2.20)$$

Соответствующие усредненные по начальным и просуммированные по конечным состояниям квадраты матричных элементов для излучения медиатора в поле ядра $|\overline{\mathcal{M}_{2\rightarrow 3}^{\text{MED}}}|^2$ и в комптон-подобном процессе $|\overline{\mathcal{M}_{2\rightarrow 2}^{\text{MED}}}|^2$ могут быть найдены в приложении [A.1](#).

2.1.2 Излучение медиатора на древесном уровне

В данном разделе, рассмотрим расчет сечения на древесном уровне для процесса рождения медиатора в поле ядра. В кинематике частиц рассматривается влияние законов сохранения на систему, где каждая частица характеризуется 4-импульсом и массой. Конечное состояние из n частиц в реакции задают $(3n-4)$ -мерную поверхность в импульсном пространстве. Также в случае столкновения двух частиц конечные состояния не зависят от вращения вокруг оси пучка, т.е. система задана как $(3n-5)$ -мерная поверхностью [177].

Дифференциальное сечение рассеяния для процесса $2 \rightarrow 3$ и инвариантный объем импульсного пространства принимают вид, соответственно:

$$d\sigma_{2\rightarrow 3} = \frac{|\overline{\mathcal{M}_{2\rightarrow 3}^{\text{MED}}}|^2}{4I}d\Pi, \quad d\Pi = \frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-k)d\mathbf{p}'d\mathbf{P}_fd\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{p'}(2\pi)^3 2E_{P_f}(2\pi)^3 2E_k} \quad (2.21)$$

где $I = \sqrt{(p, P_i)^2 - m_i^2 M^2}$ - инвариант Миллера. Кроме того, в лабораторной системе справедливо $I = |\mathbf{p}|M$

Для интегрирования по конечным состояниям процесса $2 \rightarrow 3$ выберем в качестве независимых переменных: полярный θ_q и азимутальный ϕ_q углы вектора $\mathbf{q} = -\mathbf{P}_f$, угол $\theta_{\text{MED}} = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ и долю энергии медиатора $x = k_0/p_0$ [161]. Также стоит отметить, что приведенный набор переменных позволяет получить дифференциальное сечение по параметрам медиатора, но аналогичные выраже-

ния можно получить и для пространства рассеиваемой частицы при замене:

$$k \leftrightarrow p' \quad x \rightarrow y = p'_0/p_0, \quad \theta_{\text{MED}} \rightarrow \psi_{l'} = \angle(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \quad (2.22)$$

Действительно, матричные элементы выражаются через инвариантные переменные и не зависят от кинематической постановки.

Для получения двойного дифференциального сечения по параметрам медиатора введем следующую систему координат [161], где ось Oz параллельна пространственной части вспомогательного вектора $V \equiv k - p$, вектор \mathbf{k} лежит в плоскости xOz и для сферической системы координат выделенной осью является Oz . Тогда, используя теорему косинусов для соответствующих углов, справедливы следующие соотношения:

$$\cos(\theta_q) = \frac{|\mathbf{q}|^2 + |\mathbf{V}|^2 - |\mathbf{p}'|^2}{2|\mathbf{q}||\mathbf{V}|}, \quad \cos(\theta_{p_z}) = -\frac{|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{V}|^2 - |\mathbf{k}|^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{V}|} \quad (2.23)$$

где $|\mathbf{p}'|^2 = (q_0 - V_0)^2 - m_l^2$ и $V_0 = -E_l(1 - x) < 0$ и справедливо:

$$|\mathbf{V}|^2 = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos(\theta_{\text{MED}}). \quad (2.24)$$

Стоит отметить, что изменение знака возникло из-за учета направления векторов и смежных углов. Кроме того, с учетом $q_0 < 0$ и $E'_l > m_l$, возникает дополнительное кинематическое ограничение на виртуальность переданного фотона как:

$$E'_l = q_0 - V_0 > m_l \Rightarrow t \leq 2M(E_l(1 - x) - m_l), \quad (2.25)$$

т.е. при больших x и θ_{MED} возникают дополнительное зануление сечения из-за приведенного выше кинематического ограничения. Далее, найдем выражение пространственной части вектора переданного импульса через полярный угол θ_q . В этом случае для процесса $2 \rightarrow 3$ на основе соотношения $(q - V)^2 = p'^2$ получим уравнение на $|\mathbf{q}|$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{4|\mathbf{V}|^2 \cos^2(\theta_q) - 4d_{V_0}^2\} |\mathbf{q}|^2 + \{4|\mathbf{V}| \cos(\theta_q)(\tilde{u} + 2Md_{V_0})\} |\mathbf{q}| + \\ + \{\tilde{u}^2 + 4Md_{V_0}\tilde{u}\} = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где обозначено $(M - V_0) = E'_l + P_{f_0} = d_{V_0} > 0$. В итоге, модуль пространственной части вектора переданного импульса выражается через угол θ_q как:

$$|\mathbf{q}| = \frac{|\mathbf{V}| \cos(\theta_q)(\tilde{u} + 2Md_{V_0}) \pm d_{V_0} \sqrt{4M^2|\mathbf{V}|^2 \cos^2(\theta_q) + \tilde{u}^2 + 4Md_{V_0}\tilde{u}}}{2d_{V_0}^2 - 2|\mathbf{V}|^2 \cos^2(\theta_q)}. \quad (2.27)$$

Так как $|\mathbf{q}| > 0$, то из выражения выше при $\theta_q = \pi/2$ следует выбор знака плюс. В итоге, учитывая связь $|\mathbf{q}|$ и t получим переход от виртуальности переданного фотона к углу θ_q . Далее, переменные Манделъштама \tilde{s} и \tilde{u} можно выразить через выбранные независимые переменные в следующем виде:

$$\tilde{u} = m_{\text{MED}}^2 - 2(p, k) \quad \tilde{s} = -t + 2(p, q), \quad (2.28)$$

через скалярные произведения:

$$(p, k) = E_0^2 x - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos(\theta_{\text{MED}}), \quad (p, q) = q_0 E_l - (\mathbf{p}_x \mathbf{q}_x + \mathbf{p}_z \mathbf{q}_z), \quad (2.29)$$

где учтено, что вектор \mathbf{p} лежит в плоскости xOz и соответствующие проекции принимают вид:

$$\mathbf{p}_x = |\mathbf{p}| \sin(\theta_{p_z}), \quad \mathbf{p}_z = |\mathbf{p}| \cos(\theta_{p_z}), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{q}_x = |\mathbf{q}| \sin(\theta_q) \cos(\phi_q), \quad \mathbf{q}_z = |\mathbf{q}| \cos(\theta_q). \quad (2.31)$$

Стоит отметить, что дополнительно меняется знак из-за учета направления векторов и смежных углов. Кроме того, переменную \tilde{s} можно связать с \tilde{u} следующим образом:

$$\tilde{s} = 2(k, q) - \tilde{u}, \quad (k, q) = q_0 E_l x - (\mathbf{k}_x \mathbf{q}_x + \mathbf{k}_z \mathbf{q}_z), \quad (2.32)$$

где соответствующие проекции и угол вектора \mathbf{k} с осью Oz принимают вид, соответственно:

$$\mathbf{k}_x = |\mathbf{k}| \sin(\theta_{k_z}), \quad \mathbf{k}_z = |\mathbf{k}| \cos(\theta_{k_z}), \quad \cos(\theta_{k_z}) = (|\mathbf{V}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{p}|^2) / (2|\mathbf{k}||\mathbf{V}|).$$

Далее, получим выражение двойного дифференциального сечения по параметрам медиатора. Через дельта-функции $\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}' - \mathbf{k})$ и $\delta(E_p + q_0 - E_{p'} - E_k)$ снимается интегрирование по \mathbf{p}' и $\cos(\theta_q)$, соответственно, с учетом выражения [178]:

$$\delta(E_p + q_0 - E_{p'} - E_k) = \frac{E'_l}{|\mathbf{q}||\mathbf{V}|} \frac{\delta(f(|\mathbf{q}|) - \cos(\theta_q))}{\sqrt{M^2 + |\mathbf{q}|^2}} \Theta(1 - \cos^2(\theta_q)), \quad (2.33)$$

где $f(|\mathbf{q}|)$ представляет собой выражение (2.23) и функция Хевисайда $\Theta(x)$ введена для учета конечных пределов изменения для $\cos(\theta_q)$. Конечное выражение для дифференциального сечения по параметрам излученного медиатора интегрируется по азимутальному углу ϕ_q и виртуальности фотона t , которая, в свою очередь, выражается через модуль пространственной части переданного

импульса $|\mathbf{q}|$. Тогда, для инвариантного объема справедливо:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{M}{32\pi^4} \Theta(1 - \cos^2(\theta_q)) \frac{dt}{8M^2} \frac{d\phi_q}{2\pi} \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{V}|E_l x} = \\ &= \frac{2\pi M}{32\pi^4} \Theta(1 - \cos^2(\theta_q)) \frac{|\mathbf{k}|E_l}{|\mathbf{V}|} \frac{dt}{8M^2} \frac{d\phi_q}{2\pi} d\cos(\theta_{\text{MED}}) dx \frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{2\pi}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где учтено, что $dt = M(M^2 + |\mathbf{q}|^2)^{-1/2} d|\mathbf{q}|^2$.

В итоге, дифференциальное сечение для соответствующего процесса в переменных x и $\cos(\theta_{\text{MED}})$ для излученного медиатора принимает вид: [161]:

$$\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}}{dx d\cos(\theta_{\text{MED}})} = \frac{1}{64\pi^3} \frac{|\mathbf{k}|E_l}{|\mathbf{p}||\mathbf{k} - \mathbf{p}|} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \frac{1}{8M^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_q}{2\pi} |\mathcal{M}_{2 \rightarrow 3}^{\text{MED}}|^2, \quad (2.35)$$

где $x = E_{\text{MED}}/E_l$ — доля полной энергии медиатора относительно первоначального лептона; пределы интегрирования по виртуальности фотона выражаются из условия $|\cos(\theta_q)| < 1$, что позволяет избежать от функции Хевисайда, и принимают значения $t_{\max} = t(Q_+)$ и $t_{\min} = t(Q_-)$ с введенным обозначением:

$$Q_{\pm} = \left| \frac{|\mathbf{V}| [\tilde{u} + 2M(M - V_0)] \pm (M - V_0) \sqrt{4M^2|\mathbf{V}|^2 + \tilde{u}^2 + 4M(M - V_0)\tilde{u}}}{2(M - V_0)^2 - 2|\mathbf{V}|^2} \right|.$$

Кроме того, усредненный по начальным и просуммированный по конечным состояниям квадрат матричного элемента $|\mathcal{M}_{2 \rightarrow 3}^{\text{MED}}|^2$ рассматривается в разделе 2.1.1.3.

2.1.3 Излучение медиатора в методе Вайцзеккера-Вильямса

Для аппроксимации расчетов процесса рождения медиатора в поле ядра используется приближение Вайцзеккера-Вильямса [179; 180], в котором энергия налетающего лептона намного выше, чем массы лептона и медиатора m_l и m_{MED} , соответственно [181]. В случае электромагнитного взаимодействия одну из частиц можно заменить на эффективный поток фотонов, такой, что фазовое пространство тормозного излучения медиатора $2 \rightarrow 3$ сводится к комптоновскому процессу $2 \rightarrow 2$ [182]. В данной работе используется модифицированный метод Вайцзеккера-Вильямса, который адаптирован к процессам излучения частиц в поле ядра, где зависимость от структуры ядра выражается через форм-

факторы [50; 51]. В данном разделе рассматривается излучение медиатора в поле ядра в приближении Вайцзеккера-Вильямса. Кроме того, рассматривается выражение для минимальной виртуальности переданного фотона в разделе 2.1.3.1 и обсуждается влияние различных параметризацией форм-факторов на сечение в приближении Вайцзеккера-Вильямса в разделе 2.1.3.2. Также, в разделе 2.1.3.3 приводятся полученные аналитически интегралы, которые позволяют проинтегрировать по углу дважды дифференциальное сечение в случае различных медиаторов.

В общем случае, приближение Вайцзеккера-Вильямса для процесса $2 \rightarrow 3$ принимает следующий вид [50; 51; 53]:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{d(pk)d(kP_i)} \right|_{\text{WW}} = \frac{\alpha\chi}{\pi(p'P_i)} \left. \frac{d\sigma(p + q \rightarrow k + p')}{d(pk)} \right|_{t=t_{\min}}, \quad (2.36)$$

где t_{\min} - минимальное значение виртуальности и поток виртуальных фотонов χ выражается через упругий форм-фактор $F(t)$ следующим образом:

$$\chi = Z^2 \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{t - t_{\min}}{t^2} F^2(t) dt, \quad (2.37)$$

где Z — атомный номер ядра и форм-фактор $F(t)$ обсуждается в разделе 2.1.1.2. Формула (2.36) получена путем представления сечения через параметризацию структурными функциями и применения математических преобразований с учетом выражений $q^\mu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = 0$, что приводит к разделению на комптон-подобного процесс и поток фотонов [50; 51]. Учитывая, что направления лептона и медиатора в конечном состоянии почти коллинеарны в случае высокоэнергетического первичного лептона, для интеграла по фазовому пространству справедливо [50; 51; 161]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_q}{2\pi} \frac{|\mathcal{M}_{2 \rightarrow 3}^{\text{MED}}|^2}{8M^2} \approx \frac{t - t_{\min}}{2t_{\min}} |\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2_{t=t_{\min}}. \quad (2.38)$$

Для ультрарелятивистского падающего на мишень заряженного лептона в лабораторной системе справедливо:

$$d(kp)d(kP_i) \simeq M|\mathbf{p}||\mathbf{k}|d\cos(\theta_{\text{MED}})dE_{\text{MED}}, \quad (2.39)$$

где θ_{MED} — угол между направлениями начального лептона и медиатора. В итоге, подставив выражение (2.39) в уравнение (2.36), формула Вайцзеккера-

Вильямса принимает следующее выражение для двойного дифференциального сечения:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx d\cos(\theta_{\text{MED}})} \right|_{\text{WW}} = \frac{\alpha\chi E_l^2 x \beta_{\text{MED}}}{\pi (1-x)} \left. \frac{d\sigma(p + q \rightarrow k + p')}{d(pk)} \right|_{t=t_{\text{min}}}, \quad (2.40)$$

где $\alpha = e^2/(4\pi) \simeq 1/137$ - постоянная тонкой структуры и $\beta_{\text{MED}} = \sqrt{1 - m_{\text{MED}}^2/(xE_l)^2}$ - скорость медиатора. Для сечения комптон-подобного процесса $l + \gamma \rightarrow l + \text{MED}$ справедливо:

$$-\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}}{d(p \cdot k)} = 2 \frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}}{du_2} = \frac{|\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2}{8\pi(s_2 - m_l^2)^2} \quad (2.41)$$

где $|\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2$ - квадрат матричного элемента соответствующего комптоновского процесса, явный вид которого приведен в приложении для скалярного и тензорного медиаторов [A.1.1](#).

2.1.3.1 Минимальное значение виртуальности переданного фотона

В данном разделе рассматривается поведение минимального значения виртуальности переданного фотона, которые влияют на расчет сечения рождения медиатора на тяжёлом ядре в приближении Вайцзеккера-Вильямса.

Решая уравнения на массовой оболочке как $p'^2 = m_l^2$ и $P_f^2 = M^2$ и используя вспомогательный 4-вектор $V = p - k$ и отбрасывая $|\mathbf{q}|^2$ в формуле

$$q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + u_2 + 2q_0 V_0 - 2(\mathbf{q}, \mathbf{V}) = m_l^2. \quad (2.42)$$

получим следующее выражение для виртуальности:

$$t \simeq |\mathbf{q}|^2 \simeq \frac{(u_2 - m_l^2)^2}{4|\mathbf{V}|^2 \cos^2(\theta_{\mathbf{qV}})}, \quad (2.43)$$

где $\theta_{\mathbf{qV}}$ - угол между векторами \mathbf{q} и \mathbf{V} . Также, оставляя только ведущие члены как m_G^2/E_k^2 , m_l^2/E_l^2 , m_V^2/E_V^2 и θ_G^2 , получим приближенные выражения для модуля вектора $|\mathbf{V}| \simeq E_l(1-x)$ и введенной вспомогательной функции:

$$U \equiv m_l^2 - u_2 \simeq E_l^2 \theta_{\text{MED}}^2 x + m_{\text{MED}}^2 (1-x)/x + m_l^2 x > 0. \quad (2.44)$$

Таким образом, используя выражения (2.43) и (2.44) можно получить приближенное выражение для минимума виртуальности $t = t_{\text{min}}$, из которых следует,

что $\theta_{qV} \simeq \pi$ и вектор \mathbf{q} почти коллинеарен вектору $\mathbf{k} - \mathbf{p}$:

$$t_{\min} \simeq |\mathbf{q}|^2 \simeq U^2/(4E_l^2(1-x)^2). \quad (2.45)$$

Также, с учетом $\theta_{qp} \simeq \pi$, пока $\theta_{\text{MED}} \ll 1$ и \mathbf{q} коллинеарен с $\mathbf{k} - \mathbf{p}$, можно получить следующие выражения для переменных Мандельштама (2.6), выраженные через переменные x и θ_{MED} , в следующем виде:

$$u_2 = m_l^2 - U \lesssim 0, \quad (2.46)$$

$$t_2 = -2(\mathbf{q}, \mathbf{k}) + t + m_{\text{MED}}^2 \simeq -Ux/(1-x) + m_{\text{MED}}^2 \lesssim 0, \quad (2.47)$$

$$s_2 = 2m_l^2 + m_{\text{MED}}^2 - t - t_2 - u_2 \simeq U/(1-x) + m_l^2 \gtrsim 0. \quad (2.48)$$

Из закона сохранения энергии $q_0 + E_l = E_l' + E_{\text{MED}}$ и из условия $q_0/E_l \ll 1$ следует, что $E_l \simeq E_{\text{MED}} + E_l'$, таким образом, для доли энергии $x = E_{\text{MED}}/E_l$ получаем соответственно ее минимальное и максимальное значения в виде $x_{\min} \simeq m_{\text{MED}}/E_l$ и $x_{\max} \simeq 1 - m_l/E_l$. Так же стоит заметить, что при минимальной доле энергии x_{\min} , переменная t_2 принимает выражение:

$$t_2(x = x_{\min}) = -\frac{m_{\text{MED}}^2 E_0}{E_0 - m_{\text{MED}}} (\theta_{\text{MED}}^2 - m_l^2/E_0^2), \quad (2.49)$$

откуда видно, что в общем случае при наличии t-канала в процессе рождения медиатора в поле ядра для корректных расчетов при $\theta_{\text{MED}} = 0$ необходимо учитывать массу налетающей частицы, принимая во внимание $\sin(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$ для коэффициента в сечении (2.40).

Далее, подставив явный вид U получим выражение для квадрата минимального переданного импульса:

$$t_{\min}(x, \theta_{\text{MED}}) = 1/(4E_0^2) [x(E_0^2 \theta_{\text{MED}}^2 + m_l^2)/(1-x) + m_{\text{MED}}^2/x]^2,$$

откуда видно, что выражение для $t_{\min}(x, \theta_{\text{MED}})$ представляет собой сумму двух гипербол с асимптотами в $x = 0$ и $x = 1$ и, следовательно, принимает максимальные значения в их близи для $x \in (x_{\min}, x_{\max})$. Далее, подставляя значения на границах x_{\min} и x_{\max} и принимая во внимание условие $m_l, m_{\text{MED}} \ll E_0$, получим:

$$t_{\min}(x = x_{\min}, \theta_{\text{MED}}) \approx m_{\text{MED}}^2 (1 + \theta_{\text{MED}}^2)^2 / 4 < m_{\text{MED}}^2, \quad (2.50)$$

$$t_{\min}(x = x_{\max}, \theta_{\text{MED}}) \approx \frac{E_0^4}{4m_l^2} \left(\theta_{\text{MED}}^2 + \frac{m_l^2}{E_0^2} + \frac{m_{\text{MED}}^2 m_l}{E_0^3} \right)^2 > \frac{E_0^4}{4m_l^2} \theta_{\text{MED}}^4. \quad (2.51)$$

Из полученных выражений видно, что t_{\min} на границе x_{\max} может принимать большие нефизические значения. В частности, данные значения приводят к резкому скачку дифференциального сечения по x , что влечет переоценку сечения. Действительно, в случае $t_{\min} \gg t_{\max}$ и $t_{\max} > t_a, t_d$ для потока фотонов с форм-фактором Тсаи-Шиффа справедливо $\chi \sim Z^2 t_{\min}$, что видно из формулы (2.53). Более того, при $t_{\max} \gg t_a, t_d$ выполняется $\chi \approx Z^2 t_{\min} / (3t_{\max}^3)$. Однако, в виду того, что t_{\min} принимает большие значения только вблизи небольшой области x_{\max} , существенной переоценки полного сечения не происходит. Для того, чтобы избежать этого необходимо занулить поток фотонов (2.37) при $t_{\min} > t_{\max}$.

Далее, можно показать, что квадрат минимального переданного импульса (2.45) достигает минимума в точке:

$$x_m = \left(1 + m_{\text{MED}}^{-1} \sqrt{m_l^2 + E_0^2 \theta_{\text{MED}}^2} \right)^{-1},$$

и принимает значение в этой точке:

$$t_{\min}(x = x_m, \theta_{\text{MED}}) = \frac{m_{\text{MED}}^2}{4E_0^2} \left(m_{\text{MED}} + 2\sqrt{m_l^2 + E_0^2 \theta_{\text{MED}}^2} \right)^2 > \frac{m_{\text{MED}}^4}{4E_0^2}. \quad (2.52)$$

Стоит отметить, что выражение для минимального значения t_{\min} позволяет оценить влияние потока фотонов на дифференциальное сечение (разд. 2.1.3.2). Кроме того, в выражении для квадрата минимального переданного импульса (2.45) можно пренебречь зависимостями от угла и энергии излученного медиатора, положив для t_{\min} минимальное значение $t_{\min}^{\text{IWW}} = m_{\text{MED}}^4 / (2E_0)^2$. В этом случае, приближение переходит в хорошо известный улучшенный метод Вайцеккера-Вильямса с потоком фотонов χ^{IWW} , который не зависит от угла и энергии медиатора [50; 54; 161; 183]. Стоит отметить, что под улучшением метода Вайцеккера-Вильямса выше понимается упрощение аналитических выражений. Однако, с учетом того, что для t_{\min} берется наименьшее значение и подынтегральное выражение потока фотонов положительно, улучшенный метод Вайцеккера-Вильямса приводит к переоценке сечения.

2.1.3.2 Поток виртуальных фотонов

В этом разделе рассматривается влияние на поток виртуальных фотонов (2.37) различных параметризации для атомного и ядерного форм-факторов (2.10) в приближении тяжёлого ядра для процесса рождения медиатора в поле ядра (2.1).

Важно отметить, что интегрирование по квадрату переданного импульса для потока виртуальных фотонов (2.37) и упругого форм-фактора Тсаи-Шиффа (2.11) можно выполнить аналитически через элементарные функции. Последнее упрощение может быть использовано как для сокращения вычислительного времени численного интегрирования, так и для аналитического интегрирования дифференциального сечения (2.40). В частности, виртуальный поток фотонов в аналитической форме для атомного форм-фактора Тсаи-Шиффа выглядит следующим образом [54]:

$$\chi_{\text{TS}} = \frac{Z^2 t_d^2}{(t_a - t_d)^3} \left\{ [C_1^\chi + C_2^\chi t_{\min}] + [C_3^\chi - 2t_{\min}] \ln \left[\frac{t_{\min} + t_d}{t_{\min} + t_a} \right] \right\}, \quad (2.53)$$

где коэффициенты C_1^χ , C_2^χ и C_3^χ определяются следующими выражениями, соответственно:

$$C_1^\chi = \left\{ \frac{t_d(t_a - t_d)}{t_d + t_{\max}} + \frac{t_a(t_a - t_d)}{t_a + t_{\max}} - 2(t_a - t_d) + (t_a + t_d) \ln \left[\frac{(t_d + t_{\max})}{(t_a + t_{\max})} \right] \right\},$$

$$C_2^\chi = \left(\frac{t_a - t_d}{t_d + t_{\max}} + \frac{t_a - t_d}{t_a + t_{\max}} + 2 \ln \left[\frac{t_d + t_{\max}}{t_a + t_{\max}} \right] \right), \quad C_3^\chi = -(t_a + t_d).$$

Аналогично, для экспоненциального атомного форм-фактора (2.13), поток виртуальных фотонов (2.37) выражается аналитически через специальные функции как:

$$\chi_E = Z^2 \left(\frac{t_a + t_{\min}}{t + t_a} e^{-\frac{R_{\text{exp}}^2 t}{3}} + \frac{3 + R_{\text{exp}}^2 (t_a + t_{\min})}{3} e^{\frac{R_{\text{exp}}^2 t_a}{3}} \text{Ei} \left[-\frac{R_{\text{exp}}^2 (t + t_a)}{3} \right] \right) \Bigg|_{t_{\min}}^{t_{\max}}, \quad (2.54)$$

где $\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x e^t/t dt$ — интегральная показательная функция. Однако, для потока фотонов с форм-фактором Хельма используется численное интегрирование. Также стоит отметить, что соответствующие неэкранированные потоки фотонов могут быть получены из (2.53) и (2.54) при $t_a = 0$.

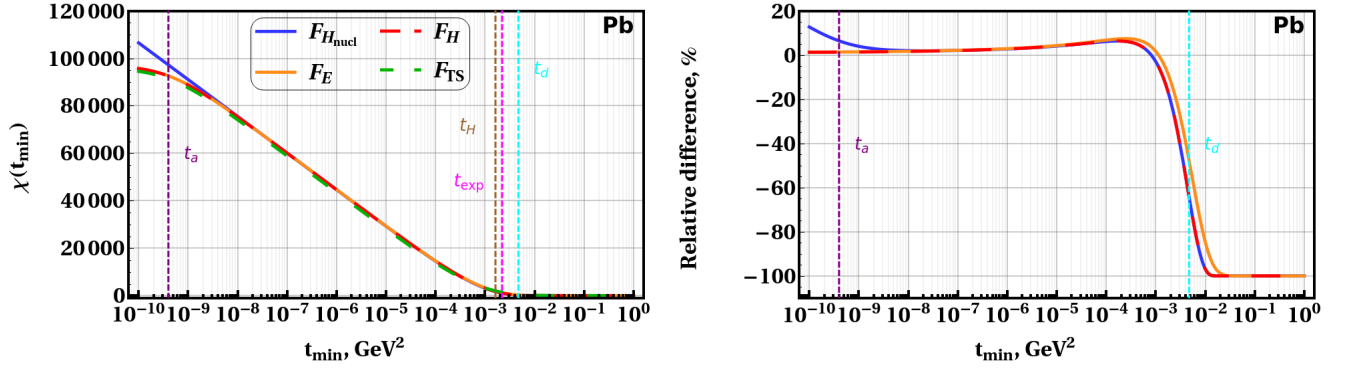


Рисунок 2.3 — (Слева) виртуальный поток фотонов как функция нижнего предела t_{\min} при массе медиатора 1 ГэВ для форм-факторов Тсаи-Шиффа F_{TS} (зеленая пунктирная линия), ядерного Хелма $F_{H_{\text{nucl}}}$ (синяя сплошная линия), атомного Хелма F_H (красная пунктирная линия) и атомного экспоненциального F_E (оранжевая пунктирная линия). (Справа) относительная разница между эталонным потоком виртуальных фотонов с форм-фактором Тсаи-Шиффа и другими форм-факторами.

На рисунке 2.3 изображен поток виртуальных фотонов для различных форм-факторов как функция от квадрата минимального переданного импульса (2.45). Из приведенного графика видно, что для t_{\min} в диапазоне от 10^{-10} ГэВ² до 10^{-3} ГэВ² отличие во вкладах в поток фотонов для различных атомных форм-факторов на уровне 5%. Также, на этом рисунке видно, что до значения $t_{\min} \approx 10^{-3}$ ГэВ² форм-факторы Хельма (2.12) и экспоненциальный (2.13) дают больший вклад, чем Тсаи-Шиффа (2.11). Однако, при значениях $t_{\min} > 10^{-3}$ ГэВ² происходит почти полное зарезание потока фотонов для хельмовского и экспоненциального форм-факторов относительно форм-фактора Тсаи-Шиффа, что приводит к разнице около 100% для $t_{\min} > 10^{-2}$ ГэВ². Стоит отметить, что зарезание для диапазона $t_{\min} > 10^{-3}$ ГэВ² в случае хельмовского форм-фактора происходит сильнее экспоненциального форм-фактора. Для региона $t_{\min} < t_a \approx 10^{-9}$ ГэВ² вклад от учета экранирования атомными электронами становится заметным. На это диапазоне вклад в поток фотонов от ядерного на 10 – 15% больше атомного форм-фактора. Однако, для диапазона $t_{\min} \gg t_a$ эффект экранирования незначительный и атомный и ядерный форм-факторы совпадают.

Далее, с учетом формулы (2.52), характерные массы медиатора, ниже которых значительный эффект оказывает экранирование ядра атомными электронами, принимают значения $m_{\text{MED}} \approx (4E_0^2 t_a)^{1/4}$. Аналогично, характерные массы медиатора, выше которых начинается значительное зарезание сечения Вайцзеккера-Вильямса потоком виртуальных фотонов, имеют вид $m_{\text{MED}} \approx (4E_0^2 t_d)^{1/4}$.

2.1.3.3 Интегрирование по углу двойного дифференциального сечения Вайцзеккера-Вильямса

В данном разделе выполняется интегрирование по углу дважды дифференциального сечения Вайцзеккера-Вильямса, которое позволяет упростить расчеты и избежать проблем при численном вычислении двойного интеграла. Дифференциальное сечение для комптон-подобного процесса излучения скалярного, псевдоскалярного, векторного, псевдовекторного и тензорного медиаторов зависит от угла через переменные Манделъштама (2.6) как:

$$\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}}{d(p \cdot k)} = \frac{|\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}|^2}{8\pi(s_2 - m_l^2)^2} = \frac{P(s_2, t_2, u_2)}{(s_2 - m_l^2)^k (u_2 - m_l^2)^l t_2^n}, \quad (2.55)$$

где $P(s_2, t_2, u_2)$ - полиномиальная функция по всем аргументам; $n = 1, l = 2, k = 4$ для тензорного медиатора и $n = 0, l = 1, k = 3$ для остальных типов медиаторов и переменная U определена в формуле (2.44). Явный вид матричных элементов медиаторов приведен в приложении A.1.1. В случае атомного форм-фактора Тсаи-Шиффа (2.11) можно проинтегрировать по углу сечение Вайцзеккера-Вильямса (2.40), которое в терминах переменной U принимает вид:

$$\left. \frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx dU} \right|_{\text{WW}} = \frac{\alpha\chi}{\pi} \frac{1}{2E_l^2 x} \frac{E_l^2 x}{1-x} \sqrt{1 - \frac{m_{\text{MED}}^2}{(xE_l)^2}} \frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}^{\text{MED}}}{d(p \cdot k)}, \quad (2.56)$$

где использована замена переменной $d\cos(\theta_{\text{MED}}) = -1/(2xE_0^2)dU$ с новыми пределами интегрирования:

$$U_{\text{max}} = E_l^2 \theta_{\text{max}}^2 x + m_{\text{MED}}^2 (1-x)/x + m_l^2 x, \quad U_{\text{min}} = m_{\text{MED}}^2 (1-x)/x + m_l^2 x. \quad (2.57)$$

В итоге, используя при разложении на простые дроби выражения в подынтегральной функции (2.56), получим интегралы для аналитического интегриро-

вания двойного дифференциального сечения Вайцеккера-Вильямса как:

$$I_1(x, U, l) = U^l, \quad I_2(x, U, l) = \int_{U_{min}}^{U_{max}} U^l \ln \left[\frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (2.58)$$

$$I_3(x, U, l) = \int_{U_{min}}^{U_{max}} \frac{U^l}{U + A(x)} dU, \quad l \geq 0, \quad (2.59)$$

$$I_4(x, U, l) = \int_{U_{min}}^{U_{max}} \frac{U^l}{U + A(x)} \ln \left[\frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \geq 0, \quad (2.60)$$

где явный вид для $I_1(x, U, l)$ тривиален, а для остальных интегралов выше явный вид приведен в приложении [A.1.5](#). Как видно из выражения выше, в случае тензорного медиатора необходимо дополнительно вычислить интеграл $I_4(x, U, l)$ в отличие от других типов медиаторов. Частный вид выражений выше был использован в случае мюонного первичного пучка при расчете дифференциального сечения рождения векторного, скалярного и псевдоскалярного медиаторов на активной мишени в статье [\[184\]](#). Также стоит отметить, что зануление массы налетающего лептона может привести к неопределенности в итоговом выражении в случае наличия t-канала. Действительно, интеграл $I_4(x, U_{min}, l)$ содержит $\ln(m_l^2 x)$, где U_{min} определен в выражении [\(2.57\)](#).

2.2 Сечение аннигиляции через медиатор

В данном разделе рассматриваются выражения ширин и сечений для аннигиляции через медиатор. В частности, аннигиляция в темную материю используется для расчетов ограничений на константу взаимодействия между медиатором и электроном. Реакции аннигиляции через медиатор в электрон-позитронную пару используются для расчетов реликтовых кривых термальной легкой темной материи. Для невидимой моды предполагается, что темная материя легче медиатора, т.е. справедливо $m_{MED} \gtrsim 2m_{DM}$. Для ширин распада медиатора выполняется соотношение $\Gamma_{MED \rightarrow e^-e^+} \ll \Gamma_{MED \rightarrow DM DM}$ и, следовательно, для полной ширины распада медиатора справедливо $\Gamma_{tot} \simeq \Gamma_{MED \rightarrow DM DM}$. Явный вид ширин распада приведен в приложении [A.1.2](#). Далее, в разделах [2.2.1](#) и [2.2.2](#)

рассматриваются процессы аннигиляции через медиатор в темный и в видимый сектора, соответственно.

2.2.1 Аннигиляция в темную материю через медиатор

В случае экспериментов с фиксированной мишенью процесс электрон-позитронной аннигиляции в темную материю может возникать в результате взаимодействия вторичных позитронов электромагнитного ливня с атомными электронами в толстой активной мишени. В свою очередь, электромагнитный ливень возникает в результате падения высокоэнергетического первичного электронного или позитронного пучка на мишень. Также стоит отметить, что из-за соотношения масс $m_e \ll m_{\text{MED}}$, вклад в рождение темной материи дают только ультрарелятивистские позитроны и, следовательно, можно положить $|\mathbf{p}_{e^+}| \simeq E_{e^+}$. Далее, пренебрегая движением электрона в атоме, типичные импульсы атомных электронов и вторичных позитронов можно записать как $p_{e^-} = (m_e, 0, 0, 0)$ и $p_{e^+} \simeq (E_{e^+}, 0, 0, E_{e^+})$, соответственно. Таким образом, инвариантная масса принимает следующее выражение:

$$s = (m_e + E_{e^+})^2 - |\mathbf{p}_{e^+}|^2 = m_e^2 + 2m_e E_{e^+} \simeq 2m_e E_{e^+}. \quad (2.61)$$

Принимая во внимание, что эксперименты с фиксированной мишенью ограничены по энергии нижним порогом E_{cut} и энергией первичного пучка E_0 , масса медиатора, на которую можно наложить ограничения в резонансном процессе, лежит в диапазоне $\sqrt{2E_{\text{cut}}m_e} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim \sqrt{2E_0m_e}$.

Важно отметить, что для расчета резонансного полного сечения для процесса электрон-позитронной аннигиляции в пару частиц темной материи через медиатор можно использовать формулу Брейта-Вигнера [185]:

$$\sigma_{e^-e^+ \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM DM}} = N_{\text{spin}}^{\text{BW}} \frac{16\pi}{(1-4m_l^2/s)} \frac{\Gamma_{\text{in}}(s)\Gamma_{\text{out}}(s)}{(s-m_{\text{MED}}^2)^2 + m_{\text{MED}}^2(\Gamma_{\text{tot}})^2}, \quad (2.62)$$

где $N_{\text{spin}}^{\text{BW}} = C_{\text{BW}}(2J+1)(2S_1+1)^{-1}(2S_2+1)^{-1}$ - коэффициент, учитывающий внутренние степени свободы, s - инвариантная масса, Γ_{tot} - полная ширина распада медиатора, Γ_{in} , Γ_{out} - ширины распада медиатора в начальное и конечное состояния, соответственно, J - спин медиатора, S_1 и S_2 - спины начальных частиц, $C_{\text{BW}} = 1$ и $C_{\text{BW}} = 2$ для различных и одинаковых частиц в исходном состо-

янии, соответственно. Действительно, фактор C_{BW} компенсирует дополнительный множитель в ширине распада в случае одинаковых частиц [186]. Положение пика связано только с массой медиатора и не зависит от типичной величины темной и электромагнитной постоянных тонкой структуры $\alpha_{\text{DM}} = (c_{\text{DM DM}}^{\text{MED}})^2/(4\pi)$ и α , соответственно. Кроме того, решение уравнения $(s - m_{\text{MED}}^2)^2 \simeq m_{\text{MED}}^2 \Gamma_{\text{tot}}^2$ в знаменателе формулы (2.62) позволяет оценить ширину пика около резонансной области на половине высоты как $\Delta s = m_{\text{MED}} \Gamma_{\text{tot}}$, и, следовательно, справедлива оценка $\Delta s \sim \alpha_{\text{DM}}$. Из формулы (2.62) видно, что при резонансных значениях $s \approx m_{\text{MED}}^2$, пиковое значение сечения принимает вид:

$$\sigma_{e^-e^+ \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}^{\text{peak}} = N_{\text{spin}}^{\text{BW}} \frac{16\pi}{(m_{\text{MED}}^2 - 4m_l^2)} \frac{\Gamma_{\text{in}}(m_{\text{MED}}^2)}{\Gamma_{\text{out}}(m_{\text{MED}}^2)} \sim \alpha/\alpha_{\text{DM}}. \quad (2.63)$$

Также стоит упомянуть, что вклад в сечение в области $4m_{\text{DM}}^2 \lesssim s \lesssim m_{\text{MED}}^2$ связан с тем, что медиатор лежит вне массовой оболочки, и, как следствие, соответствующий вклад подавлен.

В случае невидимой моды, считая полную ширину малой как $\Gamma_{\text{tot}}/m_{\text{MED}} \ll 1$ и используя представление дельта-функции Дирака как $\delta(x) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Gamma/[\pi(x^2 + \Gamma^2)]$, формула Брейта-Вигнера в приближении узкого резонанса принимает следующий вид:

$$\sigma_{l^-l^+ \rightarrow \text{MED} \rightarrow \text{DM DM}} = N_{\text{spin}}^{\text{BW}} \frac{16\pi}{(1 - 4m_l^2/s)} \frac{\pi \Gamma_{\text{in}}(s)}{m_{\text{MED}}^2} \delta(s - m_{\text{MED}}^2), \quad (2.64)$$

где принято во внимание, что $\Gamma_{\text{out}}/\Gamma_{\text{tot}} \approx 1$. Из формулы (2.64) видно, что в приближении узкой ширины процесс аннигиляции заряженной лептонной пары в темную материю проходит только через резонанс находящийся на массовой оболочке. Так же стоит отметить, что в приближении узкой ширины для аннигиляции лептонной пары в темную материю полное сечение не зависит от типа темной материи. Кроме того, приближение узкой ширины справедливо в предельном случае $m_{\text{DM}}/m_{\text{MED}} \rightarrow 1/2$.

Явный вид сечений аннигиляции электро-позитронной пары в темную материю приведен в приложении A.1.4 для скалярного медиатора в формулах (A.48) - (A.51) и для тензорного медиатора в выражениях (A.41) - (A.43).

2.2.2 Аннигиляция в лептон-антилептонную пару через медиатор

Меняя местами входящий и выходящий канал в формуле Брейта-Вигнера (2.62), получим аналогичную формулу для расчета аннигиляции темной материи в электрон-позитронную пару. В частности, явный вид сечений аннигиляции приведен для скалярного медиатора в формулах (A.44) - (A.47) и для тензорного медиатора в выражениях (A.37) - (A.39).

Для получения выражений для сечений аннигиляции в нерелятивистском приближении можно использовать выражения для инвариантной массы $s \simeq 4m_{\text{DM}}^2$ и скорости Мельера в системе центра масс (1.17). В частности, для скалярного медиатора, взаимодействующего преимущественно с электроном, в случае майорановской [21; 146], дираковской [29; 187], скалярной [146] и векторной темной материи справедливо, соответственно:

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{\chi\chi \rightarrow \phi \rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_\chi (c_{ee}^\phi)^2 m_\chi^2 \beta_e^3 (4m_\chi^2)}{8\pi D_\chi^\phi (4m_\chi^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.65)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow \phi \rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_\psi (c_{ee}^\phi)^2 m_\psi^2 \beta_e^3 (4m_\psi^2)}{8\pi D_\psi^\phi (4m_\psi^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.66)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{SS \rightarrow \phi \rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_S (c_{ee}^\phi)^2 \beta_e^3 (4m_S^2)}{4\pi D_S^\phi (4m_S^2)}, \quad (2.67)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{VV \rightarrow \phi \rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_V (c_{ee}^\phi)^2 m_V^4 \beta_e^3 (4m_V^2)}{18\pi D_V^\phi (4m_V^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.68)$$

где для рассматриваемых типов темной материи и скалярного медиатора введено:

$$\alpha_\chi = \frac{(c_{\chi\chi}^\phi)^2}{4\pi}, \quad \alpha_\psi = \frac{(c_{\psi\psi}^\phi)^2}{4\pi}, \quad \alpha_S = \frac{(c_{SS}^\phi)^2}{4\pi}, \quad \alpha_V = \frac{(c_{VV}^\phi)^2}{4\pi}, \quad (2.69)$$

также для совпадения с результатами приведенных работ необходимо положить $D_{\text{DM}}^2(4m_{\text{DM}}^2) \simeq (4m_{\text{DM}}^2 - m_\phi^2)^2$, и были использованы обозначения:

$$\beta_f(s) = \sqrt{1 - 4m_f^2/s}, \quad D_{\text{DM}}^{\text{MED}}(s) = (s - m_{\text{MED}}^2)^2 + m_{\text{MED}}^2 \Gamma_{\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}^2. \quad (2.70)$$

Также стоит отметить, что в случае скалярного медиатора и майорановской, дираковской и векторной темной материи аннигиляция происходит в р-волну, а для скалярной темной материи в s-волну. Аналогично, для тензорного ме-

диатора выполняется и дираковской, скалярной и векторной темной материи справедливо, соответственно [188]:

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{\psi\bar{\psi}\rightarrow G\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_\psi(c_{ee}^G)^2 m_\psi^6 \beta_e^3 (4m_\psi^2) (3 + 2m_e^2/m_\psi^2)}{72\pi D_\psi^G (4m_\psi^2)} v_{\text{Mol}}^2, \quad (2.71)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{SS\rightarrow G\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_S(c_{ee}^G)^2 m_S^6 \beta_e^3 (4m_S^2) (3 + 2m_e^2/m_S^2)}{360\pi D_S^G (4m_S^2)} v_{\text{Mol}}^4, \quad (2.72)$$

$$v_{\text{Mol}}\sigma_{VV\rightarrow G\rightarrow e^+e^-} = \frac{4 \cdot 4\pi\alpha_V(c_{ee}^G)^2 m_V^6 \beta_e^3 (4m_V^2) (3 + 2m_e^2/m_V^2)}{27\pi D_V^G (4m_V^2)}, \quad (2.73)$$

где для рассматриваемых типов темной материи и тензорного медиатора введено:

$$\alpha_\psi = (c_{\psi\psi}^G)^2/(4\pi), \quad \alpha_S = (c_{SS}^G)^2/(4\pi), \quad \alpha_V = (c_{VV}^G)^2/(4\pi). \quad (2.74)$$

Кроме того, что для тензорного медиатора и дираковской, скалярной и векторной темной материи аннигиляции происходят в р-волну, d-волну и s-волну, соответственно. Принимая во внимание, что рассматривается скрытый сектор только с одним типом медиатора, тогда из контекста однозначно определяется к какому типу медиатора относится введенная постоянная α_{DM}

Также следует отметить, что с учетом формулы Брейта-Вигнера (2.62) для обратного канала, при заданной ширине распада $\Gamma_{\text{MED}\rightarrow\text{DM DM}}(s) \sim \beta_{\text{DM}}^n(s)$ и при $n < 2$ для данного типа темной материи отсутствует подавление по скорости. В частности, такой тип темной материи исключен из-за ограничений из наблюдаемого спектра космического микроволнового излучения. Также, термальные кривые в нерелятивистском приближении для сечений аннигиляции выше в случае рассматриваемых типов темной материи совпадают [67] с результатами расчета через разложение квадрата матричного элемента в источнике [128].

Результаты второй главы

В данном разделе были приведены формулы для расчета дифференциального сечения рождения скалярного и тензорного медиаторов скрытого сектора на тяжелом ядре в приближении Вайцеккера-Вильямса в случае высокоэнергетического первичного пучка. Приведены основные модели ядерных и атомных форм-факторов и изучены влияние экранирования атомными электронами и форм-факторов на соответствующий поток виртуальных фотонов. Также полу-

чены ширины распада медиатора и полные сечения для процессов аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени и механизма аннигиляции темной материи через *вымораживание*.

Глава 3

Ограничения на параметры темной материи из экспериментов с фиксированной мишенью

Предположение о термальном происхождении темной материи с массами от $\mathcal{O}(1)$ MeV до $\mathcal{O}(1)$ GeV приводит к тому, что соответствующее пространство параметров темной материи лежит в области чувствительности установок с фиксированной мишенью и экспериментов столкновительного типа. Отсутствие сигнальных событий в экспериментах в области пространства параметров, соответствующих наблюдаемой реликтовой плотности темной материи, позволяет исключать различные модели темной материи и ее медиаторов. Далее, в разделе 3.1 приводятся основные данные об лептонных экспериментах, используемых для получения ограничений на константы взаимодействия медиатора с лептоном. Также, описание полученных дифференциальных и полных сечений с использованием приближения Вайцзеккера-Вильямса и расчетов на древесном уровне для процесса рождения медиатора в поле ядра приведено в разделе 3.2. В случае скалярного медиатора полученная зависимость массы и константы взаимодействия медиатора с электроном, соответствующая наблюдаемой реликтовой плотности темной материи, приведена в разделе 3.3. В итоге, полученные ограничения на константу взаимодействия скалярного и тензорного медиаторов с лептоном представлены в разделе 3.4, где использовалось приближение Вайцзеккера-Вильямса.

3.1 Лептонные эксперименты по поиску темной материи

В данном разделе приводятся основные параметры экспериментов с фиксированной мишенью для лептонных пучков. Общая идея экспериментов с фиксированной мишенью представляет собой поиск событий с недостающими энергией или импульсом в детекторной системе. А именно, рассеяние высокоэнергетического пучка частиц в поле ядер фиксированной мишени может приводить к рождению частиц темного сектора, которые могут уносить часть энергии из системы. В частности, невидимой моде данного сигнала, т.е. когда унесенная

энергия переходит в скрытый сектор, соответствуют процессы рождения медиатора в поле ядра и аннигиляции в темную материю через медиатор. Более того, приближение Вайцзеккера-Вильямса и формула Брейта-Вигнера в случае невидимой моды позволяют получить соответствующие сечения. Далее, в разделе 3.1.1 приводятся основные параметры рассматриваемых экспериментов с фиксированной мишенью. Дополнительно, в разделе 3.1.2 кратко приводятся основные сведения об электронных столкновительных экспериментах, на основе которых учитываются известные ограничения на константы взаимодействия медиатора и частиц видимого сектора.

3.1.1 Эксперименты с фиксированной мишенью

NA64e. Эксперимент NA64e является калориметрическим экспериментом с фиксированной мишенью, который расположен в северной зоне Европейской Организации Ядерных Исследований (CERN) на линии H4 протонного суперсинхротрона. Попадающие на бериллиевую мишень с тонким свинцовым конвектором протоны от ускорителя дают пучок ультрарелятивистских электронов (позитронов) с энергией $E_0 \simeq 100$ ГэВ, который рассеивается на ядрах активной толстой мишени эксперимента NA64e. Основным каналом для рождения электронов (позитронов) служит реакция $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$, где короткоживущие пионы рождаются протонами в бериллиевой мишени и распадаются на гамма-кванты, которые в свинцовом конвекторе переходят в электрон-позитронную пару [189]. Основные составляющие компоненты детекторной системы эксперимента NA64e представляют собой [189; 190]:

1. Трекер с малым поглощением энергии, позволяющий прецизионно измерять начальный импульс пучка с точностью до 1%.
2. Два магнитных спектрометра, либо отклоняющих первичный высокоэнергетический пучок электронов, что приводит к генерации синхротронного излучения, либо отсеивающий низкоэнергетические электроны.
3. Сегментированный детектор синхротронного излучения, который позволяет идентифицировать высокоэнергетичный электрон по энергетическим характеристикам.

делению от синхротронного излучения, что используется для подавления фона [191].

4. Активная мишень, которая представляет собой электромагнитный калориметр с толщиной в 40 радиационных длин сегментированный на ячейки из чередующихся пластиковых сцинтилляторов и свинцовых поглотителей.
5. Расположенные после активной мишени вето-счетчик и адронный калориметр с толщиной в 30 ядерных длин, которые служат для исключения фоновых ядерных реакций в мишени.

Невидимая мода распада предполагает, что распад медиатора в темный сектор является доминирующим. Доля энергии $E_{\text{miss}} = xE_0$ от первичного пучка может быть унесена в результате рождения частиц темной материи. Оставшаяся часть энергии пучка, $E_e^{\text{rec}} \simeq (1-x)E_0$, может быть выделена в электромагнитном калориметре NA64e электронами (позитронами) отдачи. Для ожидаемой формы электромагнитного ливня типичная доля общего энерговыделения в мишени составляет 0.5 от энергии первичного пучка, что влечет требование для доли унесенной медиатором энергии $E_{\text{miss}} > 0.5E_0$ [192]. Для эксперимента NA64e используются следующие параметры мишени:

$$\rho \simeq 11.34 \text{ г см}^{-3}, A = 207 \text{ г моль}^{-1}, Z = 82, L_T = X_0, x_{\text{min}} = 0.5, \quad (3.1)$$

где Z - заряд ядра мишени, A - атомный номер ядер мишени, $X_0 = 0.56 \text{ см}$ - радиационная длина электрона в свинце, L_T - эффективная длина взаимодействия и x_{min} - порог доли унесенной энергии. Эффективности рождения медиатора в поле ядра $\eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}}$ и в аннигиляции на атомных электронах $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$ принимаются на уровне 90% как для электронного, так и для позитронного пучка [190]. Критерии отбора событий в набранную статистику для эксперимента NA64e можно сформулировать следующим образом [190; 193]:

1. Трекерная система должна давать только один трек и импульс трека пучка должен быть в пределах $100 \pm 2 \text{ ГэВ}$.
2. Регистрируемая энергия в детекторе синхротронного излучения должна соответствовать энергии синхротронного излучения от e^\pm в магнитах спектрометра.

3. Форма ливня в электромагнитном калориметре (ECAL) от события должна соответствовать ожидаемой форме [192; 194; 195] и в вето-детекторе должен отсутствовать сигнал.
4. Для унесенной медиатором энергии и зарегистрированной в адронном калориметре энергии должно быть справедливо $E_{\text{miss}} > 50$ ГэВ и $E_{\text{HCAL}} < 1$ ГэВ, соответственно, где порог для адронного калориметра взят на основе шумов в снимающей сигнал электронике.

Также следует отметить, что первичный пучок на линии Н4 имеет высокое адронное загрязнение, в частности с основным вкладом $\pi/e^- \lesssim 2\%$ и $K/e^- \lesssim 3\%$. Однако, система мечения синхротронным излучением позволяет подавить фон от адронного загрязнения первичного пучка [190; 191]. Кроме того, электронный калориметр имеет продольную сегментацию с разделением на основную часть и предливневую. Данная сегментация позволяет отсекаать адронный фон, а именно отношения энерговыделения в основной части и предливневой имеет характерные отношения для различных каналов. В частности, для пионов характерно выделение незначительной части в предливневом сегменте, что позволяет дополнительно идентифицировать данный фон [192].

Прогнозируемая статистика для эксперимента NA64e в конечной фазе $\simeq 5 \times 10^{12}$ электронов, упавших на мишень (ЕОТ). Для получения ограничений на модели медиаторов скрытого сектора может быть использована статистика, набранная в 2016–2023 годах $\simeq 9.37 \times 10^{11}$ ЕОТ [196]. В случае невидимой моды очень важным элементом является оценка фоновых событий, которые могут имитировать искомые сигнальные события. Основные фоновые события приведены в таблице 1, что получено на основе моделирования с использованием метода Монте-Карло [196].

Источник фона	Фон
Потери или распады димюонов в мишени	0.04 ± 0.01
Распады на линии пучка	0.03 ± 0.05
Недостаточное покрытие HCAL	0.16 ± 0.12
Пролет частиц сквозь HCAL	$0 < 0.01$

Таблица 1 — Основные фоновые события для NA64e при статистике 9.37×10^{11} ЕОТ [196].

NA64 μ . Эксперимент NA64 μ работает в режиме мюонного пучка на линии M2 протонного суперсинхротрона в северной зоне CERN, который исполь-

зует структуру детекторной системы эксперимента NA64e. Однако, в эксперименте NA64μ важна точная реконструкция импульса падающей частицы для выделения фоновых процессов, так как мюоны обычно проявляют себя как минимально ионизирующие частицы и проходят всю детекторную систему с малым изменением импульса [197]. Для расчетов событий рождения медиаторов на мишени NA64μ можно использовать параметры электронной моды (3.1), за исключением эффективной длины взаимодействия $L_T \simeq 40X_0 \simeq 22.5$ см. Также следует отметить, что порог доли унесенной энергии $x_{min} = 0.5$ получен как сумма пиков минимальных ионизирующих частиц соответствующих энергетических спектров [197]. Выбор энергии первичного пучка мюонов был произведен на основе моделирования для оптимальной герметичности экспериментальной установки [198]. Для оценки чувствительности NA64μ используется энергия мюонного пучка $E_\mu \simeq 160$ ГэВ и прогнозируемая статистика $\simeq 5 \times 10^{13}$ мюонов упавших на мишень (МОТ) [199]. В эксперименте NA64μ используется свинцовый электромагнитный калориметр, для которого можно пренебречь потерями для ультрарелятивистских мюонов из-за небольшой потери энергии в свинце $\langle dE_\mu/dx \rangle \simeq 12.7 \times 10^{-3}$ ГэВ/см [200]. Аналогично, критерии отбора событий для эксперимента NA64μ принимают следующий вид [199]:

1. Трекерная система должна регистрировать импульс пучка в пределах 160 ± 20 ГэВ с одиночным треком.
2. Единственный трек, который входит в адронный калориметр, и поведение этой частицы в адронном калориметре должно соответствовать минимально ионизирующей частице.
3. Энерговыделение в калориметрической системе эксперимента должно быть совместимым с минимально ионизирующей частицей.

Интенсивность мюонного пучка на линии M2 в $\simeq 10$ раз выше электронной моды на линии H4 из-за чего за схожее время эксперимент NA64μ накопит планируемую статистику быстрее чем эксперимент NA64e. Аналогично эксперименту NA64e, основные фоновые события для мюонной моды [197] приведены в таблице 2. Негерметичность адронного калориметра подразумевает рождение адронов в электромагнитном калориметре и отклонении этих низкоэнергетических вторичных частиц в поле магнитного спектрометра до системы детекто-

Источник фона	Фон
Неправильная реконструкция импульса	0.05 ± 0.03
$K \rightarrow \mu\nu$, перед ECAL	0.010 ± 0.001
Негерметичность калориметра	$0 < 0.01$

Таблица 2 — Основные фоновые события для NA64 μ при статистике 2×10^{10} MOT [63].

ров HCAL. Первичный мюонный пучок на линии M2 имеет адронное загрязнение с основным вкладом $\pi/\mu \lesssim 10^{-4} \%$ и $K/\mu \lesssim 3 \%$ [197].

LDMX. Light Dark Matter Experiment (LDMX) представляет собой планируемый в Стэнфордском Линейном Ускорителе (SLAC) эксперимент с электронным пучком, который использует уникальную методику измерения недостающего импульса электронов [201; 202]. Основные составляющие эксперимента LDMX [201; 203]:

1. Система мечения состоящая из кремниевых модулей с ожидаемой точностью 1% и расположенной внутри дипольного магнита с 1.5 Т, которая используется для проверки требуемого полного импульса и направления падения пучка.
2. Тонкая мишень из алюминия или вольфрама с толщиной $0.1X_0 - 0.4X_0$ расположенная в конце магнита по направлению пучка.
3. Трекер отдачи расположенный после мишени и перед электромагнитным калориметром, используемый для измерения импульса более мягких вторичных электронов по сравнению с полученными системой мечения.
4. Электромагнитный калориметр из чередующихся сцинтиллятора и вольфрамового поглотителя, в котором падающие частицы образуют электромагнитный ливень.
5. Адронным калориметром из чередующихся сцинтиллятора и железного поглотителя с толщиной в 3 ядерных длины, улавливающий образовавшиеся адроны в электромагнитном калориметре.

Также следует подчеркнуть, что наличие магнитного поля между мишенью и электромагнитным калориметром позволяет разделять электромагнитные ливни от фотонов и электронов. Для эксперимента LDMX используются следующие

щие параметры:

$$\rho \simeq 2.7 \text{ г см}^{-3}, A = 27 \text{ г моль}^{-1}, Z = 13, L_T = 0.4X_0, x_{min} = 0.7. \quad (3.2)$$

Энергия первичного пучка выбрана равной $E_0 \simeq 16$ ГэВ, а прогнозируемая статистика соответствует $EOT \simeq 10^{15}$. Далее, правила отбора событий с недостающим импульсом в LDMX принимают следующий вид [21]:

1. Импульс трека пучка должен быть измерен детектором на уровне $\simeq 16$ ГэВ.
2. Кремниевый трекер, установленный ниже по потоку от мишени, должен отмечать большой перенос импульса частицы отдачи e^\pm , связанный с эмиссией темной материи.
3. Форма ливня в электромагнитном калориметре должна соответствовать ожидаемой [21], где подразумевается порог для энергии электрона отдачи (позитрона) $E_e^{\text{rec}} \lesssim 0.3E_0 \simeq 4.8$ ГэВ.

Явное исследование оценки фоновых событий произведено только для рождения медиатора в поле ядер мишени в режиме электронного пучка [204]. Однако, в дальнейших рассуждениях предполагается, что для позитронного пучка LDMX и канала аннигиляции фоновые реакции будут аналогичными. Эксперимент LDMX планируется провести в две фазы, где в первой и второй фазе ожидается 10^{14} и 10^{16} электронов накопленных на мишени, соответственно. К основным фоновым событиям относят следующие [201; 202]. Прилет в установку низкоэнергетического электрона. Отсутствие взаимодействия электрона в мишени. Большая часть энергии первичного пучка уносится жесткими фотонами, мюонной парой и адронами из детекторной системы. Рождение нейтрино в детекторной системе. Однако, ожидается, что итоговый вклад фоновых событий для планируемой статистики подавлен. Типичные эффективности $\eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}}$ и $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$ оцениваются на уровне $\simeq 50\%$ в случаях электронного и позитронного первичного пучка [203].

M³. Muon Missing Momentum Experiment (M³) представляет собой разрабатываемый эксперимент с фиксированной мишенью в SLAC, который направлен на исследование частиц темного сектора с помощью мюонной сигнатуры недостающего импульса в процессе $\mu N \rightarrow \mu N \text{ MED}(\rightarrow \chi\bar{\chi})$. Аналогично как с NA64 μ и NA64 e , эксперимент M³ рассматривается как дополнительный

к LDMX и имеет схожую детекторную базу [203]. Однако, основное различие между постановками экспериментов M^3 и LDMX заключается в использовании толстой активной мишени, для которой можно использовать следующие параметры [64]:

$$\rho \simeq 19.3 \text{ г см}^{-3}, A = 184 \text{ г моль}^{-1}, Z = 74, L_T = 50X_0, \quad (3.3)$$

где $X_0 \simeq 0.35 \text{ см}$ - радиационная длина электрона в вольфраме. Предполагается использование мюонного пучка с энергией $E_\mu \simeq 15 \text{ ГэВ}$, падающего на вольфрамовую мишень, для которой порог недостающего импульса мюона выбрано равным $E_\mu^{\text{rec}} \lesssim 9 \text{ ГэВ}$, что дает нижний предел на долю энергии в виде $x_{\text{min}} \simeq 0.4$. Планируемая статистика в конечной фазе $\simeq 10^{13}$ МОТ. Также стоит отметить, что для мюонов с энергией $E_\mu \simeq 15 \text{ ГэВ}$ потери на остановку мюона в вольфраме [64] оцениваются величиной порядка 530 МэВ через среду мишени с эффективной длиной взаимодействия L_T . Это позволяет пренебречь зависимостью энергии налетающего мюона от доли энергии медиатора при расчете числа сигнальных событий излучения медиатора в эксперименте M^3 . К основным фоновым событиям относят следующее [64]: загрязнение пионами; рождение жестких фотонов, уносящих энергию из детекторной системы; утечка из калориметра через рождение адронов и мюонной пары; квазиупругое рассеяние электрона после передачи значительной части энергии от первичного пучка. Аналогично электронной моде, в эксперименте M^3 фоновые события подавлены для планируемой статистики.

E137. E137 представляет собой завершившийся эксперимент в SLAC и изначально предназначался для поиска аксионоподобных частиц [205]. Данный эксперимент имеет электронный первичный пучок с энергией 20 ГэВ с накопленным зарядом 30 Кл (2×10^{20} электронов) в алюминиевой мишени за две фазы эксперимента [206]. Отсутствие сигнала в эксперименте E137 дает достаточно строгие ограничения на темную материю в суб-ГэВ регионе [207]. Дополнительно, анализ дифференциальных сечений в методе Вайцзеккера-Вильямса и на древесном уровне выполнялся в работе [161; 165], поэтому далее анализ этого эксперимента не проводится.

3.1.2 Коллайдерные эксперименты

BaBar. BaBar является завершившимся экспериментом в SLAC, который изначально использовал асимметричную реакцию электрон-позитронной аннигиляции для детального изучения нарушения CP-симметрии при распадах B-мезонов [208]. Однако, электрон-позитронная аннигиляция в эксперименте BaBar позволяет поставить ограничения на константу взаимодействия электрона и векторного медиатора темной материи [209—212]. А именно, для масс векторного медиатора $\lesssim \mathcal{O}(1)$ ГэВ ограничения на константу взаимодействия с электроном дают значение $\epsilon < 10^{-3}$ на уровне достоверности 90 %.

Belle II. Belle II представляет собой проводимый в настоящее время эксперимент в японской организации КЕК (accelerator research organization) возле города Цукуба на ускорительном комплексе SuperKEKB, который использует асимметричную реакцию электрон-позитронной аннигиляции для изучения нарушения CP-симметрии при распадах B-мезонов и их физики [48]. Аналогично, эксперимент Belle II дает ограничения на переход материи в темный сектор [21].

3.2 Сечение излучения медиаторов скрытого сектора

В данном разделе рассматривается поведение дифференциального и полного сечений излучения массивного медиатора скрытого сектора в поле ядра в походах Вайцзеккера-Вильямса (раздел 2.1.3) и расчетов на древесном уровне (раздел 2.1.2) в случае различных параметров мишени рассматриваемых лептонных экспериментов (раздел 3.1.1) и упругих атомных форм-факторов (раздел 2.1.1.2). Одним из параметров расчета дифференциального и полного сечений является максимальный угол вылета медиатора θ_{\max} . Значение угла θ_{\max} можно установить, используя геометрию детекторов эксперимента [161; 165] или оптимизацию моделирования Монте-Карло [213; 214], где выбор оптимального угла θ_{\max} , т.е. на котором сечение насыщается, может значительно сократить время вычислений моделирования. В частности, для сравнения подходов вычисления полного сечения может быть использован угол $\theta_{\max} \simeq 0.005$, основываясь на аналогичной постановке задачи для эксперимента E137 [161;

165]. Аналогично, основываясь на результатах численного анализа для эксперимента NA64 μ с использованием пакета моделирования DMG4 [213; 214], угол $\theta_{\max} = 0.1$ используется в качестве второго угла для сравнения вычислений [54; 184; 197]. Однако, точность расчетов в приближении Вайцзеккера-Вильямса с различными значениями угла θ_{\max} может быть чувствительна к выбору экспериментальных параметров, поэтому важно изучение выбранных подходов для различных параметров. Полные и дифференциальные сечения вычисляются с использованием численного интегрирования в программе WOLFRAM MATHEMATICA [215] при соответствующих параметрах рассматриваемых экспериментов. Стоит отметить, что общее поведение сечения для спин-0 и спин-1 медиаторов имеет схожий характер [216], поэтому далее рассматривается только полные сечения для скалярного и тензорного медиаторов. Кроме того, изучение влияния различных углов θ_{\max} проводилось только в случае скалярного медиатора, т.к. выражения для тензорного медиатора имеют большую вычислительную сложность с точки зрения численных расчетов. В разделах 3.2.1 и 3.2.2 описаны полученные дифференциальные и полные сечения, соответственно. Далее, дифференциальные сечения использованы для построения соответствующих ограничений на константы взаимодействия медиатора и лептона в случае невидимой моды $lN \rightarrow lN \text{ MED}(\rightarrow \text{DM DM})$, что рассматривается в разделах 3.4.1 и 3.4.2 для скалярного и тензорного медиаторов, соответственно.

3.2.1 Дифференциальное сечение рождения медиаторов в поле ядра

Скалярный медиатор. Рассмотрим зависимость дифференциального сечения от доли унесенной энергии скалярным медиатором для процесса излучения медиатора в поле ядра, которое приведено на графике 3.1. Для получения дифференциального сечения использовались приближение Вайцзеккера-Вильямса и расчет на древесном уровне, где рассматриваемые методы приводят к схожей форме дифференциального сечения в случае медиаторов спина-0 и спина-1 на всем диапазоне масс легкой темной материи. Форма дифференциального сечения определяется типом первичного пучка и слабо зависит от других параметров эксперимента с фиксированной мишенью и выбранного ме-

тогда вычисления дифференциального сечения. Также, увеличение массы медиатора приводит к уменьшению дифференциального сечения на всем диапазоне доли x . *Электронная мода.* В случае экспериментов NA64e и LDMX наиболее вероятно излучение медиатора с большими энергиями, т.е. $x \approx x_{\max}$, для всего рассматриваемого диапазона масс от $\mathcal{O}(1)$ МэВ до $\mathcal{O}(1)$ ГэВ, кроме того пик при $x = x_{\max}$ становится более острым с увеличением массы медиатора. Также, можно видеть, что увеличение энергии электронного первичного пучка приводит к увеличению дифференциального сечения. *Мюонная мода.* Для экспериментов NA64 μ и M^3 справедливо, что пик в дифференциальном сечении возникает вблизи $x \ll 1$ и $x \simeq 1$ для малых и больших масс медиатора, соответственно. Также, пик в дифференциальном сечении для мюонной моды смягчается, т.к. дифференциальное сечение не достигает области с малыми значениями виртуальности фотона. Действительно, с учетом выражения (2.50), справедливо $t_{\min}^{\text{WW}} \gtrsim \mathcal{O}(m_\mu^2)$, в результате чего подавляется пик в сечении мюона около $x \simeq 1$.

Далее, рассмотрим относительную разницу между дифференциальными сечениями в случаях приближения Вайцзеккера-Вильямса и расчета на древесном уровне для различных экспериментов с фиксированной мишенью. *NA64e.* Для всех рассматриваемых масс медиатора дифференциальное сечение в приближении Вайцзеккера-Вильямса приводит переоценке на уровне $\mathcal{O}(10)$ % в области $x \simeq 1$. Также, для относительно больших масс $m_{\text{MED}} \gtrsim 100$ МэВ, возникает переоценка при использовании приближения Вайцзеккера-Вильямса на уровне $\mathcal{O}(10)$ % вблизи $x \simeq 0$ и на уровне $\lesssim 2$ % для остального диапазона долей унесенной энергии. Однако, для промежуточных и малых масс медиатора $m_{\text{MED}} \lesssim 100$ МэВ происходит недооценка дифференциального сечения на уровне $\mathcal{O}(10)$ % в случае малых значений $x \ll 1$ для приближения Вайцзеккера-Вильямса, где происходит рост соответствующей переоценки при уменьшении доли x . *NA64 μ .* Для всего диапазона масс медиатора возникает переоценка при использовании приближения Вайцзеккера-Вильямса на уровне $\mathcal{O}(10)$ % вблизи точек $x \simeq 0$ и $x \simeq 1$ и для промежуточных долей x на уровне $\lesssim 2$ %. *LDMX* и M^3 . Поведение относительных разностей для экспериментов LDMX и M^3 имеет схожий характер с экспериментами NA64e и NA64 μ , соответственно,

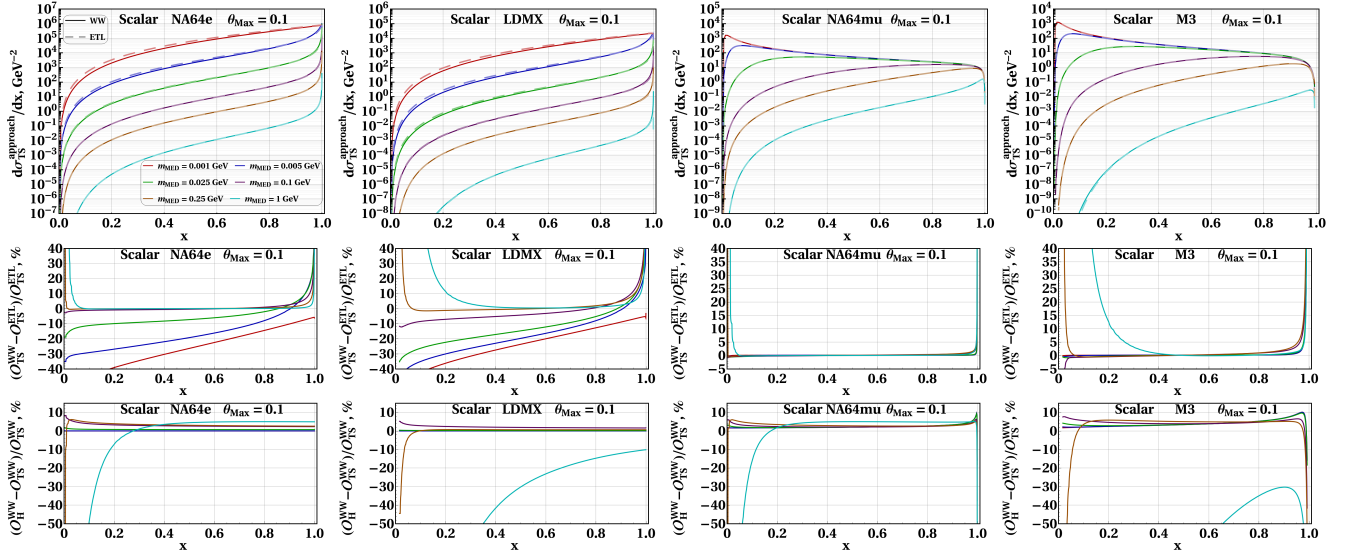


Рисунок 3.1 — *Общее*. На приведенном рисунке изображено дифференциальное сечение излучения скалярного медиатора в поле ядра и его относительная разница в случаях различных приближений и атомных форм-факторов. Каждый столбец соответствует эксперименту, а именно, NA64e (первый столбец), LDMX (второй столбец), NA64 μ (третий столбец) и M³ (четвертый столбец). Дифференциальные сечения в случае различных масс медиатора обозначаются различными цветами. Константа взаимодействия между лептоном и скалярным медиатором принимается как $c_{ll}^S = 1$. *Первая строка*. Дифференциальное сечение по доле унесенной скалярным медиатором энергии в приближении Вайцзеккера-Вильямса (непрерывная линия) и расчетов на древесном уровне (пунктирная линия). *Вторая строка*. Относительная разница дифференциального сечения для случаев приближения Вайцзеккера-Вильямса и расчетов на древесном уровне. *Третья строка*. Относительная разница дифференциального сечения между расчетами с использованием атомных форм-факторов Хельма и эталонного Тсаи-Шиффа.

но переоценка на уровне $\mathcal{O}(10)$ % для больших масс медиатора проявляется в более широкой области $x \ll 1$.

Следующим шагом рассмотрим влияние различных форм-факторов на дифференциальное сечение по доле энергии медиатора, где за эталонный форм-фактор взят общепринятый экранированный форм-фактор Тсаи-Шиффа (2.11). Дифференциальное сечение в случаях атомных хельмовского и экспоненциального форм-факторов имеют схожее поведение для относительной разницы соответствующих сечений. Однако, дифференциальное сечение в слу-

чае хельмовского форм-фактора дает меньшие значения по сравнению с экспоненциальным из-за более резкого падения для больших квадратов переданных импульсов t , что видно из графика 2.3. Следует отметить, что влияние форм-факторов на сечение для спин-0 и спин-1 медиаторов имеет схожий характер [216]. Влияние эффекта экранирования атомными электронами и разного описания размера ядра значительно проявляется при достижении минимальной виртуальностью фотона характерных значений $t_a \approx \mathcal{O}(10^{-10})$ ГэВ и $t_d \approx \mathcal{O}(10^{-3})$ ГэВ, которые достигаются при характерных массах медиатора $m_{\text{MED}} \lesssim (4E_0^2 t_a)^{1/4}$ и $m_{\text{MED}} \gtrsim (4E_0^2 t_d)^{1/4}$, соответственно. В частности, относительные разности дифференциальных сечений с экранированием и без него составляют $\lesssim \mathcal{O}(100)$ % и $\lesssim \mathcal{O}(10)$ % в случаях электронных и мюонных мод, подразумевающих малую массу медиатора, соответственно. Аналогично, относительные разности составляют $\lesssim \mathcal{O}(1)$ % и $\lesssim \mathcal{O}(0.1)$ % для промежуточной области масс $m_{\text{MED}} \gtrsim 10$ МэВ. Также, для масс медиатора $m_{\text{MED}} \lesssim 1$ ГэВ можно пренебречь эффектом экранирования. Следует отметить, что эффект экранирования атомными электронами при малых массах медиатора оказывает значительное влияние на электронную моду из-за достижения малых переданных импульсов. Действительно, с учетом формулы (2.52), в случае электронного первичного пучка справедливо $t_{\min} > \mathcal{O}(m_e^2)$, а для мюонной моды выполняется $t_{\min} > \mathcal{O}(m_\mu^2)$, что приводит к большей чувствительности электронной моды к эффекту экранирования атомными электронами по сравнению с мюонной модой. Далее, значительное влияние различного описания размера ядра на дифференциальное сечение возникает для больших масс медиатора на уровне $\mathcal{O}(10)$ %. В частности, для энергий налетающего пучка $\mathcal{O}(100)$ ГэВ основное различие между форм-факторами Тсаи-Шиффа и Хельма возникает в области $x \ll 1$, которая не дает доминирующего вклада в относительную разницу соответствующих полных сечений. Однако, для экспериментов LDMX и M³ с энергией пучка $\mathcal{O}(10)$ ГэВ соответствующая относительная разница принимает существенные значения в более широкой области около x_{\min} , что приводит к значительному различию на уровне полных сечений.

Тензорный медиатор. Далее, по аналогии со скалярным медиатором, рассмотрим дифференциальное сечение по доле унесенной энергии для тензорного медиатора, которое показано на графике 3.2. Важно подчеркнуть, что

для тензорного медиатора с массами $> \mathcal{O}(100)$ МэВ поведение дифференциального сечения для подходов Вайцзеккера-Вильямса и расчетов на древесном уровне имеет схожий характер для всех рассматриваемых экспериментов. В случае электронного и мюонного первичного пучков при массах медиатора около $\mathcal{O}(100)$ МеВ доминирует излучение с малыми энергиями медиатора. Однако, при рассмотрении больших масс медиатора, пик при $x \approx x_{\min}$ сглаживается, и значительным становится излучение в области средних унесенных медиатором энергий. Кроме того, в случае электронной моды присутствует резкий пик при больших унесенных энергиях, что связано с малым значением t_{\min} при $x \approx x_{\max}$. Влияние различных форм-факторов на форму дифференциального сечения имеет схожее поведение по сравнению со скалярным медиатором. Также, поведение относительной разницы для больших масс тензорного медиатора между вычислением дифференциального сечения в методе Вайцзеккера-Вильямса и на древесном уровне имеет схожий характер по сравнению со скалярным медиатором. Однако, для масс $m_{\text{MED}} < 100$ МэВ возникает существенная разница, в связи с резким ростом вычисленного на древесном уровне дифференциального сечения, что, в свою очередь, возникает из-за слагаемых с отрицательной степенью массы.

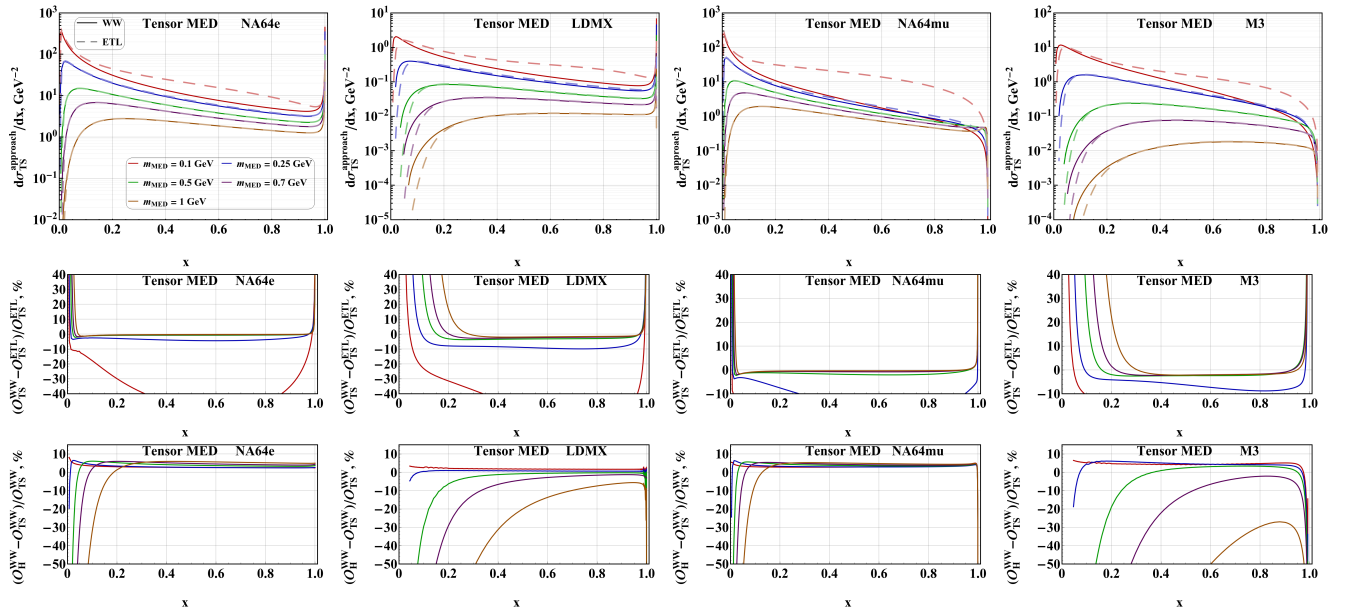


Рисунок 3.2 — Описание графика аналогично 3.1, где соответствующая константа взаимодействия для тензорного медиатора выбрана равной $c_{ll}^G = 1 \text{ ГэВ}^{-1}$

Относительная разница между дифференциальными сечениями в случаях приближения Вайцзеккера-Вильямса и расчета на древесном уровне для

различных экспериментов следующая. *NA64e*. Для относительно больших масс $m_{\text{MED}} \gtrsim 100$ МэВ, применение приближения WW приводит к завышению на уровне $\mathcal{O}(10)$ % около $x \simeq 1$ и $x \simeq 0$ и пренебрежимо малой разнице для других x . Однако для масс $m_{\text{MED}} < 100$ МэВ, приближение WW приводит к занижению на уровне $> \mathcal{O}(10)$ % для значения x и поведение на границах значений доли энергии медиатора аналогично. *NA64μ*. Поведение аналогично для *NA64e*, однако значительная разница появляется уже для масс $m_{\text{MED}} < 200$ МэВ. *LDMX* и M^3 : поведение относительных разностей похоже на формы *NA64e* и *NA64μ* соответственно, но переоценка для больших масс начинает проявляться в более широком диапазоне.

3.2.2 Полное сечение рождения медиаторов в поле ядра

Скалярный медиатор. На графике 3.3 приведено полное сечение и его относительная разница при различных упругих атомных форм-факторах и экспериментальных параметрах в случае скалярного медиатора. Рассмотрим влияние максимального угла излучения медиатора θ_{max} на относительную разницу полных сечений в подходах Вайцзеккера-Вильямса и расчетов на древесном уровне, где в качестве максимальных углов вылета медиатора выбраны $\theta_{\text{max}} \simeq 0.005$, и $\theta_{\text{max}} = 0.1$. Также стоит отметить, что полное сечение в подходе расчетов на древесном уровне для углов $\theta_{\text{max}} = 0.1$ и $\theta_{\text{max}} = \pi$ имеет относительное различие на уровне $\lesssim \mathcal{O}(0.1)$ % для всех рассматриваемых экспериментов. Относительно большая разница между полными сечениями в рассматриваемых подходах для углов $\theta_{\text{max}} = 0.1$ и $\theta_{\text{max}} = 0.005$ возникает только в случае экспериментов *LDMX* и M^3 в диапазоне масс $\mathcal{O}(100)$ МэВ $\lesssim m_{\text{MED}} \lesssim \mathcal{O}(1)$ ГэВ. Действительно, типичный угол излучения медиатора лежит в диапазоне больших углов для экспериментов с энергией пучка $\mathcal{O}(10)$ ГэВ, что относится к малой энергии первичного пучка относительно массы медиатора в приведенном диапазоне. Кроме того, типичный угол излучения медиатора можно оценить следующим образом как $\theta_{\text{typ}} \simeq m_l/E_l$. Тогда, в случае эксперимента M^3 типичные углы составляют $\simeq \mathcal{O}(10^{-2})$, что приводит к существенному занижению полного сечения при выборе угла $\theta_{\text{max}} = 0.005$ по сравнению

с $\theta_{\max} = 0.1$. Далее, опишем разницу между рассматриваемыми подходами для угла $\theta_{\max} = 0.1$. В области больших масс относительная разница находится на уровне $\mathcal{O}(20)$ % для эксперимента NA64e. Однако для эксперимента LDMX относительная разница существенно возрастает до уровня $\mathcal{O}(100)$ % по мере увеличения массы медиатора. В случае экспериментов NA64 μ и M³ относительная разница достаточно мала $\lesssim \mathcal{O}(1)$ % для всего диапазона масс медиатора и растет с увеличением массы. Основной вклад в переоценку полного сечения Вайцзеккера-Вильямса связан с областью $x \simeq 1$ для больших масс $m_{\text{MED}} \gtrsim 100$ МэВ. Однако в случае малых масс $m_{\text{MED}} \lesssim 100$ МэВ недооценка в методе WW происходит в области $x \lesssim 1$.

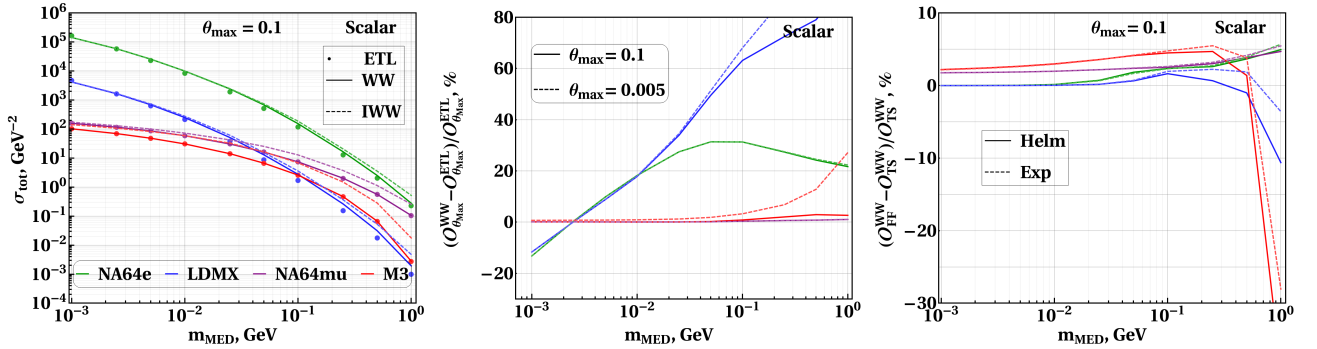


Рисунок 3.3 — *Общее*. На приведенном рисунке показано полное сечение и его относительная разница в случае различных углов вылета медиатора и моделей атомных форм-факторов, где цветом обозначены эксперименты NA64e (зеленый) LDMX (синий) NA64 μ (фиолетовый) и M³ (красный). *Первый столбец*. Полное сечение излучения скалярного медиатора в поле ядра в зависимости от массы с использованием приближения Вайцзеккера-Вильямса (непрерывная линия), приближения улучшенного Вайцзеккера-Вильямса (пунктирная линия) и расчетов на точном древесном уровне (точки). Константа взаимодействия для скаляра и лептона принимает следующее выражение $c_{ll}^S = 1$. *Второй столбец*. Относительная разница полных сечений в подходе Вайцзеккера-Вильямса и расчетов на древесном уровне в случае различных максимальных углов вылета $\theta_{\max} = 0.1$ и $\theta_{\max} = 0.005$. *Третий столбец*. Относительная разница полных сечений сечений для хельмовского (непрерывная линия) и экспоненциального (пунктирная линия) форм-факторов, где за эталонный взят форм-фактор Тсаи-Шиффа.

С учетом того, что зависимость от форм-фактора входит одинаковым образом для всех медиаторов в приближении Вайцзеккера-Вильямса, относительная разница и зависимость от параметра t_{\max} имеют схожее поведение для всех медиаторов спинов 0, 1 и 2. Для масс медиатора $m_{\text{MED}} \lesssim 10^{-1}$ ГэВ разница составляет 5 % и при $m_{\text{MED}} \simeq \mathcal{O}(1)$ ГэВ происходит рост относительной разницы до $\mathcal{O}(10)$ %. Как обсуждалось в разделе 2.1.3.2, это связано с более резким падением потока фотонов для других форм-факторов при достижении квадрата минимального переданного импульса значений, связанных с размером ядра.

Рассмотрим влияние на полное сечение в методе Вайцзеккера-Вильямса максимального значения квадрата переданного импульса, которое является верхним пределом потока фотонов (2.37). Расчеты далее сравниваются с общепринятым выбором форм-фактора Тсаи-Шиффа (2.11) при значении верхнего предела $t_{\max} = m_{\text{MED}}^2 + m_l^2$ [50; 53; 161]. Для сравнения использовались фиксированные значения верхнего предела в случаях максимального значения на рассматриваемом диапазоне масс $t_{\max} = 1$ ГэВ и максимально возможного значения $t_{\max} = E_0^2$. Дополнительно, для относительной разницы полных сечений в случаях $t_{\max} = 1$ ГэВ и $t_{\max} = E_0^2$ на основном диапазоне масс справедливо $\leq 10^{-4}$ % и при $m_{\text{MED}} \simeq 1$ ГэВ выполняется $\leq 10^{-2}$ %, что происходит из-за пренебрежимо малых значений форм-фактора при $t_{\max} > 1$ ГэВ. Основное влияние параметр t_{\max} оказывает для экспериментов с электронной модой. В частности, относительная разница полных сечений в случаях $t_{\max} = m_{\text{MED}}^2 + m_l^2$ и $t_{\max} = 1$ ГэВ при $m_{\text{MED}} = 10^{-3}$ ГэВ принимает значения $\simeq 10^2$ % и экспоненциально падает до 1 % при $m_{\text{MED}} = 10^{-1}$ ГэВ для NA64e и до 10 % для LDMX. Для мюонной моды, относительная разница на диапазоне масс от $m_{\text{MED}} = 10^{-3}$ ГэВ до $m_{\text{MED}} = 10^{-1}$ ГэВ составляет $\simeq 1$ % в случае экспериментов NA64 μ и M³. На диапазоне масс от $m_{\text{MED}} = 10^{-1}$ ГэВ до $m_{\text{MED}} = 1$ ГэВ относительная разница резко падает до значений $\simeq 10^{-2}$ % в случае электронного и мюонного первичного пучка. В итоге, для электронной моды необходимо осторожно подходить к выбору параметра t_{\max} в особенности при рассмотрении масс медиатора $\leq 10^{-1}$ ГэВ. Однако, для мюонного первичного пучка параметр t_{\max} является достаточно свободным при используемой точности расчетов в 1 %.

Тензорный медиатор. Аналогично, на графике 3.4 приведено полное сечение и его относительная разница при различных упругих атомных форм-факторах и экспериментальных параметрах в случае тензорного медиатора. Поведение полного сечения для процесса излучения тензорного медиатора в поле ядра имеет схожий характер со скалярным медиатором для больших масс медиатора. Кроме того, влияние различных упругих атомных форм-факторов на полное сечение в приближении Вайцзеккера-Вильямса аналогично скалярному медиатору. Однако, для масс $m_{\text{MED}} < 100$ МэВ в полное сечение с использованием расчетов на точном древесном уровне начинают давать существенный вклад слагаемые с отрицательной степенью массы, который отсутствует при в приближении Вайцзеккера-Вильямса. В частности, отсутствие в амплитуде масс с отрицательной степенью для соответствующего комpton-подобного процесса в приближении Вайцзеккера-Вильямса возникает при универсальной константе взаимодействия для лептона и фотона Стандартной модели.

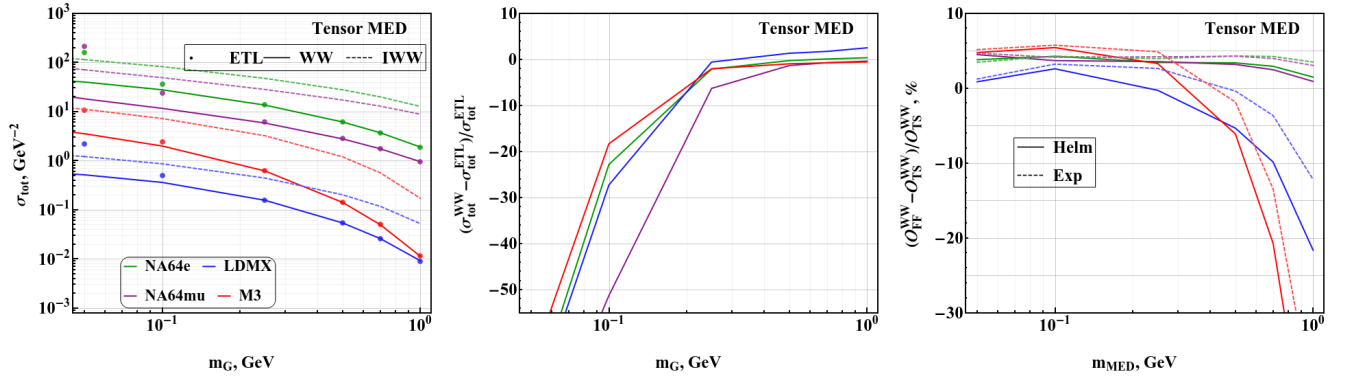


Рисунок 3.4 — Описание графика аналогично 3.3, где соответствующая константа взаимодействия для тензорного медиатора принимает следующие выражение $c_{ll}^G = 1 \text{ ГэВ}^{-1}$.

Далее, опишем относительную разницу между рассматриваемыми подходами для типичного угла $\theta_{\text{max}} = 0.1$, где полное сечение ведет себя одинаково в случае различных экспериментов с фиксированной мишенью, что показано во втором столбце рисунка 3.4. Для больших масс $m_{\text{MED}} \gtrsim 200$ МэВ относительная разница находится на уровне $\mathcal{O}(1)$ %, однако в случае массы тензорного медиатора около 100 МэВ относительная разница возрастает до уровня $\mathcal{O}(20)$ %. Также, относительная разница принимает значения на уровне $> \mathcal{O}(20)$ % для массы < 100 МэВ и увеличивается с уменьшением массы медиатора.

Важным итогом данного подраздела является то, что приближение Вайцзеккера-Вильямса работает на уровне относительной разницы $\mathcal{O}(10)\%$ для областей масс $m_G \gtrsim 200$ МэВ, которые, как показано в главе 3.4.2, отвечают за пространство параметров тензорного медиатора скрытого сектора. Численное описание сравнения сечений для интервале масс 1 МэВ $\lesssim m_G \lesssim 1$ ГэВ в методе Вайцзеккера-Вильямса и точного древесного приближения приводится в работе [217].

3.3 Реликтовая плотность темной материи

3.3.1 Скалярный медиатор

В этом разделе рассматриваются характерные зависимости между массой легкой темной материи и константами взаимодействия скалярного медиатора с электроном, при которой достигается наблюдаемая реликтовая плотность темной материи. Для краткости далее мы будем называть такие графики термальными мишенями или реликтовыми кривыми. На графике 3.5 показаны термальные мишени майорановской, дираковской скалярной и векторной темной материи, которая аннигилирует в электрон-позитронную пару, где для расчетов термально усредненного сечения использовались численный расчет формулы (1.20) и ее аналитическое выражение в нерелятивистском приближении (1.21).

Далее, рассмотрим разницу между расчетом термальных мишеней через формулу (1.20) и ее нерелятивистским приближением (1.21). В случае скалярной темной материи термальные мишени, которые рассчитаны через выражения (1.20) и (1.21), совпадают на всем диапазоне рассматриваемых масс легкой темной материи 1 МэВ $\lesssim m_S \lesssim 10$ ГэВ. Для дираковской и майорановской темной материи, которые аннигилируют в p -волну, расхождение между аналитическим и численным подходом для рассматриваемого диапазона масс может достигать $\gtrsim 20\%$. Также стоит отметить, что различие между реликтовыми кривыми для дираковской и майорановской темной материи возникает из-за коэффициента c между частицами и античастицами в формуле (1.19). В случае векторной темной материи расчет через формулу (1.20) и ее аналитического выражения в нерелятивистском приближении (1.21) дают значительное расхожде-

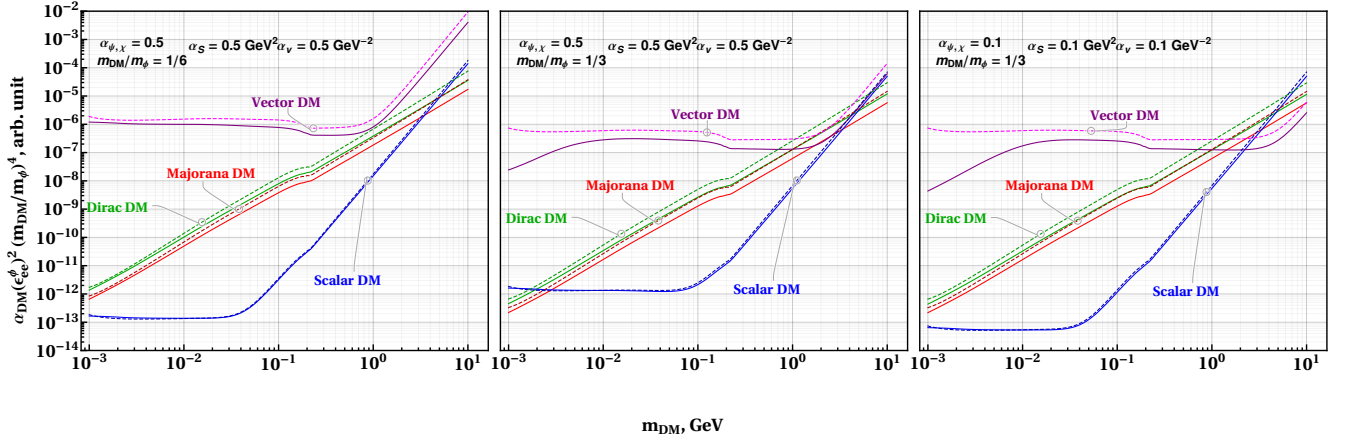


Рисунок 3.5 — Термальная мишень темной материи как функция ее массы. Майорановская [21], дираковская, скалярная и векторная темная материя изображены красной, зеленой, синей и фиолетовой линиями, соответственно. Сплошные линии соответствуют численному расчету через интеграл (1.20), а пунктирные линии представляют расчет термальной мишени в нерелятивистском приближении (1.21). Далее, приводятся численные значения параметров α_{DM} с соответствующей размерностью для скаляра, фермиона и вектора как ГэВ^2 , 1 и ГэВ^{-2} , соответственно. Левая панель: $\alpha_{\text{DM}} = 0.5$, $m_{\text{DM}}/m_{\phi} = 1/6$. Центральная панель: $\alpha_{\text{DM}} = 0.5$, $m_{\text{DM}}/m_{\phi} = 1/3$. Правая панель: $\alpha_{\text{DM}} = 0.1$, $m_{\text{DM}}/m_{\phi} = 1/3$.

ние из-за резкого резонансного пика в сечении (2.68). Кроме того, нерелятивистское приближение для векторной темной материи перестает работать при малых массах темной материи и больших значениях m_V/m_{ϕ} , так как в этом случае значительным становится вклад на массовой оболочке (2.64). В частности, аналитическое выражения (1.21) приводит к большой разнице для масс $m_{\phi} \simeq 3m_V$ для $m_V \simeq O(10)$ МэВ, которое уменьшается в области масс $m_{\phi} \simeq 6m_V$ из-за удаления резонансной точки от $s = 4m_V^2$, что связано с резким зарезанием в формуле термального усреднения (1.20) при удалении от значений $4m_{\text{DM}}^2$ инвариантной массы. Также, на графике 3.5 можно заметить малый скачок реликтовой плотности в области масс темной материи $m_{\text{DM}} \simeq 200$ МэВ, который связан с резким уменьшением числа эффективных степеней свободы (1.10) и (1.30) в эпоху рекомбинации.

Также стоит отметить, что уменьшение значения аналога постоянной тонкой структуры для темной материи, $\alpha_{\text{DM}} = (c_{\text{DM DM}}^{\text{MED}})^2 / (4\pi)$, приводит к более строгим ограничениям на пространство параметров темной материи, в предпо-

ложении отсутствия сигнальных событий невидимой моды в экспериментах, что можно видеть из рисунка 3.5. Однако, увеличение отношения масс медиатора и темной материи, $m_{\text{DM}}/m_{\text{MED}}$, приводит к смещению реликтовых кривых вниз относительно ограничений из невидимой моды экспериментов.

Кроме того, как можно видеть на графике 3.5, скалярная и векторная темная материя имеют отличную от фермионной форму термальной мишени. Действительно, в нерелятивистском приближении, $s \simeq 4m_{\text{DM}}^2$, сечение аннигиляции масштабируется параметризацией Брейта-Вигнера в следующем виде:

$$\langle v_{\text{Mol}} \sigma_S \rangle \propto \alpha_S [(4m_S^2 - m_\phi^2)^2 + (\Gamma_{\phi \rightarrow SS})^2 m_\phi^2]^{-1}, \quad (3.4)$$

где справедливо $m_\phi \Gamma_{\phi \rightarrow SS} \propto \alpha_S$, что следует из формулы (A.29). В частности, при характерных параметрах $\alpha_S \simeq 0.5 \text{ ГэВ}^2$ и $m_S/m_\phi \simeq 1/3$, параметризация (3.4) не зависит от массы $m_{S,\phi}$ при доминировании вклада от ширины распада $m_\phi \Gamma_{\phi \rightarrow SS} \gg 4m_S^2 - m_\phi^2$, что выполняется при $m_\phi \lesssim 200 \text{ МэВ}$. В результате, реликтовая кривая для скалярного медиатора стремится к постоянной для относительно легких масс $m_\phi \lesssim 300 \text{ МэВ}$. Однако, для тяжелых масс $m_\phi \gtrsim 300 \text{ МэВ}$ справедливо $4m_S^2 - m_\phi^2 \gg m_\phi \Gamma_{\phi \rightarrow SS}$ в знаменателе уравнения (3.4) и полученное термальное усреднение сечения масштабируется как $\langle v_{\text{Mol}} \sigma_S \rangle \propto \alpha_S/m_S^4$. Аналогично, в случае векторной темной материи и параметрах $\alpha_V = 0.5 \text{ ГэВ}^{-2}$ и $m_V/m_\phi = 1/3$ справедливо $\langle v_{\text{Mol}} \sigma_V \rangle \propto \alpha_V$ при $m_V < \mathcal{O}(1) \text{ ГэВ}$. Различное поведение для скалярной и векторной темной материи можно объяснить разной зависимостью полной ширины распада от массы темной материи, что приводит к характерным ограничениям на массу сверху или снизу. Кроме того, для дираковской и майорановской темной материи характерная зависимости термально усредненного сечения принимают выражения $\langle v_{\text{Mol}} \sigma_{\chi,\psi} \rangle \propto \alpha_{\chi,\psi}/(m_{\chi,\psi})^2$ для рассматриваемого диапазона масс темной материи $1 \text{ МэВ} \lesssim m_\phi \lesssim 1 \text{ ГэВ}$ и параметрах $\alpha_{\chi,\psi} = 0.5$ и $m_{\chi,\psi}/m_\phi = 1/3$.

3.4 Ограничения на константу взаимодействия

В данном разделе приведены итоговые графики оценки чувствительности лептонных экспериментов с фиксированной мишенью к взаимодействию скалярного и тензорного медиаторов скрытого сектора с лептоном. А именно, для

получения соответствующих оценок предполагается отсутствие сигнальных событий невидимой моды для процессов рождения медиатора в поле ядра и на атомных электронах. Далее, считается, что медиатор скрытого сектора рождается в активной мишени лептонных экспериментов, где для расчетов соответствующих ограничений используются параметры мишени (раздел 3.1.1). Для расчетов соответствующей чувствительности рассматриваемых экспериментов на основе процесса рождения медиатора в поле ядра используется приближение Вайцеккера-Вильямса. В частности, обсуждение полученных дифференциальных и полных сечений для оценки соответствующей чувствительности приводится в разделах 3.2.1 и 3.2.2, соответственно. Обсуждение полученных реликтовых кривых для скалярного медиатора приведено в разделе 3.3.1, также для тензорного медиатора были использованы известные реликтовые кривые из работы [37].

Отсутствие сигнальных событий. События с излучением медиатора скрытого сектора можно считать независимыми, т.е. предполагается, что число испускаемых частиц N_{MED} распределено по закону Пуассона. Далее, для нахождения оценки верхнего предела числа ожидаемых событий $\bar{N}_{\text{MED}}^{\text{up}}$ используем байесовский подход с уровнем достоверности $1 - \alpha$ и постоянной апостериорной вероятностью $\pi(\lambda)$. В частности, в байесовской статистике оценка для верхнего ограничения числа ожидаемых событий принимает вид $\bar{N}_{\text{MED}}^{\text{up}} = \ln(1/\alpha)$. В итоге, при $\alpha = 0.1$ для числа событий справедливо $N_{\text{MED}} < 2.3$ при отсутствии сигнальных событий в эксперименте. Кроме того, для оценки верхнего предела числа ожидаемых событий результаты в байесовской статистике с постоянной апостериорной вероятностью и частотном подходе совпадают [218].

Сигнальные события рождения медиатора в поле ядра. Далее, предполагая, что излучение медиатора происходит на первой радиационной длине или же радиационными потерями можно пренебречь, для экспериментов с фиксированной мишенью число излученных в поле ядра медиаторов скрытого сектора можно оценить следующим образом [190]:

$$N_{\text{MED}}^{\text{brem.}} \simeq \text{LOT} \cdot \frac{\rho N_A}{A} L_T \cdot \eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}} \cdot \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} dx \frac{d\sigma_{2 \rightarrow 3}(x)}{dx} \text{Br}(\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}), \quad (3.5)$$

где L_T - эффективная длина взаимодействия электрона в мишени; EOT - число упавших на мишень лептонов; ρ - массовая плотность материала мишени; N_A - число Авогадро; A, Z - массовое число и заряд ядер мишени, соответственно; $x \equiv E_{\text{MED}}/E_0$; E_0 - начальная энергия первичного лептонного пучка; E_{MED} - унесенная медиатором энергия; x_{\min} и x_{\max} - определенные для конкретного эксперимента минимальная и максимальная доли унесенной медиатором энергии, соответственно; $d\sigma_{2\rightarrow 3}/dx$ - дифференциальное сечение излучения медиатора в процессе (2.1); $\eta_{\text{MED}}^{\text{brem.}}$ - типичная эффективность излучения медиатора в поле ядра для конкретного эксперимента, доля невидимых распадов считается преобладающей, т. е. $\text{Br}(\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}) \approx 1$.

Сигнальные события аннигиляции в темный сектор через медиатор. Аналогично, число аннигиляций вторичных позитронов на атомных электронах материала мишени в темную материю оценивается как [56; 190]:

$$N_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \simeq \text{EOT} \cdot \frac{\rho N_A}{A} L_T \cdot \eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \cdot \int_{E_{e^+}^{\text{cut}}}^{E_{e^+}^{\text{max}}} dE_{e^+} \sigma_{\text{tot}}(E_{e^+}) T(E_{e^+}), \quad (3.6)$$

где $\sigma_{\text{tot}}(E_{e^+})$ - резонансное полное сечение электрон-позитронной аннигиляции в темную материю (2.62); $T(E_{e^+})$ - дифференциальное распределение длин треков вторичных позитронов; $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$ - типичная эффективность, связанная с рождением темной материи через резонансный канал; E_{e^+} - энергия вторичных позитронов; $E_{e^+}^{\text{cut}} = E_0 x_{\min}$ и $E_{e^+}^{\text{max}} = E_0$ - минимальная и максимальная энергии вторичных позитронов в электромагнитном ливне, соответственно. Также стоит отметить использование предположения, что сигналы для позитронного и электронного первичных пучков имеют одинаковую эффективность $\eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}}$. Кроме того, в случае резонансного рождения медиатора число сигнальных событий усилено зарядом ядра.

Подробное исследование аналитического приближения для типичного дифференциального распределения длин треков позитронов $T(E_{e^+})$ можно найти в литературе [56; 219–222]. Для толстой мишени было показано, что $T(E_{e^+})$ зависит в первом порядке от типа материала мишени через мультипликативный коэффициент как $T(E_{e^+}) \propto X_0$, где X_0 - радиационная длина в соответствующем материале. Кроме того, дифференциальное распределение длин треков позитронов с энергией позитронов E_{e^+} зависит от энергии первичной налетающей

щей частицы E_0 через E_{e^+}/E_0 . Следовательно, данная зависимость позволяет отшкалировать по энергии распределение и отнормировать распределение на радиационную длину. В результате, на основе преобразований выше, полученное распределение при фиксированном материале и энергии первичного пучка можно превратить в универсальное распределение позитронов [56; 62; 66]. Далее, подставляя конкретные для эксперимента значения E_0 и X_0 , можно получить дифференциальное распределение длин треков позитронов для соответствующей мишени. Распределения длины треков позитронов при развитии электромагнитного ливня было рассчитано с помощью численного моделирования Монте-Карло с использованием библиотеки GEANT4 [223] в работах [56; 62]. Важно отметить, что зависимостью типичных углов между направлением первичного пучка и импульсов вторичных позитронов можно пренебречь [56].

В приближении узкого резонанса (2.64), которое также справедливо при пороговых значениях $m_{\text{MED}} \simeq 2m_{\text{DM}}$, оценка числа сигнальных событий в резонансном процессе принимает вид:

$$N_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \approx \eta_{\text{MED}}^{\text{ann.}} \text{EOT} \cdot \frac{\rho N_A Z}{A} L_T \frac{\tilde{c}_{\text{MED}} T_+(E_R)}{2m_e} \cdot \theta(E_R - E_{e^+}^{\text{cut}}) \theta(E_{e^+}^{\text{max}} - E_R), \quad (3.7)$$

где $E_R = m_{\text{MED}}^2/(2m_e)$ - характерная энергия резонанса, $\theta(x)$ - функция Хевисайда.

3.4.1 Ограничения для скалярного медиатора

Как показано на графике 3.6, для скалярного медиатора при текущей накопленной статистике $\text{EOT} \simeq 9.37 \times 10^{11}$ эксперимент NA64e исключает дираковскую легкую термальную темную материю для масс $m_\phi \lesssim 300$ МэВ. Также, для масс скалярного медиатора в области 10^{-2} ГэВ $\lesssim m_\phi \lesssim 0.1$ ГэВ исключена майорановская темная материя для приведенных на рисунке параметров. Более того, при ожидаемой статистике $\text{EOT} \simeq 10^{12}$ эксперимент NA64e позволяют полностью исключить майорановскую темную материю для соответствующих параметров на рисунке. Эксперименты как LDMX и Belle II при наборе планируемой статистики подтвердят приведенные выше результаты для рассматриваемой дираковской и майорановской темной материи. Кроме того, в случае скалярной темной материи эксперименты NA64e и LDMX исключают только часть пространства параметров реликтовой плотности. Однако, с учетом

отсутствия подавления сечения по скорости для скалярной темной материи, реликтовая плотность уже исключена на основе наблюдаемого спектра фонового космического излучения.

Также на графике 3.6 показана оценка соответствующей чувствительности на основе аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени для планируемой и ожидаемой статистиках в экспериментах NA64e и LDMX. Кроме того, показаны ожидаемые результаты в случае позитронного первичного пучка. А именно, для оценки чувствительности использована текущая и ожидаемая статистика в случае электронного пучка, где полагается аналогичный электронной моде фон. При этом позитронный пучок дает более строгие ограничение на константу связи медиатора и электрона из-за присутствия в электромагнитном ливне позитронов уже в первом поколении. Использование процесса аннигиляции вторичных позитронов в мишени для экспериментов NA64e и LDMX позволяет улучшить текущие ограничения на порядок в узком диапазоне масс $0.23 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 0.32 \text{ ГэВ}$ и $0.11 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 0.13 \text{ ГэВ}$, соответственно.

Рассмотрим влияние параметра t_{max} в приближение Вайцеккера-Вильямса (2.40) на ограничения константы взаимодействия для значений $t_{\text{max}} = m_{\text{MED}}^2 + m_l^2$ и $t_{\text{max}} = 1 \text{ ГэВ}$. Из-за введения нижнего предела при интегрировании дифференциального сечения в формуле для оценки числа событий, разница между атомными форм-факторами уменьшается. Как было показано на примере полного сечения в разделе 3.2.2, в случае мюонного пучка влияние параметра t_{max} незначительно. В частности, для экспериментов NA64 μ и M³ разница составляет $\lesssim 0.3 \%$ и $\lesssim 0.6 \%$, соответственно. Однако, влияние параметра t_{max} в случае электронной моды может быть существенным. Действительно, в случае NA64e разница при $m_{\text{MED}} \simeq 2m_e$ составляет 30 %, которая падает до 0.3 % при $m_{\text{MED}} \simeq 1 \cdot 10^{-1} \text{ ГэВ}$ и до $\lesssim 10^{-4} \%$ при $m_{\text{MED}} \simeq \mathcal{O}(1) \text{ ГэВ}$. Аналогично, для эксперимента LDMX разница при $m_{\text{MED}} \simeq 2m_e$ составляет 30 %, которая падает до 0.3 % при $m_{\text{MED}} \simeq 2 \cdot 10^{-1} \text{ ГэВ}$ до $\lesssim 10^{-4} \%$ при $m_{\text{MED}} \simeq \mathcal{O}(1) \text{ ГэВ}$.

3.4.2 Ограничения для тензорного медиатора

На графике 3.7 приведена оценка чувствительности рассматриваемых экспериментов с фиксированной мишенью к моделям с тензорным медиатором. Для получения соответствующей оценки были использованы процессы рождения тензорного медиатора скрытого сектора в приближении Вайцзеккера-Вильямса и аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени через тензорный медиатор темной материи. Также стоит отметить, что для тензорного медиатора скрытого сектора приближение Вайцзеккера-Вильямса и расчеты на древесном уровне имеют относительную разницу на уровне $\mathcal{O}(10)\%$ в интервале масс $200 \text{ МэВ} \lesssim m_G \lesssim 1 \text{ ГэВ}$. Однако, для масс $m_G \lesssim 200 \text{ МэВ}$ приближение Вайцзеккера-Вильямса можно рассматривать как консервативную оценку соответствующей чувствительности. Кроме того, на рисунке 3.7 видно, что приведенные реликтовые плотности скалярной, дираковской и векторной темной материи для масс $m_G \lesssim 100 \text{ МэВ}$ уже закрыты из результатов эксперимента ВаВаг и астрофизических наблюдений. Однако, требуется дополнительное изучение поведения реликтовых кривых в случае тензорного медиатора в контексте энергетического масштаба экспериментов с фиксированной мишенью для исключения различных типов темной материи.

Аналогично, для тензорного медиатора в эксперименте ВаВаг на основе процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma G$ для масс $m_G \lesssim 1 \text{ ГэВ}$ ограничения на константу взаимодействия тензорного медиатора и электрона принимают вид $c_{ee}^G \lesssim 2 \times 10^{-4} \text{ ГэВ}^{-1}$. Также стоит отметить, что текущие ограничения эксперимента НА64е на основе процессов рождения медиатора в поле ядра и на атомных электронах дают менее строгие ограничения чем ВаВаг. Однако, с планируемой статистикой эксперимент НА64е ограничивает схожую с ВаВаг область параметров. Таким образом, эксперимент НА64е при статистике в 5×10^{12} электронов, накопленных на мишени, может быть чувствителен на 90 % С. Л. к поискам тензорного медиатора с константой взаимодействия в диапазоне $c_{ee}^G \gtrsim 1.4 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$ для масс меньше $m_G \lesssim 1 \text{ ГэВ}$.

Более того, на графике 3.7 приведена оценка чувствительности экспериментов НА64 μ и М³ с фиксированной мишенью. Также стоит отметить, что мюоны более высоких энергий из НА64 μ позволяют исследовать более широкую

область по сравнению с M^3 . А именно, эксперимент NA64 μ позволит ограничить на уровне достоверности 90 % С. Л. для масс $100 \text{ МэВ} \lesssim m_G \lesssim 1 \text{ ГэВ}$ константу взаимодействия тензорного медиатора и мюона в диапазоне $c_{\mu\mu}^G \gtrsim 1.15 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$ при накоплении статистике в 5×10^{13} мюонов, накопленных на мишени.

Важно отметить, что ограничения из тормозного излучения не применимы к случаю темной материи с константой связи $c_{\text{DM DM}}^G \simeq 1 \text{ GeV}^{-1}$, так как характерные передачи импульса в темный сектор превышают значение $E_l \simeq \mathcal{O}(10) \text{ GeV} \gtrsim 1/c_{\text{DM DM}}^G$, выше которого перестает работать применимость неперенормируемого взаимодействия тензорного медиатора с темным сектором. Для этого случая нам лишь важно, что основной канал распада медиатора спина-2 происходит в канале темного сектора.

На рисунке 3.7 также изображены чувствительности для экспериментов NA64e и LDMX в пространстве параметров тензорного медиаторов на основе процессов резонансной аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени для дираковской темной материи. В частности, расчет соответствующей чувствительности производился в приближении узкого резонанса, т.е. полученная чувствительность электронной моды экспериментов в резонансной области не зависит от типа темной материи. Соответствующее резонансное усиление чувствительности для NA64e и LDMX происходит в диапазоне масс $0.23 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 0.32 \text{ ГэВ}$ и $0.11 \text{ ГэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 0.13 \text{ ГэВ}$, соответственно, в случае $c_{\text{DM DM}}^G \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ и $m_G \gtrsim 2m_{\text{DM}}$. Отметим, что в аннигиляционном канале характерная передача энергии в темный сектор оценивается как $\sqrt{s} \simeq m_{\text{MED}} \lesssim 1/c_{\text{DM DM}}^G$. Именно поэтому канал аннигиляционный канал позволяет оценить чувствительность к определенной темной материи с константой связи $c_{\text{DM DM}}^G \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$. Для приведенных термальных кривых темной материи были использованы значения $c_{\text{DM DM}}^G \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ и $m_G \gtrsim 2m_{\text{DM}}$, взятые из работы [37].

Кроме того, объяснение аномалии $(g-2)_\mu$ за счет тензорного медиатора уже исключено экспериментами BaBar и NA64e.

Результаты третьей главы

В данном разделе было рассмотрено влияние моделей упругих атомных форм-факторов на дифференциальное и полное сечения рождения медиатора в поле тяжелых ядер в приближении Вайцзеккера-Вильямса для экспериментов с фиксированной мишенью. Получены ограничения и оценена чувствительность для константы взаимодействия скалярного и тензорного медиаторов скрытого сектора при торможении заряженного лептона в поле тяжелых ядер фиксированной мишени соответствующих лептонных экспериментов. Получены ограничения на константу взаимодействия скалярного и тензорного медиаторов темной материи при аннигиляции вторичных позитронов в мишени для электронного и позитронного первичного пучка. Получены реликтовые кривые для легкой темной материи в предположении ее термального контакта в ранней Вселенной и скалярного медиатора темной материи, взаимодействующего преимущественно с электроном.

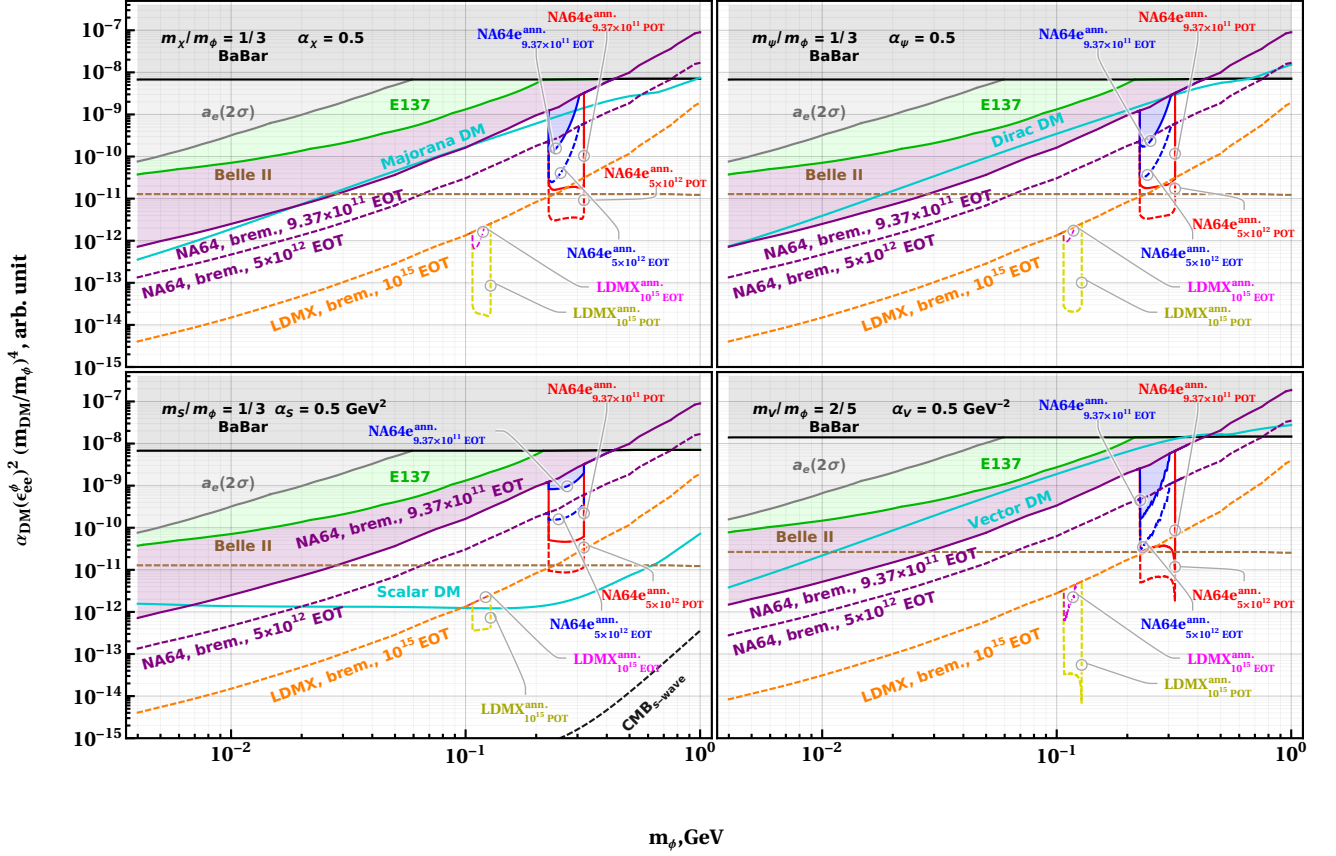


Рисунок 3.6 — Ограничения на константу взаимодействия скалярного медиатора с электроном из реакций рождения медиатора в поле ядра (метод Вайцзекера-Вильямса) и в резонансном процессе для невидимой моды (раздел 3.1.1). Черной непрерывной линией показаны ограничение на основе эксперимента BaBar [211]. Зеленой непрерывной линией показаны ограничения из эксперимента E137 [21; 205; 207]. Пунктирной коричневой линией показаны пределы из планируемых результатов эксперимента Belle II [21]. Исключение из CMB для скалярной темной материи показаны пунктирной черной линией [12]. Фиолетовой и оранжевой непрерывной (пунктирной) линиями показаны текущие (планируемые) ограничения для экспериментов NA64e и LDMX, соответственно. Красной и синей (желтой и розовой) линиями показаны ограничение из резонансной реакции для позитронной и электронной мод из эксперимента NA64e (LDMX), соответственно, где для текущей статистики используется непрерывная линия, а планируемая пунктирной. Реликтовые кривые для соответствующего типа темной материи изображены бирюзовой линией. Соответствие панели и типу темной материи представлено как: левая верхняя - майорановская, левая нижняя - скалярная, правая верхняя - дираковская и правая нижняя - векторная, где соответствующие константы введены в выражении (2.74).

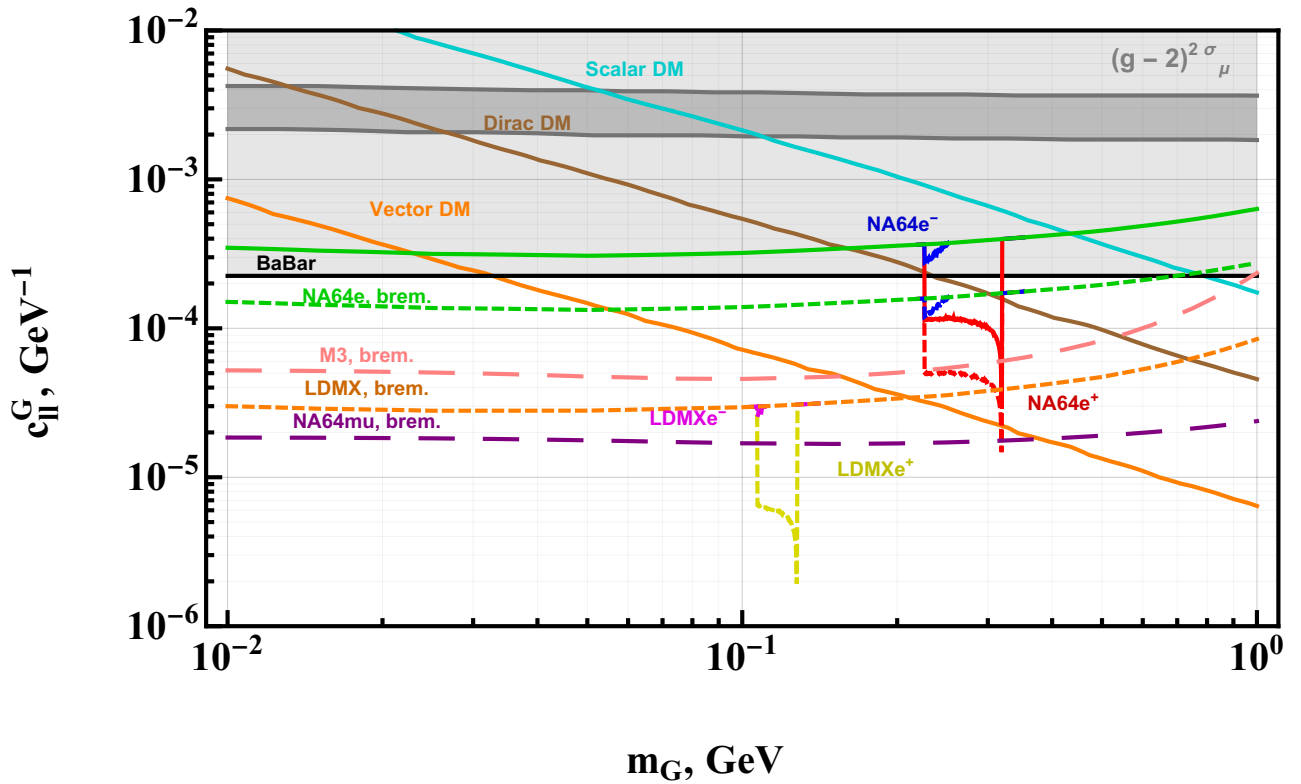


Рисунок 3.7 — (Слева) Ограничения на константу взаимодействия тензорного медиатора с лептоном как функция его массы из реакций рождения медиатора в поле ядра и в резонансном процессе для невидимой (раздел 3.1.1). Для приведенных термальных кривых на графике из работы [37] были использованы $c_{\text{DM DM}}^G \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ и $m_G \gtrsim 2m_{\text{DM}}$. Для расчета ограничений из процесса аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах через медиатор темной материи использовались приближение узкого резонанса и следующие параметры $c_{\text{DM DM}}^G \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ и $m_G \approx 2m_{\text{DM}}$. Область $(g - 2)_\mu$ при 2σ показана серой полосой [37]. Черной непрерывной линией показаны ограничение на основе эксперимента BaBar [37]. Реликтовые плотности для скалярной, дираковской и векторной темной материи изображены бирюзовой, коричневой и оранжевой линиями, соответственно [37]. Для экспериментов ниже используется непрерывная и пунктирная линии для текущей и планируемой статистики, соответственно. Эксперименты NA64e, NA64 μ , LDMX и M³ изображены зеленой, фиолетовой, оранжевой и розовой линиями, соответственно. Ограничение из резонансной реакции для электронной и позитронной мод эксперимента NA64e (LDMX) показаны синей (малиновой) и красной(желтой) линиями, соответственно.

Заключение

В данной работе получены ограничения и оценена чувствительность лептонных экспериментов с фиксированной мишенью для поиска моделей медиаторов скрытого сектора со спином 0 и спином 2. Для вычисления числа сигнальных событий рождения медиаторов использовались два основных канала при рассеянии заряженного лептона на мишени. Первый канал предполагает тормозное рождение медиатора в приближении Вайцзеккера-Вильямса. Второй канал связан с процессом аннигиляции вторичных позитронов электромагнитного ливня с атомарными электронами, которые рождают медиатор, распадающийся на частицы темной материи. Перечислим основные полученные результаты в диссертации.

1. Оценена чувствительность планируемых (LDMX и M^3) и получены ограничения проводимых в настоящее время (NA64e и NA64 μ) лептонных экспериментов для взаимодействия тензорного медиатора и соответствующего лептона на основе предположения об отсутствии сигнальных событий рождения медиатора скрытого сектора в поле ядер мишени при торможении лептона. Для получения ограничений на уровне достоверности 90 % С. Л. использовалось приближение Вайцзеккера-Вильямса для интервала масс $200 \text{ МэВ} \lesssim m_G \lesssim 1 \text{ ГэВ}$. Эксперимент NA64e при текущей статистике 9.37×10^{11} электронов, накопленных на мишени, дает ограничения на уровне $c_{ee}^G \gtrsim 3.3 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$, однако полученные ограничения эксперимента NA64e не достигают существующих пределов из эксперимента BaBar на уровне $c_{ee}^G \gtrsim 2.2 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$. В случае планируемой статистики в 5×10^{12} электронов, накопленных на мишени, эксперимент NA64e позволит улучшить ограничения на пространство параметров моделей темного сектора в диапазоне $c_{ee}^G \gtrsim 1.4 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$. Планируемая статистика эксперимента LDMX как 10^{15} электронов, накопленных на мишени, может дать улучшенную чувствительность по сравнению с экспериментом NA64e на уровне $c_{ee}^G \gtrsim 3 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$. Аналогично, эксперимент NA64 μ обладает чувствительностью к взаимодействию тензорного медиатора и мюона в диапазоне $c_{\mu\mu}^G \gtrsim 1.15 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$ для планируемой статистики в 5×10^{13} мюонов, накопленных на мишени. Также, M^3 при планируемой статистике 10^{13}

мюонов, накопленных на мишени, чувствителен к взаимодействию тензорного медиатора и мюона на уровне $c_{\mu\mu}^G \gtrsim 4.7 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$.

2. Получены ограничения на взаимодействие электрона и тензорного медиатора темной материи в экспериментах NA64e и LDMX для процесса аннигиляции вторичных позитронов на атомных электронах мишени через медиатор темной материи в случае дираковской и скалярной темной материи. Константа взаимодействия тензорного медиатора и темной материи была взята в виде $c_{DM DM}^G \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$. В частности, для тензорного медиатора и электрона в случае эксперимента NA64e со статистикой 9.37×10^{11} электронов, накопленных на мишени, происходит незначительное усиление ограничений из эксперимента NA64e до уровня $c_{ee}^G \gtrsim 1.2 \times 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$ в соответствующей области масс, которое не вносит новых ограничений по сравнению с экспериментом BaBar. Однако, в случае экспериментов NA64e и LDMX планируемая позитронная мода пучка позволит улучшить ограничения в разы относительно ограничений, основанных на процессе рождения медиаторов при торможении первичного пучка в поле ядра мишени, что показывает перспективность позитронного первичного пучка.

3. Показано незначительное влияние выбора существующих моделей параметризации упругих атомных форм-факторов на величину сечения рождения медиатора скрытого сектора в поле тяжелых ядер мишени планируемых (LDMX и M^3) и проводимых в настоящее время (NA64e и NA64 μ) экспериментов для диапазона масс $1 \text{ МэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 1 \text{ ГэВ}$. Для масс медиатора $m_{\text{MED}} \lesssim 400 \text{ МэВ}$ в случае хельмовского и экспоненциального форм-факторов по отношению к форм-фактору Тсаи-Шиффа относительная разница для полных сечений составляет $\lesssim 5 \%$ для рассматриваемых экспериментов с фиксированной мишенью. Далее, для масс $400 \text{ МэВ} \lesssim m_{\text{MED}} \lesssim 1 \text{ ГэВ}$ соответствующая относительная разница полных сечений для экспериментов NA64e и NA64 μ принимает вид $\lesssim 5 \%$ и, аналогично, для экспериментов LDMX и M^3 справедлива оценка $\lesssim 30 \%$.

4. Показано, что эксперимент NA64e для скалярного медиатора, взаимодействующего преимущественно с электроном, при текущей статистике в 9.37×10^{11} электронов, накопленных на мишени, позволяет исключить дираковскую легкую темную материю для масс $m_\phi \lesssim 300 \text{ МэВ}$ на уровне досто-

верности 90 % С. Л. Также, эксперимент NA64e с планируемой статистикой в 5×10^{12} электронов, может исключить майорановскую темную материю. Аналогично, при наборе планируемой статистики эксперимент LDMX позволит подтвердить полученные из эксперимента NA64e ограничения на взаимодействие скалярного медиатора и электрона в случае дираковской и майорановской темной материи.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю диссертации Дмитрию Викторовичу Кирпичникову и научному руководителю магистерской работы Андрею Юрьевичу Трифонову за наставления и внимание к работе. Автор также выражает благодарность Ренату Рамильевичу Дусаеву, Алексею Эдуардовичу Шевелеву и Александру Ивановичу Фиксу за мотивационную поддержку, которую они оказывали в процессе подготовки диссертации. Автор хотел бы поблагодарить Дмитрия Сергеевича Горбунова, Сергея Владимировича Демидова и Екатерину Андреевну Крюкову за ценные замечания и советы, высказанные при подготовке текста диссертации. Автор также выражает благодарность Виктору Тимофеевичу Киму, Андрею Борисовичу Арбузову и Сабиру Рамазановичу Рамазанову за проявленный интерес к работе. Автор признателен всем участникам коллаборации NA64 за поддержание творческой и рабочей атмосферы.

Приложение А Выражения для сечений и матричных элементов

А.1 Матричные элементы, ширины и сечения

В данном разделе приведены матричные элементы и сечения для рассматриваемых процессов. Все расчеты выполнялись с использованием пакета FeynCalc [224; 225] в программе Wolfram Mathematica [215].

В естественной системе единиц:

$$1 \text{ cm}^{-1} = 0.19733 \cdot 10^{-13} \text{ GeV}, \quad 1 \text{ s}^{-1} = 6.5822 \cdot 10^{-25} \text{ GeV}, \quad 1 \text{ K} = 8.6173 \cdot 10^{-14} \text{ GeV}.$$

где использованы соотношения конверсии $hc = 1$, постоянная Планка $\hbar = 1$ и постоянная Больцмана $k_B = 1$. Соответствующие размерности основных величин в уравнениях движения для частиц:

$$[S] = 0, \quad [\mathcal{L}] = 4, \quad [m] = 1, \quad [\partial_x] = 1,$$

$$[\phi] = 1, \quad [\psi] = 3/2, \quad [V_\mu] = 1, \quad [h_{\mu\nu}] = 1, \quad [F_{\mu\nu}] = 2.$$

А.1.1 Матричные элементы

Далее, используя введенные переменные Манделъштама для процесса $2 \rightarrow 3$, основные скалярные произведения принимают вид:

$$(p', k) = (\tilde{s} - m_k^2)/2, \quad (p, p') = (2m_p^2 - m_k^2 + \tilde{s} + \tilde{u} + t)/2, \quad (p, k) = (m_k^2 - \tilde{u})/2, \quad (\text{A.1})$$

$$(p, q) = (\tilde{s} + t)/2, \quad (p', q) = -(\tilde{u} + t)/2, \quad (k, q) = (\tilde{s} + \tilde{u})/2, \quad (\text{A.2})$$

$$(P_i, P_f) = M^2 + t/2, \quad (P_i, q) = -t/2, \quad (P_f, q) = t/2, \quad (\text{A.3})$$

$$(P, P) = 4M^2 + t, \quad (k, P) = (p, P) - (p', P), \quad (q, P) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$(p, P) = 2ME_p - (\tilde{s} + t)/2, \quad (p', P) = 2M(E_p - E_k) + (\tilde{u} - t)/2. \quad (\text{A.5})$$

Для процесса излучения скалярного медиатора в поле ядра усредненный по начальным и просуммированный по конечным состояниям квадрат матрич-

ного элемент квадрат матричного элемента принимает вид [161; 184]:

$$\overline{|\mathcal{M}_{l^-N \rightarrow l^-N\phi}|^2} = C_{\mathcal{M}}^2 \left[\frac{(\tilde{u} + \tilde{s})^2}{\tilde{u}\tilde{s}} P^2 - \frac{4t(k, P)^2}{\tilde{u}\tilde{s}} - (m_{\text{MED}}^2 - 4m_l^2) \frac{(\tilde{u} + \tilde{s})^2}{\tilde{u}^2\tilde{s}^2} \left(-P^2t + 4 \frac{(\tilde{u}(p, P) + \tilde{s}(p', P))^2}{(\tilde{u} + \tilde{s})^2} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

где $C_{\mathcal{M}} = c_{ll}^{\text{MED}} e^2 F(-q^2)/q^2$, $(k, P) = (p', P) - (p, P)$ и использованы переменные Мандельштама (2.3).

Аналогично, применяя правила Феймана (1.47), (1.45) и (1.46), усредненный по начальным и просуммированный по конечным состояниям квадрат матричного элемента для процесса $lN \rightarrow lNG$ выражается как:

$$\overline{|\mathcal{M}_{l^-N \rightarrow l^-NG}|^2} = (c_{ll}^{\text{G}})^2 e^4 \frac{F^2(t)}{t^2} \frac{R^{(0)} + R^{(2)}m_l^2 + R^{(4)}m_l^4}{12m_{\text{G}}^4 \tilde{s}^2 \tilde{u}^2 [\tilde{s} + \tilde{u} + t - m_{\text{G}}^2]^2}, \quad (\text{A.7})$$

где использованы следующие обозначения:

$$R^{(0)} = \sum_{i=0}^6 m_{\text{G}}^{2*i} R_i^{(0)}, \quad R^{(2)} = \sum_{i=1}^5 m_{\text{G}}^{2*i} R_i^{(2)}, \quad R^{(4)} = \sum_{i=2}^4 m_{\text{G}}^{2*i} R_i^{(4)}, \quad (\text{A.8})$$

$$R_6^{(0)} = 3 \{ \tilde{s}^2 [P^2t - 4(p', P)^2] - 2\tilde{s}\tilde{u} [P^2t + 4(p, P)(p', P)] + \tilde{u}^2 [P^2t - 4(p, P)^2] \}, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} R_5^{(0)} = & 3\tilde{s}^3 \{ P^2(\tilde{u} - 2t) + 8(p', P)^2 \} + \\ & + 6\tilde{s}^2 \{ P^2 [-t^2 + 2t\tilde{u} + 4\tilde{u}^2] + 8(p, P)(p', P)\tilde{u} + 4(p', P)^2 [t + \tilde{u}] \} + \\ & + 3\tilde{s}\tilde{u} \{ 14P^2t^2 + 4P^2t\tilde{u} + P^2\tilde{u}^2 \} + \\ & + 3\tilde{s}\tilde{u} \{ -4t [(p, P)^2 - 12(p, P)(p', P) + (p', P)^2] \} + \\ & + 3\tilde{s}\tilde{u} \{ +8(p, P)\tilde{u} [(p, P) + 2(p', P)] \} + \\ & + 6\tilde{u}^2 \{ t + \tilde{u} \} \{ 4(p, P)^2 - P^2t \}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
R_4^{(0)} = & -3 \left\{ \tilde{s}^4 \left[-P^2 t + 2P^2 \tilde{u} + 4(p', P)^2 \right] + \right. \\
& + 2\tilde{s}^3 \left[P^2 \left[-t^2 + 3t\tilde{u} + 9\tilde{u}^2 \right] + 4(p, P)(p', P)\tilde{u} + 4(p', P)^2 [t + \tilde{u}] \right] + \\
& + \tilde{s}^2 \left[P^2 \left[-t^3 + 30t^2\tilde{u} + 26t\tilde{u}^2 + 18\tilde{u}^3 \right] + 4(p, P)^2\tilde{u} [\tilde{u} - 2t] \right] + \\
& + \tilde{s}^2 \left[16(p, P)(p', P)\tilde{u} [5t + \tilde{u}] + 4(p', P)^2 [t^2 + \tilde{u}^2] \right] + \\
& + 2\tilde{s}\tilde{u} \left[P^2 \left[15t^3 + 15t^2\tilde{u} + 3t\tilde{u}^2 + \tilde{u}^3 \right] + 4(p, P)^2 [\tilde{u}^2 - 3t^2] \right] + \\
& + 2\tilde{s}\tilde{u} \left[4(p, P)(p', P) [t + \tilde{u}] [9t + \tilde{u}] - 4(p', P)^2 t [3t + \tilde{u}] \right] + \\
& \left. + \tilde{u}^2 [t + \tilde{u}]^2 [4(p, P)^2 - P^2 t] \right\}, \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3^{(0)} = & \tilde{s}\tilde{u} \left\{ 3\tilde{s}^4 P^2 + 6\tilde{s}^3 P^2 [2t + 7\tilde{u}] + \right. \\
& + 3\tilde{s}^2 \left[P^2 [23t^2 + 32t\tilde{u} + 18\tilde{u}^2] - 4(p, P)^2 t + 40(p, P)(p', P)t - 4(p', P)^2 t \right] - \\
& - 2\tilde{s} \left[-P^2 [69t^3 + 82t^2\tilde{u} + 48t\tilde{u}^2 + 21\tilde{u}^3] + 24(p, P)^2 t [2t + \tilde{u}] \right] - \\
& - 2\tilde{s} \left[-12(p, P)(p', P)t [9t + 8\tilde{u}] + 12(p', P)^2 t [5t + 2\tilde{u}] \right] + \\
& + 3 \left[P^2 [t + \tilde{u}] [26t^3 + 20t^2\tilde{u} + 3t\tilde{u}^2 + \tilde{u}^3] - 4(p, P)^2 t [t + \tilde{u}] [9t + \tilde{u}] \right] + \\
& \left. + 3 \left[+8(p, P)(p', P)t [t + \tilde{u}] [4t + 5\tilde{u}] - 4(p', P)^2 t [9t^2 + 8t\tilde{u} + \tilde{u}^2] \right] \right\}, \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^{(0)} = & 4\tilde{s}\tilde{u} \left\{ -3\tilde{s}^4 P^2 \tilde{u} - 3\tilde{s}^3 \left[P^2 [t^2 + 3t\tilde{u} + \tilde{u}^2] + 2(p, P)(p', P)t \right] + \right. \\
& + \tilde{s}^2 \left[-P^2 [3t + \tilde{u}] [4t^2 + 3t\tilde{u} + 3\tilde{u}^2] + 6(p, P)^2 t [t + \tilde{u}] \right] + \\
& + \tilde{s}^2 \left[-6(p, P)(p', P)t [2t + \tilde{u}] + 6(p', P)^2 t [2t + \tilde{u}] \right] + \\
& + \tilde{s} \left[3t^3 \left[-5P^2 t + 6(p, P)^2 - 2(p, P)(p', P) + 8(p', P)^2 \right] \right] + \\
& + \tilde{s} \left[-4t^2 \tilde{u} \left[5P^2 t - 3(p, P)^2 + (p, P)(p', P) - 3(p', P)^2 \right] \right] + \\
& + \tilde{s} \left[t\tilde{u}^2 \left[6 \left[(p, P)^2 - (p, P)(p', P) + (p', P)^2 \right] - 13P^2 t \right] - 9P^2 t\tilde{u}^3 - 3P^2 \tilde{u}^4 \right] - \\
& - 3t [t + \tilde{u}] [t [2t + \tilde{u}] [P^2 [t + \tilde{u}] - 2(p', P)^2]] - \\
& \left. - 3t [t + \tilde{u}] \left[-4(p, P)^2 t [t + \tilde{u}] + 2(p, P)(p', P)\tilde{u} [t + \tilde{u}] \right] \right\}, \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1^{(0)} = & 2\tilde{s}^2 t^2 \tilde{u}^2 \left\{ -7\tilde{s}^2 P^2 + 4\tilde{s} \left[-5P^2 t + 6(p, P)^2 - 6(p, P)(p', P) + 8(p', P)^2 \right] - \right. \\
& - 14\tilde{s} P^2 \tilde{u} + 4\tilde{u} \left[-5P^2 t + 8(p, P)^2 - 6(p, P)(p', P) + 6(p', P)^2 \right] + \\
& \left. + 4t \left[-3P^2 t + 7(p, P)^2 - 2(p, P)(p', P) + 7(p', P)^2 \right] - 7P^2 \tilde{u}^2 \right\}, \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_0^{(0)} = & 2\tilde{s}^2 t^2 \tilde{u}^2 \{ -\tilde{s}^3 P^2 - \tilde{s}^2 [P^2 [t + 3\tilde{u}] + 4(p', P) [(p', P) - 2(p, P)]] - \\
& - 2\tilde{s}\tilde{u} [P^2 t + 4 [(p, P)^2 - 3(p, P)(p', P) + (p', P)^2]] - \\
& - 3\tilde{s}P^2 \tilde{u}^2 - 4\tilde{s}t [(p, P) - (p', P)]^2 - \\
& - \tilde{u}^2 [P^2 [t + \tilde{u}] + 4(p, P) [(p, P) - 2(p', P)]] - \\
& - 4t\tilde{u} [(p, P) - (p', P)]^2 \}, \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_5^{(2)} = & 4 \{ \tilde{s}^2 [4(p', P)^2 - P^2 t] + \\
& + 2\tilde{s}\tilde{u} [5P^2 t + 4(p, P)(p', P)] + \tilde{u}^2 [4(p, P)^2 - P^2 t] \}, \tag{A.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4^{(2)} = & \tilde{s}^3 \{ 8P^2 t - 34P^2 \tilde{u} - 32(p', P)^2 \} - \\
& - 4\tilde{s}^2 \{ P^2 [-2t^2 + 42t\tilde{u} - 7\tilde{u}^2] + 16(p, P)(p', P)\tilde{u} + 8(p', P)^2 [t + \tilde{u}] \} + \\
& + 2\tilde{s}\tilde{u} \{ 4t [-22P^2 t + 17(p, P)^2 + 6(p, P)(p', P) + 17(p', P)^2] \} + \\
& + 2\tilde{s}\tilde{u} \{ -4\tilde{u} [21P^2 t + 4(p, P) [(p, P) + 2(p', P)]] - 17P^2 \tilde{u}^2 \} - \\
& - 8\tilde{u}^2 \{ t + \tilde{u} \} \{ 4(p, P)^2 - P^2 t \}, \tag{A.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3^{(2)} = & -4 \{ \tilde{s}^4 [P^2 [t - 11\tilde{u}] - 4(p', P)^2] - \\
& - \tilde{s}^3 [P^2 [-2t^2 + 53t\tilde{u} + 9\tilde{u}^2] + 8(p, P)(p', P)\tilde{u} + 8(p', P)^2 [t - 2\tilde{u}]] + \\
& + \tilde{s}^2 [P^2 [t + \tilde{u}] [t^2 - 99t\tilde{u} - 9\tilde{u}^2] + 4(p, P)^2 \tilde{u} [11t - \tilde{u}]] + \\
& + \tilde{s}^2 [8(p, P)(p', P)\tilde{u} [7t + 4\tilde{u}] - 4(p', P)^2 [t^2 - 25t\tilde{u} + \tilde{u}^2]] + \\
& + \tilde{s}\tilde{u} [-P^2 [58t^3 + 98t^2\tilde{u} + 53t\tilde{u}^2 + 11\tilde{u}^3] + 4(p, P)^2 [17t^2 + 25t\tilde{u} + 4\tilde{u}^2]] + \\
& + \tilde{s}\tilde{u} [8(p, P)(p', P) [6t^2 + 7t\tilde{u} - \tilde{u}^2] + 4(p', P)^2 t [17t + 11\tilde{u}]] - \\
& - \tilde{u}^2 [t + \tilde{u}]^2 [4(p, P)^2 - P^2 t] \}, \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^{(2)} = & 2\tilde{s}\tilde{u} \left\{ -5\tilde{s}^4 P^2 + 4\tilde{s}^3 \left[-7P^2 t - 2P^2 \tilde{u} + 12(p', P)^2 \right] + \right. \\
& + \tilde{s}^2 \left[t \left[-85P^2 t + 20(p, P)^2 + 72(p, P)(p', P) + 196(p', P)^2 \right] - 84P^2 t \tilde{u} \right] + \\
& + \tilde{s}^2 \left[-6P^2 \tilde{u}^2 + 48(p', P) \tilde{u} \left[2(p, P) + (p', P) \right] \right] + \\
& + 2\tilde{s} \left[8t^2 \left[-7P^2 t + 6(p, P)^2 + 8(p, P)(p', P) + 14(p', P)^2 \right] \right] + \\
& + 2\tilde{s} \left[t\tilde{u} \left[-85P^2 t + 52(p, P)^2 + 184(p, P)(p', P) + 52(p', P)^2 \right] \right] + \\
& + 2\tilde{s} \left[6\tilde{u}^2 \left[4(p, P) \left[(p, P) + 2(p', P) \right] - 7P^2 t \right] - 4P^2 \tilde{u}^3 \right] + \\
& + 4t^3 \left[-12P^2 t + 17(p, P)^2 + 14(p, P)(p', P) + 17(p', P)^2 \right] + \\
& + 16t^2 \tilde{u} \left[-7P^2 t + 14(p, P)^2 + 8(p, P)(p', P) + 6(p', P)^2 \right] + \\
& + t\tilde{u}^2 \left[-85P^2 t + 196(p, P)^2 + 72(p, P)(p', P) + 20(p', P)^2 \right] + \\
& \left. + 4\tilde{u}^3 \left[12(p, P)^2 - 7P^2 t \right] - 5P^2 \tilde{u}^4 \right\}, \tag{A.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1^{(2)} = & 4\tilde{s}t\tilde{u} \left\{ -\tilde{s}^4 P^2 + \tilde{s}^3 \left[-3P^2 t - 4P^2 \tilde{u} + 8(p, P)(p', P) \right] + \right. \\
& + \tilde{s}^2 \left[\tilde{u} \left[8 \left[(p, P)^2 + (p, P)(p', P) + (p', P)^2 \right] - 9P^2 t \right] \right] + \\
& + \tilde{s}^2 \left[-2t \left[P^2 t + 2 \left[(p, P)^2 - 4(p, P)(p', P) + (p', P)^2 \right] \right] - 6P^2 \tilde{u}^2 \right] - \\
& - \tilde{u} \left[t + \tilde{u} \right] \left[2P^2 t \tilde{u} + P^2 \tilde{u}^2 + 4t \left[(p, P) - (p', P) \right]^2 - 8(p, P)(p', P) \tilde{u} \right] + \\
& + \tilde{s} \left[\tilde{u}^2 \left[8 \left[(p, P)^2 + (p, P)(p', P) + (p', P)^2 \right] - 9P^2 t \right] \right] + \\
& + \tilde{s} \left[-4t\tilde{u} \left[P^2 t + 6(p, P)^2 - 16(p, P)(p', P) + 6(p', P)^2 \right] \right] + \\
& \left. + \tilde{s} \left[-4P^2 \tilde{u}^3 - 4t^2 \left[(p, P) - (p', P) \right]^2 \right] \right\}, \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4^{(4)} = & -32 \left\{ \tilde{s}^2 \left[P^2 t - 4(p', P)^2 \right] + \right. \\
& \left. + 2\tilde{s}\tilde{u} \left[P^2 t - 4(p, P)(p', P) \right] + \tilde{u}^2 \left[P^2 t - 4(p, P)^2 \right] \right\}, \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3^{(4)} = & 64 \left[\tilde{s} + t + \tilde{u} \right] \left\{ \tilde{s}^2 \left[P^2 t - 4(p', P)^2 \right] + \right. \\
& \left. + 2\tilde{s}\tilde{u} \left[P^2 t - 4(p, P)(p', P) \right] + \tilde{u}^2 \left[P^2 t - 4(p, P)^2 \right] \right\}, \tag{A.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^{(4)} = & -32 \left[\tilde{s} + t + \tilde{u} \right]^2 \left\{ \tilde{s}^2 \left[P^2 t - 4(p', P)^2 \right] + \right. \\
& \left. + 2\tilde{s}\tilde{u} \left[P^2 t - 4(p, P)(p', P) \right] + \tilde{u}^2 \left[P^2 t - 4(p, P)^2 \right] \right\}. \tag{A.23}
\end{aligned}$$

Для процесса излучения массивного тензорного медиатора в комптон-подобном процессе, усредненный по начальным и просуммированный по конечным состо-

яниям квадрат матричного элемента принимает вид:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{l-\gamma \rightarrow Gl^-}}|^2 &= \\ &= (c_{ll}^G)^2 e^2 \frac{u_2 [s_2 - 2m_l^2] [(t_2 + u_2)^2 + (u_2 - m_G^2)^2] [4u_2(2m_l^2 - s_2) - m_G^2 t_2]}{4t_2(u_2 - m_l^2)^2 (s_2 - m_l^2)^2} - \\ &\quad - (g_{ll}^G)^2 e^2 \frac{m_l^2 R(m_l, m_G, t_2, u_2)}{12t_2^2 (m_l^2 - u_2)^2 (s_2 - m_l^2)^2}, \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

где s_2 , u_2 и t_2 определены в выражении (2.6), $R(m_l, m_G, t, u)$ представляет собой регулярное выражение по m_l и m_G :

$$\begin{aligned} R(m_l, m_G, t, u) &= 24m_l^{10}t + 24m_l^8[m_G^4 + 5m_G^2t - 6tu] + \\ &+ 2m_l^6[24m_G^6 + 6m_G^4(15t - 8u) - 3m_G^2t(33t + 92u) + 2t(13t^2 + 18tu + 90u^2)] + \\ &\quad + 2m_l^4[12m_G^8 + 12m_G^6(5t - 6u) + m_G^4(72u^2 - 113t^2 - 288tu) + \\ &\quad + 4m_Gt(t + 3u)(13t + 42u) - t(7t^3 + 64t^2u + 144tu^2 + 240u^3)] + \\ &+ m_l^2[12m_G^8(3t - 4u) - 3m_G^6(29t^2 + 80tu - 48u^2) + m_G^4(70t^3 + 544t^2u + 696tu^2 - 96u^3) - \\ &- m_G^2t(27t^3 + 364t^2u + 852tu^2 + 912u^3) + 2t(t^4 + 46t^3u + 92t^2u^2 + 216tu^3 + 180u^4)] + \\ &\quad + [-3m_G^8(3t^2 + 16tu - 8u^2) + m_G^6(15t^3 + 128t^2u + 168tu^2 - 48u^3) - \\ &\quad - m_G^4(9t^4 + 122t^3u + 362t^2u^2 + 384tu^3 - 24u^4) + \\ &\quad + m_G^2t(3t^4 + 68t^3u + 240t^2u^2 + 552tu^3 + 408u^4) - \\ &\quad - 2tu(t + u)(7t^3 + 24t^2u + 72tu^2 + 72u^3)], \end{aligned}$$

Пренебрегая массой лептона в полученном выражении (A.24) и проводя корс-синг-симметрию в виде $p_{e^+} \rightarrow -p'_{e^-}$ и $p'_\gamma \rightarrow -p_\gamma$, получим:

$$s_2 \rightarrow \hat{t}_2 = (p_{e^-} - p'_G)^2, \quad t_2 \rightarrow \hat{u}_2 = (p_{e^-} - p'_\gamma)^2, \quad u_2 \rightarrow \hat{s}_2 = (p_{e^-} + p_{e^+})^2,$$

где для переменные Мандельштама s_2 , u_2 и t_2 , которые определены в выражении (2.6). В итоге квадрат матричного элемента для аннигиляции электрон-позитронной пары в фотон и массивный тензорный медиатор принимает вид [37]:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \gamma G}|^2 &= (c_{ee}^G)^2 e^2 \frac{(\hat{s}_2^2 + 2\hat{t}_2(\hat{s}_2 + \hat{t}_2) - 2m_G^2\hat{t}_2 + m_G^4)}{4\hat{t}_2\hat{s}_2(\hat{s}_2 + \hat{t}_2 - m_G^2)} \cdot \\ &\quad \cdot (4\hat{t}_2(\hat{s}_2 + \hat{t}_2) - m_G^2(\hat{s}_2 + 4\hat{t}_2)). \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

A.1.2 Ширины распада

Далее, приведем ширины распада скалярного и тензорного медиаторов темной материи для невидимой моды. Ширины распада для скалярного медиатора, взаимодействующего преимущественно электроном, с в случае векторной [149], дираковской [29; 145], майорановской [146], скалярной [146] темной материи и для электрон-позитронной пары принимают следующий вид, соответственно:

$$\Gamma_{\phi \rightarrow VV} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\alpha_V m_\phi^3}{32\pi} \left(1 - \frac{4m_V^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (\text{A.26})$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \psi\bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi m_\phi}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (\text{A.27})$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \chi\chi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\alpha_\chi m_\phi}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (\text{A.28})$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow SS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\alpha_S}{16\pi m_\phi} \left(1 - \frac{4m_S^2}{m_\phi^2}\right)^{1/2}, \quad (\text{A.29})$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow e^+e^-} \simeq \frac{(c_{ee}^\phi)^2 m_\phi}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_e^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}, \quad (\text{A.30})$$

Аналогично, в случае тензорного медиатора, взаимодействующего преимущественно с электроном, ширины распада для дираковской, скалярной, векторной темной материей и электрон-позитронной пары принимают следующие выражения, соответственно [36]:

$$\Gamma_{G \rightarrow \psi\bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi m_G^3}{160\pi} \left(1 + \frac{8m_\psi^2}{3m_G^2}\right) \left(1 - 4\frac{m_\psi^2}{m_G^2}\right)^{3/2}, \quad (\text{A.31})$$

$$\Gamma_{G \rightarrow SS} = \frac{4\pi\alpha_S m_G^3}{960\pi} \left(1 - 4\frac{m_S^2}{m_G^2}\right)^{5/2}, \quad (\text{A.32})$$

$$\Gamma_{G \rightarrow VV} = \frac{4\pi\alpha_V m_G^3}{960\pi} \left(1 - 4\frac{m_V^2}{m_G^2}\right)^{1/2} \left(13 + 56\frac{m_V^2}{m_G^2} + 48\frac{m_V^4}{m_G^4}\right), \quad (\text{A.33})$$

$$\Gamma_{G \rightarrow e^+e^-} \simeq \frac{(c_{ee}^G/\Lambda)^2 m_G^3}{160\pi}, \quad (\text{A.34})$$

A.1.3 Сечения рождения медиатора при рассеянии электрона в поле ядра

При падении заряженного лептона на мишень дифференциальные сечения в приближении Вайцзеккера-Вильямса по доле энергии и углу вылета медиатора принимают вид в случае скалярного медиатора:

$$\frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx d\cos(\theta_\phi)} \Big|_{WW} = \frac{\alpha\chi E_e^2 x\beta_\phi 4\pi\alpha(c_{ee}^\phi)^2}{\pi 1-x 8\pi s_2^2} \times \left(\frac{x^2}{1-x} + 2m_\phi^2 \frac{u_2x + m_\phi^2(1-x)}{u_2^2} \right), \quad (\text{A.35})$$

и тензорного медиатора:

$$\frac{d\sigma(p + P_i \rightarrow p' + P_f + k)}{dx d\cos(\theta_G)} \Big|_{WW} = -\frac{\alpha\chi E_e^2 x\beta_G}{\pi 1-x} \frac{1}{8\pi s_2^2} \times 4\pi\alpha \frac{(c_{ee}^G)^2 [(t_2+u_2)^2 + (u_2-m_G^2)^2][4u_2s_2+m_G^2t_2]}{\Lambda^2 4t_2u_2s_2}. \quad (\text{A.36})$$

A.1.4 Сечения аннигиляции через медиатор

Аннигиляция в лептонную пару через тензорный медиатор для дираковской, скалярной и векторной темной материи имеют вид, соответственно:

$$\sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow G \rightarrow l^-l^+} = \frac{4\pi\alpha_\psi (c_{ll}^G)^2 s^3 \beta_\psi(s) \beta_l^3(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_\psi^2}{s}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{1280\pi D_\psi^G(s)}, \quad (\text{A.37})$$

$$\sigma_{SS \rightarrow G \rightarrow l^-l^+} = \frac{4\pi\alpha_S (c_{ll}^G)^2 s^3 \beta_S^3(s) \beta_l^3(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{960\pi D_S^G(s)}, \quad (\text{A.38})$$

$$\sigma_{VV \rightarrow G \rightarrow l^-l^+} = \frac{4\pi\alpha_V (c_{ll}^G)^2 s^3 \beta_V^{-1}(s) \beta_l^3(s) \left(13 + 56 \frac{m_V^2}{s} + 48 \frac{m_V^4}{s^2}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{8640\pi D_V^G(s)}, \quad (\text{A.39})$$

где использованы обозначения:

$$\beta_f(s) = \sqrt{1 - 4m_f^2/s}, \quad D_{DM}^{\text{MED}}(s) = (s - m_{\text{MED}}^2)^2 + m_{\text{MED}}^2 \Gamma_{\text{MED} \rightarrow \text{DM DM}}^2. \quad (\text{A.40})$$

Аннигиляция лептонной пары в дираковскую, скалярную и векторную темную материю через тензорный медиатор имеет вид, соответственно:

$$\sigma_{l-l^+\rightarrow G\rightarrow\psi\bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi(c_{ll}^G)^2 s^3 \beta_\psi^3(s) \beta_l(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_\psi^2}{s}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{1280\pi D_\psi^G(s)}, \quad (\text{A.41})$$

$$\sigma_{l-l^+\rightarrow G\rightarrow SS} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_S(c_{ll}^G)^2 s^3 \beta_S^5(s) \beta_l(s) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{3840\pi D_S^G(s)}, \quad (\text{A.42})$$

$$\sigma_{l-l^+\rightarrow G\rightarrow VV} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_V(c_{ll}^G)^2 s^3 \beta_V(s) \beta_l(s) \left(13 + 56 \frac{m_V^2}{s} + 48 \frac{m_V^4}{s^2}\right) \left(1 + \frac{8}{3} \frac{m_l^2}{s}\right)}{3840\pi D_V^G(s)}, \quad (\text{A.43})$$

Далее, аннигиляция в лептонную пару через скалярный медиатор для дираковской, скалярной и векторной темной материи имеют вид, соответственно:

$$\sigma_{\psi\bar{\psi}\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_\psi(c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\psi(s) \beta_e^3(s)}{16\pi D_\psi^\phi(s)}, \quad (\text{A.44})$$

$$\sigma_{\chi\chi\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_\chi(c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\chi(s) \beta_e^3(s)}{16\pi D_\chi^\phi(s)}, \quad (\text{A.45})$$

$$\sigma_{SS\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_S(c_{ee}^\phi)^2 \beta_S^{-1}(s) \beta_e^3(s)}{8\pi D_S^\phi(s)}, \quad (\text{A.46})$$

$$\sigma_{VV\rightarrow\phi\rightarrow e^+e^-} = \frac{4\pi\alpha_V(c_{ee}^\phi)^2 s^2 \beta_V(s) \beta_e^3(s)}{144\pi D_V^\phi(s)}, \quad (\text{A.47})$$

Аннигиляция лептонной пары в дираковскую, скалярную и векторную темную материю через скалярный медиатор имеет вид, соответственно:

$$\sigma_{e^+e^-\rightarrow\phi\rightarrow SS} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_S(c_{ee}^\phi)^2 \beta_S(s) \beta_e(s)}{32\pi D_S^\phi(s)}, \quad (\text{A.48})$$

$$\sigma_{e^+e^-\rightarrow\phi\rightarrow\psi\bar{\psi}} = \frac{4\pi\alpha_\psi(c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\psi^3(s) \beta_e(s)}{16\pi D_\psi^\phi(s)}, \quad (\text{A.49})$$

$$\sigma_{e^+e^-\rightarrow\phi\rightarrow\chi\chi} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_\chi(c_{ee}^\phi)^2 s \beta_\chi^3(s) \beta_e(s)}{16\pi D_\chi^\phi(s)}, \quad (\text{A.50})$$

$$\sigma_{e^+e^-\rightarrow\phi\rightarrow VV} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\alpha_V(c_{ee}^\phi)^2 s^2 \beta_V^3(s) \beta_e(s)}{64\pi D_V^\phi(s)}, \quad (\text{A.51})$$

А.1.5 Интегралы в методе Вайцзеккера-Вильямса

В данном разделе приведены интегралы, которые позволяют аналитически проинтегрировать по углу дифференциальное сечение в приближении Вайцзеккера-Вильямса. Интеграл $I_2(x, U, l)$ вида:

$$I_2(x, U, l) = \int U^l \ln \left[\frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \in \mathbb{Z},$$

разбивается на несколько вспомогательных интегралов в зависимости от значения степени l . В случае $n = -1$ и $n = -2$, соответственно:

$$\int \frac{1}{x} \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \ln(x^2) - \frac{1}{2} [\text{Li}_2(-x^2/b) - \text{Li}_2(-x^2/a)]$$

$$\int \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = -\frac{1}{x} \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) + 2 \left(\frac{\arctan(x/\sqrt{b})}{\sqrt{b}} - \frac{\arctan(x/\sqrt{a})}{\sqrt{a}} \right)$$

При $0 \leq n$ выполняется:

$$\int x^n \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) - \frac{2}{n+1} \sum_{m=0}^{\frac{n-(n \bmod 2)}{2}} (-1)^m \frac{x^{n+1-2m}}{n+1-2m} (b^m - a^m) + (-1)^{\frac{n-(n \bmod 2)}{2}} \frac{2}{n+1} R_{21}(x, n, a, b),$$

где $(n \bmod k)$ - остаток от деления n на k и вспомогательное выражение $R_{21}(x, n, a, b)$ принимает вид:

$$R_{21}(x, n, a, b) = \begin{cases} (1/2)b^{\frac{n+1}{2}} \ln(x^2 + b) - (1/2)a^{\frac{n+1}{2}} \ln(x^2 + a), & n \bmod 2 = 1, \\ b^{\frac{n+1}{2}} \arctg(x/\sqrt{b}) - a^{\frac{n+1}{2}} \arctg(x/\sqrt{a}), & n \bmod 2 = 0. \end{cases}$$

Для значений $n < -2$ справедливо:

$$\int x^n \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) + R_{22}(x, -n, a, b)$$

где вспомогательное выражение $R_{22}(x, n, a, b)$ для нечетных значений n :

$$R_{22}(x, n, a, b) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{n-1}{2}} \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2} \right) - \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{n-1}{2}} \ln \left(\frac{x^2 + a}{x^2} \right) \right\} + \frac{2}{n-1} \sum_{k=0}^{\frac{n-5}{2}} \frac{(-1)^k}{3+2k-n} \left(\left(\frac{1}{b} \right)^{k+1} - \left(\frac{1}{a} \right)^{k+1} \right) \frac{1}{x^{n-3-2k}}$$

и для четных значений n :

$$R_{22}(x, n, a, b) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2}{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{n-1}{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right) - \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \right\} +$$

$$+ \frac{2}{n-1} \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} \frac{(-1)^k}{3+2k-n} \left(\left(\frac{1}{b}\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} \right) \frac{1}{x^{n-3-2k}}$$

полученный выше интеграл $I_2(x, U, l)$ позволяет проинтегрировать по углу дифференциальное сечение для скалярного, псевдоскалярного, векторного и псевдовекторного медиаторов. Далее, в случае $l \geq 0$ интеграл $I_3(x, U, l)$ принимает вид:

$$I_3(x, U, l) = \int \frac{U^l}{U + A(x)} dU = \sum_{m=0}^{l-1} C_l^m \frac{(-A)^m (U + A)^{l-m}}{l-m} + (-A)^l \ln(U + A),$$

где C_l^m - биномиальные коэффициенты. Интеграл вида:

$$I_4(x, U, l) = \int \frac{U^l}{U + A(x)} \ln \left[\frac{U^2 + b(x)}{U^2 + a(x)} \right] dU, \quad l \geq 0,$$

выражается в следующем виде:

$$\int \frac{x^n}{x + A} \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) dx = \ln \left(\frac{x^2 + b}{x^2 + a} \right) I_3(x, U, n) -$$

$$- 2 \sum_{m=0}^{l-1} C_n^m \frac{(-A)^m}{n-m} \sum_{j=0}^{n-m} C_{n-m}^j (A)^j R_{41}(x, n-m-j+1, a, b) -$$

$$- (-A)^n \ln(A+x) \ln \left(\frac{x^2 + b}{A^2 + b} \right) +$$

$$+ (-A)^n \ln(A+x) \ln \left(\frac{x^2 + a}{A^2 + a} \right) -$$

$$- (-A)^n \left\{ 2\text{Re} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{x+A}{A-i\sqrt{b}} \right) \right] - 2\text{Re} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{x+A}{A-i\sqrt{a}} \right) \right] \right\},$$

где использованы обозначения:

$$R_{41}(x, n, a, b) = \int \frac{x^n dx}{x^2 + b} = \sum_{j=0}^{\frac{n-(n \bmod 2)-1}{2}} \frac{(-1)^j (b^j - a^j) x^{n-1-2j}}{n-1-2j} -$$

$$- (-1)^{\frac{n-(n \bmod 2)}{2}} R_4(x, a, b, k),$$

$$R_{42}(x, n, a, b) = \begin{cases} (1/2)b^{\frac{n-1}{2}} \ln(x^2 + b) - (1/2)a^{\frac{n-1}{2}} \ln(x^2 + a), & n \bmod 2 = 1, \\ b^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{b}) - a^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{a}), & n \bmod 2 = 0. \end{cases}$$

Список литературы

1. *Pais A., Treiman S. B.* How Many Charm Quantum Numbers Are There? // *Phys. Rev. Lett.* — 1975. — Т. 35. — С. 1556. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.1556.
2. *Herrero M.* The Standard model // *NATO Sci. Ser. C* / под ред. Т. Ferbel. — 1999. — Т. 534. — С. 1—59. — DOI: 10.1007/978-94-011-4689-0_1. — arXiv: hep-ph/9812242.
3. *Hubble E.* A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 1929. — Т. 15. — С. 168—173. — DOI: 10.1073/pnas.15.3.168.
4. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / N. Aghanim [и др.] // *Astron. Astrophys.* — 2020. — Т. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO]. — [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
5. *Zwicky F.* Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln // *Helv. Phys. Acta.* — 1933. — Т. 6. — С. 110—127. — DOI: 10.1007/s10714-008-0707-4.
6. *Rubin V. C., Thonnard N., Ford Jr. W. K.* Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/ // *Astrophys. J.* — 1980. — Т. 238. — С. 471. — DOI: 10.1086/158003.
7. *Markevitch M.* Chandra observation of the most interesting cluster in the universe // *ESA Spec. Publ.* — 2006. — Т. 604. — С. 723. — arXiv: astro-ph/0511345.
8. A direct empirical proof of the existence of dark matter / D. Clowe [и др.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2006. — Т. 648. — С. L109—L113. — DOI: 10.1086/508162. — arXiv: astro-ph/0608407.
9. *White S. D. M., Frenk C. S., Davis M.* Clustering in a Neutrino Dominated Universe // *Astrophys. J. Lett.* / под ред. М. А. Srednicki. — 1983. — Т. 274. — С. L1—L5. — DOI: 10.1086/161425.

10. Formation of Galaxies and Large Scale Structure with Cold Dark Matter / G. R. Blumenthal [и др.] // Nature / под ред. М. А. Srednicki. — 1984. — Т. 311. — С. 517–525. — DOI: 10.1038/311517a0.
11. *Hu W., Dodelson S.* Cosmic Microwave Background Anisotropies // Ann. Rev. Astron. Astrophys. — 2002. — Т. 40. — С. 171–216. — DOI: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093926. — arXiv: astro-ph/0110414.
12. Systematic Uncertainties In Constraining Dark Matter Annihilation From The Cosmic Microwave Background / S. Galli [и др.] // Phys. Rev. D. — 2013. — Т. 88. — С. 063502. — DOI: 10.1103/PhysRevD.88.063502. — arXiv: 1306.0563 [astro-ph.CO].
13. Is the observable Universe consistent with the cosmological principle? / P. K. Aluri [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2023. — Т. 40, № 9. — С. 094001. — DOI: 10.1088/1361-6382/acbefc. — arXiv: 2207.05765 [astro-ph.CO].
14. *Perivolaropoulos L., Skara F.* Challenges for Λ CDM: An update // New Astron. Rev. — 2022. — Т. 95. — С. 101659. — DOI: 10.1016/j.newar.2022.101659. — arXiv: 2105.05208 [astro-ph.CO].
15. *Peebles P. J. E., Ratra B.* The Cosmological Constant and Dark Energy // Rev. Mod. Phys. / под ред. J.-P. Hsu, D. Fine. — 2003. — Т. 75. — С. 559–606. — DOI: 10.1103/RevModPhys.75.559. — arXiv: astro-ph/0207347.
16. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1980. — Т. 91. — С. 99–102. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.
17. *Guth A. H.* The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // Phys. Rev. D / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1981. — Т. 23. — С. 347–356. — DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
18. *Linde A. D.* A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // Phys. Lett. B / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1982. — Т. 108. — С. 389–393. — DOI: 10.1016/0370-2693(82)91219-9.

19. *Baumann D.* Inflation // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Physics of the Large and the Small. — 2011. — С. 523—686. — DOI: 10.1142/9789814327183_0010. — arXiv: 0907.5424 [hep-th].
20. *Riotto A.* Inflation and the theory of cosmological perturbations // ICTP Lect. Notes Ser. / под ред. G. Dvali [и др.]. — 2003. — Т. 14. — С. 317—413. — arXiv: hep-ph/0210162.
21. Dark Matter, Millicharges, Axion and Scalar Particles, Gauge Bosons, and Other New Physics with LDMX / A. Berlin [и др.] // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 99, № 7. — С. 075001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.99.075001. — arXiv: 1807.01730 [hep-ph].
22. Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure / D. S. Akerib [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 118, № 2. — С. 021303. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.021303. — arXiv: 1608.07648 [astro-ph.CO].
23. Dark Matter Results From 54-Ton-Day Exposure of PandaX-II Experiment / X. Cui [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 18. — С. 181302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.181302. — arXiv: 1708.06917 [astro-ph.CO].
24. First Dark Matter Search Results from the XENON1T Experiment / E. Aprile [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 18. — С. 181301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.181301. — arXiv: 1705.06655 [astro-ph.CO].
25. *Cirelli M., Strumia A., Zupan J.* Dark Matter. — 2024. — Июнь. — arXiv: 2406.01705 [hep-ph].
26. Feebly-interacting particles: FIPs 2020 workshop report / P. Agrawal [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2021. — Т. 81, № 11. — С. 1015. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09703-7. — arXiv: 2102.12143 [hep-ph].
27. *Lee B. W., Weinberg S.* Cosmological Lower Bound on Heavy Neutrino Masses // Phys. Rev. Lett. / под ред. M. A. Srednicki. — 1977. — Т. 39. — С. 165—168. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.39.165.
28. *Kolb E. W., Olive K. A.* The Lee-Weinberg Bound Revisited // Phys. Rev. D. — 1986. — Т. 33. — С. 1202. — DOI: 10.1103/PhysRevD.33.1202. — [Erratum: Phys.Rev.D 34, 2531 (1986)].

29. *Krnjaic G.* Probing Light Thermal Dark-Matter With a Higgs Portal Mediator // Phys. Rev. D. — 2016. — T. 94, № 7. — C. 073009. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.073009. — arXiv: 1512.04119 [hep-ph].
30. *McDonald J.* Gauge singlet scalars as cold dark matter // Phys. Rev. D. — 1994. — T. 50. — C. 3637–3649. — DOI: 10.1103/PhysRevD.50.3637. — arXiv: hep-ph/0702143.
31. *Burgess C. P., Pospelov M., Veldhuis T. ter.* The Minimal model of nonbaryonic dark matter: A Singlet scalar // Nucl. Phys. B. — 2001. — T. 619. — C. 709–728. — DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00513-2. — arXiv: hep-ph/0011335.
32. *Holdom B.* Two U(1)'s and Epsilon Charge Shifts // Phys. Lett. B. — 1986. — T. 166. — C. 196–198. — DOI: 10.1016/0370-2693(86)91377-8.
33. *Okun L. B.* LIMITS OF ELECTRODYNAMICS: PARAPHOTONS? // Sov. Phys. JETP. — 1982. — T. 56. — C. 502.
34. *Nomura Y., Thaler J.* Dark Matter through the Axion Portal // Phys. Rev. D. — 2009. — T. 79. — C. 075008. — DOI: 10.1103/PhysRevD.79.075008. — arXiv: 0810.5397 [hep-ph].
35. ALPtraum: ALP production in proton beam dump experiments / B. Döbrich [и др.] // JHEP. — 2016. — T. 02. — C. 018. — DOI: 10.1007/JHEP02(2016)018. — arXiv: 1512.03069 [hep-ph].
36. *Lee H. M., Park M., Sanz V.* Gravity-mediated (or Composite) Dark Matter // Eur. Phys. J. C. — 2014. — T. 74. — C. 2715. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-2715-8. — arXiv: 1306.4107 [hep-ph].
37. *Kang Y.-J., Lee H. M.* Lightning gravity-mediated dark matter // The European Physical Journal C. — 2020. — Июль. — T. 80, № 7. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-8153-x. — arXiv: 2001.04868.
38. Lepton flavor portal matter / G. N. Wojcik [и др.] // Phys. Rev. D. — 2023. — T. 108, № 5. — C. 055033. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.055033. — arXiv: 2303.12983 [hep-ph].

39. *Jueid A., Nasri S.* Lepton portal dark matter at muon colliders: Total rates and generic features for phenomenologically viable scenarios // *Phys. Rev. D.* — 2023. — Т. 107, № 11. — С. 115027. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.115027. — arXiv: 2301.12524 [hep-ph].
40. *Davidson S., Hannestad S., Raffelt G.* Updated bounds on millicharged particles // *JHEP.* — 2000. — Т. 05. — С. 003. — DOI: 10.1088/1126-6708/2000/05/003. — arXiv: hep-ph/0001179.
41. *Dubovsky S. L., Gorbunov D. S., Rubtsov G. I.* Narrowing the window for millicharged particles by CMB anisotropy // *JETP Lett.* — 2004. — Т. 79. — С. 1—5. — DOI: 10.1134/1.1675909. — arXiv: hep-ph/0311189.
42. *Chang S., Weiner N., Yavin I.* Magnetic Inelastic Dark Matter // *Phys. Rev. D.* — 2010. — Т. 82. — С. 125011. — DOI: 10.1103/PhysRevD.82.125011. — arXiv: 1007.4200 [hep-ph].
43. *Chu X., Pradler J., Semmelrock L.* Light dark states with electromagnetic form factors // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 99, № 1. — С. 015040. — DOI: 10.1103/PhysRevD.99.015040. — arXiv: 1811.04095 [hep-ph].
44. Freeze-In Production of FIMP Dark Matter / L. J. Hall [и др.] // *JHEP.* — 2010. — Т. 03. — С. 080. — DOI: 10.1007/JHEP03(2010)080. — arXiv: 0911.1120 [hep-ph].
45. *Bertone G., Hooper D., Silk J.* Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints // *Phys. Rept.* — 2005. — Т. 405. — С. 279—390. — DOI: 10.1016/j.physrep.2004.08.031. — arXiv: hep-ph/0404175.
46. *Chung D. J. H., Kolb E. W., Riotto A.* Superheavy dark matter // *Phys. Rev. D.* — 1998. — Т. 59. — С. 023501. — DOI: 10.1103/PhysRevD.59.023501. — arXiv: hep-ph/9802238.
47. Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector / M. G. Aartsen [и др.] // *Science.* — 2013. — Т. 342. — С. 1242856. — DOI: 10.1126/science.1242856. — arXiv: 1311.5238 [astro-ph.HE].

48. *Gninenko S. N., Krasnikov N. V., Matveev V. A.* Search for light dark matter in the NA64 experiment // *Usp. Fiz. Nauk.* — 2021. — Т. 191, № 12. — С. 1361—1386. — DOI: 10.3367/UFNe.2021.09.039066.
49. *Kim K. J., Tsai Y.-S.* AN IMPROVED WEIZSACKER-WILLIAMS METHOD AND PHOTOPRODUCTION OF LEPTON PAIRS // *Phys. Lett. B.* — 1972. — Т. 40. — С. 665—670. — DOI: 10.1016/0370-2693(72)90622-3.
50. *Kim K. J., Tsai Y.-S.* Improved Weizsacker-Williams Method and Its Application to Lepton and W-Boson Pair Production // *Phys. Rev. D.* — 1973. — Т. 8. — С. 3109. — DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3109. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.3109>.
51. *Tsai Y.-S.* Pair production and bremsstrahlung of charged leptons // *Rev. Mod. Phys.* — 1974. — Т. 46. — С. 815. — DOI: 10.1103/RevModPhys.46.815.
52. *Tsai Y.-S.* AXION BREMSSTRAHLUNG BY AN ELECTRON BEAM // *Phys. Rev. D* / под ред. S. C. Loken. — 1986. — Т. 34. — С. 1326. — DOI: 10.1103/PhysRevD.34.1326.
53. New fixed-target experiments to search for dark gauge forces / J. D. Bjorken [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2009. — Окт. — Т. 80, вып. 7. — С. 075018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.80.075018. — arXiv: 0906.0580.
54. Probing hidden sectors with a muon beam: Total and differential cross sections for vector boson production in muon bremsstrahlung / D. V. Kirpichnikov [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Т. 104, № 7. — С. 076012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.076012. — arXiv: 2107.13297 [hep-ph].
55. *Берестецкий В., Лифшиц Е., Питаевский Л.* Теоретическая физика. Том 4. Квантовая электродинамика. — Litres, 2022.
56. Dark photon production through positron annihilation in beam-dump experiments / L. Marsicano [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Т. 98, № 1. — С. 015031. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.015031. — arXiv: 1802.03794 [hep-ex].

57. New production channels for light dark matter in hadronic showers / A. Celentano [и др.] // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102, № 7. — С. 075026. — DOI: 10.1103/PhysRevD.102.075026. — arXiv: 2006.09419 [hep-ph].
58. New results from DAMA/LIBRA / R. Bernabei [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2010. — Т. 67. — С. 39–49. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-010-1303-9. — arXiv: 1002.1028 [astro-ph.GA].
59. Nuclear-Recoil Energy Scale in CDMS II Silicon Dark-Matter Detectors / R. Agnese [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2018. — Т. 905. — С. 71–81. — DOI: 10.1016/j.nima.2018.07.028. — arXiv: 1803.02903 [physics.ins-det].
60. Conceptual design and simulation of a water Cherenkov muon veto for the XENON1T experiment / E. Aprile [и др.] // JINST. — 2014. — Т. 9. — P11006. — DOI: 10.1088/1748-0221/9/11/P11006. — arXiv: 1406.2374 [astro-ph.IM].
61. Dark Matter Search Results from the PandaX-4T Commissioning Run / Y. Meng [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Т. 127, № 26. — С. 261802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.261802. — arXiv: 2107.13438 [hep-ex].
62. Improved exclusion limit for light dark matter from e^+e^- annihilation in NA64 / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 104, № 9. — С. L091701. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.L091701. — arXiv: 2108.04195 [hep-ex].
63. First Results in the Search for Dark Sectors at NA64 with the CERN SPS High Energy Muon Beam / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2024. — Т. 132, № 21. — С. 211803. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.132.211803. — arXiv: 2401.01708 [hep-ex].
64. M^3 : a new muon missing momentum experiment to probe $(g-2)_\mu$ and dark matter at Fermilab / Y. Kahn [и др.] // JHEP. — 2018. — Т. 09. — С. 153. — DOI: 10.1007/JHEP09(2018)153. — arXiv: 1804.03144 [hep-ph].
65. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing hidden spin-2 mediator of dark matter with NA64e, LDMX, NA64 μ , and M3 // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 106, № 11. — С. 115041. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.115041. — arXiv: 2210.00751 [hep-ph].

66. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Resonant probing spin-0 and spin-2 dark matter mediators with fixed target experiments // *Phys. Rev. D.* — 2023. — T. 107, № 11. — C. 115034. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.115034. — arXiv: 2304.14052 [hep-ph].
67. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Probing scalar, Dirac, Majorana, and vector dark matter through a spin-0 electron-specific mediator at electron fixed-target experiments // *Phys. Rev. D.* — 2024. — T. 109, № 7. — C. 075012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.075012. — arXiv: 2312.15697 [hep-ph].
68. *Hubble E., Humason M. L.* The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae // *Astrophys. J.* — 1931. — T. 74. — C. 43–80. — DOI: 10.1086/143323.
69. *Smith S.* The Mass of the Virgo Cluster // *Astrophys. J.* — 1936. — T. 83. — C. 23–30. — DOI: 10.1086/143697.
70. *Zwicky F.* On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae // *Astrophys. J.* — 1937. — T. 86. — C. 217–246. — DOI: 10.1086/143864.
71. *Bertone G., Hooper D.* History of dark matter // *Rev. Mod. Phys.* — 2018. — T. 90, № 4. — C. 045002. — DOI: 10.1103/RevModPhys.90.045002. — arXiv: 1605.04909 [astro-ph.CO].
72. *Salucci P., Borriello A.* The intriguing distribution of dark matter in galaxies // *Lect. Notes Phys.* / под ред. J. Trampetic, J. Wess. — 2003. — T. 616. — C. 66–77. — arXiv: astro-ph/0203457.
73. Colliding clusters and dark matter self-interactions / F. Kahlhoefer [и др.] // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2014. — T. 437, № 3. — C. 2865–2881. — DOI: 10.1093/mnras/stt2097. — arXiv: 1308.3419 [astro-ph.CO].
74. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* The Structure of cold dark matter halos // *Astrophys. J.* — 1996. — T. 462. — C. 563–575. — DOI: 10.1086/177173. — arXiv: astro-ph/9508025.
75. *Ostriker J. P., Peebles P. J. E.* A Numerical Study of the Stability of Flattened Galaxies: or, can Cold Galaxies Survive? // *Astrophys. J.* — 1973. — T. 186. — C. 467–480. — DOI: 10.1086/152513.

76. *Ostriker J. P., Peebles P. J. E., Yahil A.* The size and mass of galaxies, and the mass of the universe // *Astrophys. J. Lett.* — 1974. — Т. 193. — С. L1—L4. — DOI: 10.1086/181617.
77. *Shapley H., Ames A.* A Survey of the External Galaxies Brighter than the Thirteenth Magnitude // *Annals of Harvard College Observatory.* — 1932. — ЯНВ. — Т. 88. — С. 41—76.
78. *Springel V., Frenk C. S., White S. D. M.* The large-scale structure of the Universe // *Nature.* — 2006. — Т. 440. — С. 1137. — DOI: 10.1038/nature04805. — arXiv: astro-ph/0604561.
79. *Einstein A.* The foundation of the general theory of relativity. // *Annalen Phys.* / под ред. J.-P. Hsu, D. Fine. — 1916. — Т. 49, № 7. — С. 769—822. — DOI: 10.1002/andp.19163540702.
80. *Dyson F. W., Eddington A. S., Davidson C.* A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919 // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.* — 1920. — Т. 220. — С. 291—333. — DOI: 10.1098/rsta.1920.0009.
81. A weak lensing study of the Coma cluster / R. Gavazzi [и др.] // *Astron. Astrophys.* — 2009. — Т. 498. — С. L33. — DOI: 10.1051/0004-6361/200911841. — arXiv: 0904.0220 [astro-ph.CO].
82. *Bartelmann M., Maturi M.* Weak gravitational lensing //. — 12.2016. — arXiv: 1612.06535 [astro-ph.CO].
83. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. — New York : John Wiley, Sons, 1972. — ISBN 978-0-471-92567-5.
84. *Walsh D., Carswell R. F., Weymann R. J.* 0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens // *Nature.* — 1979. — Т. 279. — С. 381—384. — DOI: 10.1038/279381a0.
85. *Kaiser N., Squires G.* Mapping the dark matter with weak gravitational lensing // *Astrophys. J.* — 1993. — Т. 404. — С. 441—450. — DOI: 10.1086/172297.

86. *Massey R., Kitching T., Richard J.* The dark matter of gravitational lensing // Rept. Prog. Phys. — 2010. — Т. 73. — С. 086901. — DOI: 10.1088/0034-4885/73/8/086901. — arXiv: 1001.1739 [astro-ph.CO].
87. Microlensing constraints on primordial black holes with Subaru/HSC Andromeda observations / H. Niikura [и др.] // Nature Astron. — 2019. — Т. 3, № 6. — С. 524–534. — DOI: 10.1038/s41550-019-0723-1. — arXiv: 1701.02151 [astro-ph.CO].
88. *Chapline G. F.* Cosmological effects of primordial black holes // Nature. — 1975. — Т. 253, № 5489. — С. 251–252. — DOI: 10.1038/253251a0.
89. *Carr B., Kuhnel F., Sandstad M.* Primordial Black Holes as Dark Matter // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 94, № 8. — С. 083504. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.083504. — arXiv: 1607.06077 [astro-ph.CO].
90. *Carr B., Kuhnel F.* Primordial black holes as dark matter candidates // SciPost Phys. Lect. Notes. — 2022. — Т. 48. — С. 1. — DOI: 10.21468/SciPostPhysLectNotes.48. — arXiv: 2110.02821 [astro-ph.CO].
91. *Bekenstein J. D.* Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm // Phys. Rev. D. — 2004. — Т. 70. — С. 083509. — DOI: 10.1103/PhysRevD.70.083509. — arXiv: astro-ph/0403694. — [Erratum: Phys.Rev.D 71, 069901 (2005)].
92. *Angus G. W., Famaey B., Zhao H.* Can MOND take a bullet? Analytical comparisons of three versions of MOND beyond spherical symmetry // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2006. — Т. 371. — С. 138. — DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.10668.x. — arXiv: astro-ph/0606216.
93. *Alpher R. A., Bethe H., Gamow G.* The origin of chemical elements // Phys. Rev. — 1948. — Т. 73. — С. 803–804. — DOI: 10.1103/PhysRev.73.803.
94. *Gamow G.* The Evolution of the Universe // Nature. — 1948. — Т. 162, № 4122. — С. 680–682. — DOI: 10.1038/162680a0.
95. *Alpher R. A., Herman R.* Evolution of the Universe // Nature. — 1948. — Т. 162, № 4124. — С. 774–775. — DOI: 10.1038/162774b0.

96. *Penzias A. A., Wilson R. W.* A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s // *Astrophys. J.* — 1965. — T. 142. — C. 419–421. — DOI: 10.1086/148307.
97. Big Bang Nucleosynthesis: 2015 / R. H. Cyburt [и др.] // *Rev. Mod. Phys.* — 2016. — T. 88. — C. 015004. — DOI: 10.1103/RevModPhys.88.015004. — arXiv: 1505.01076 [astro-ph.CO].
98. Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps / G. F. Smoot [и др.] // *Astrophys. J. Lett.* — 1992. — T. 396. — C. L1–L5. — DOI: 10.1086/186504.
99. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results / C. L. Bennett [и др.] // *Astrophys. J. Suppl.* — 2013. — T. 208. — C. 20. — DOI: 10.1088/0067-0049/208/2/20. — arXiv: 1212.5225 [astro-ph.CO].
100. *Weinberg S.* Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe // *Astrophys. J.* — 1971. — T. 168. — C. 175. — DOI: 10.1086/151073.
101. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies / D. J. Eisenstein [и др.] // *Astrophys. J.* — 2005. — T. 633. — C. 560–574. — DOI: 10.1086/466512. — arXiv: astro-ph/0501171.
102. *Hu W., Sugiyama N., Silk J.* The Physics of microwave background anisotropies // *Nature.* — 1997. — T. 386. — C. 37–43. — DOI: 10.1038/386037a0. — arXiv: astro-ph/9604166.
103. *Slatyer T. R., Padmanabhan N., Finkbeiner D. P.* CMB Constraints on WIMP Annihilation: Energy Absorption During the Recombination Epoch // *Phys. Rev. D.* — 2009. — T. 80. — C. 043526. — DOI: 10.1103/PhysRevD.80.043526. — arXiv: 0906.1197 [astro-ph.CO].
104. Searching for Dark Matter in the CMB: A Compact Parameterization of Energy Injection from New Physics / D. P. Finkbeiner [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2012. — T. 85. — C. 043522. — DOI: 10.1103/PhysRevD.85.043522. — arXiv: 1109.6322 [astro-ph.CO].

105. Constraints on dark matter annihilation from CMB observations before Planck / L. Lopez-Honorez [и др.] // JCAP. — 2013. — Т. 07. — С. 046. — DOI: 10.1088/1475-7516/2013/07/046. — arXiv: 1303.5094 [astro-ph.CO].
106. *Li J., Nomura T., Shimomura T.* Inelastic dark matter from dark Higgs boson decays at FASER // JHEP. — 2022. — Т. 09. — С. 140. — DOI: 10.1007/JHEP09(2022)140. — arXiv: 2112.12432 [hep-ph].
107. *Bell N. F., Cai Y., Medina A. D.* Co-annihilating Dark Matter: Effective Operator Analysis and Collider Phenomenology // Phys. Rev. D. — 2014. — Т. 89, № 11. — С. 115001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.89.115001. — arXiv: 1311.6169 [hep-ph].
108. *Harko T.* The matter Lagrangian and the energy-momentum tensor in modified gravity with non-minimal coupling between matter and geometry // Phys. Rev. D. — 2010. — Т. 81. — С. 044021. — DOI: 10.1103/PhysRevD.81.044021. — arXiv: 1001.5349 [gr-qc].
109. *Mendoza S., Silva S.* The matter Lagrangian of an ideal fluid // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2021. — Т. 18, № 04. — С. 2150059. — DOI: 10.1142/S0219887821500596. — arXiv: 2011.04175 [gr-qc].
110. *Rubakov V. A., Gorbunov D. S.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot big bang theory. — Singapore : World Scientific, 2017. — ISBN 978-981-320-987-9. — DOI: 10.1142/10447.
111. *Friedman A.* On the Curvature of space // Z. Phys. — 1922. — Т. 10. — С. 377–386. — DOI: 10.1007/BF01332580.
112. *Lemaitre G.* A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulæ // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1931. — Т. 91, № 5. — С. 483–490. — DOI: 10.1093/mnras/91.5.483.
113. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure // Astrophys. J. — 1935. — Т. 82. — С. 284–301. — DOI: 10.1086/143681.
114. *Walker A. G.* On Milne's Theory of World-Structure // Proc. Lond. Math. Soc. s. — 1937. — Т. 2–42, № 1. — С. 90–127. — DOI: 10.1112/plms/s2-42.1.90.

115. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 5. Статистическая физика. Часть 1. — Наука, 1976.
116. *Husdal L.* On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe // Galaxies. — 2016. — Т. 4, № 4. — С. 78. — DOI: 10.3390/galaxies4040078. — arXiv: 1609.04979 [astro-ph.CO].
117. *Abramowitz M., Stegun I. A., Romer R. H.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. — American Association of Physics Teachers, 1988.
118. *Choi S.-M., Lee H. M., Seo M.-S.* Cosmic abundances of SIMP dark matter // JHEP. — 2017. — Т. 04. — С. 154. — DOI: 10.1007/JHEP04(2017)154. — arXiv: 1702.07860 [hep-ph].
119. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Теоретическая физика. Том X. Физическая кинетика. — Физматлит, 2002.
120. *De Groot S. R.* Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications / под ред. W. A. Van Leeuwen, C. G. Van Weert. — 1980.
121. *Gondolo P., Gelmini G.* Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis // Nucl. Phys. B. — 1991. — Т. 360. — С. 145–179. — DOI: 10.1016/0550-3213(91)90438-4.
122. *Cannoni M.* Lorentz invariant relative velocity and relativistic binary collisions // Int. J. Mod. Phys. A. — 2017. — Т. 32, 02n03. — С. 1730002. — DOI: 10.1142/S0217751X17300022. — arXiv: 1605.00569 [hep-ph].
123. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Т. 2. — Наука, 1988.
124. *Srednicki M., Watkins R., Olive K. A.* Calculations of Relic Densities in the Early Universe // Nucl. Phys. B / под ред. М. А. Srednicki. — 1988. — Т. 310. — С. 693. — DOI: 10.1016/0550-3213(88)90099-5.
125. Axion-like particles as mediators for dark matter: beyond freeze-out / A. Bharucha [и др.] // JHEP. — 2023. — Т. 02. — С. 141. — DOI: 10.1007/JHEP02(2023)141. — arXiv: 2209.03932 [hep-ph].

126. *Kong K., Matchev K. T.* Precise calculation of the relic density of Kaluza-Klein dark matter in universal extra dimensions // JHEP. — 2006. — T. 01. — C. 038. — DOI: 10.1088/1126-6708/2006/01/038. — arXiv: hep-ph/0509119.
127. *Kolb E. W., Turner M. S.* The Early Universe. T. 69. — 1990. — ISBN 978-0-201-62674-2. — DOI: 10.1201/9780429492860.
128. *Wells J. D.* Annihilation cross-sections for relic densities in the low velocity limit. — 1994. — Mapт. — arXiv: hep-ph/9404219.
129. *Edsjo J., Gondolo P.* Neutralino relic density including coannihilations // Phys. Rev. D. — 1997. — T. 56. — C. 1879–1894. — DOI: 10.1103/PhysRevD.56.1879. — arXiv: hep-ph/9704361.
130. *Lisanti M.* Lectures on Dark Matter Physics // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings. — 2017. — C. 399–446. — DOI: 10.1142/9789813149441_0007. — arXiv: 1603.03797 [hep-ph].
131. *Laine M., Schroder Y.* Quark mass thresholds in QCD thermodynamics // Phys. Rev. D. — 2006. — T. 73. — C. 085009. — DOI: 10.1103/PhysRevD.73.085009. — arXiv: hep-ph/0603048.
132. *Drees M., Hajkarim F., Schmitz E. R.* The Effects of QCD Equation of State on the Relic Density of WIMP Dark Matter // JCAP. — 2015. — T. 06. — C. 025. — DOI: 10.1088/1475-7516/2015/06/025. — arXiv: 1503.03513 [hep-ph].
133. *Ala-Mattinen K., Kainulainen K.* Precision calculations of dark matter relic abundance // JCAP. — 2020. — T. 09. — C. 040. — DOI: 10.1088/1475-7516/2020/09/040. — arXiv: 1912.02870 [hep-ph].
134. *Lee H. M., Park M., Sanz V.* Gravity-mediated (or Composite) Dark Matter Confronts Astrophysical Data // JHEP. — 2014. — T. 05. — C. 063. — DOI: 10.1007/JHEP05(2014)063. — arXiv: 1401.5301 [hep-ph].
135. *Cai H., Cacciapaglia G., Lee S. J.* Massive Gravitons as Feebly Interacting Dark Matter Candidates // Phys. Rev. Lett. — 2022. — T. 128, № 8. — C. 081806. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.081806. — arXiv: 2107.14548 [hep-ph].

136. *Appelquist T., Carazzone J.* Infrared Singularities and Massive Fields // Phys. Rev. D. — 1975. — Т. 11. — С. 2856. — DOI: 10.1103/PhysRevD.11.2856.
137. *Weinberg S.* Baryon and Lepton Nonconserving Processes // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Т. 43. — С. 1566—1570. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.43.1566.
138. *Buchmuller W., Wyler D.* Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation // Nucl. Phys. B. — 1986. — Т. 268. — С. 621—653. — DOI: 10.1016/0550-3213(86)90262-2.
139. *Boos E. E.* Effective Field Theory for Physics Beyond the Standard Model // Phys. Part. Nucl. — 2020. — Т. 51, № 4. — С. 619—624. — DOI: 10.1134/S1063779620040176.
140. Dimension-Six Terms in the Standard Model Lagrangian / B. Grzadkowski [и др.] // JHEP. — 2010. — Т. 10. — С. 085. — DOI: 10.1007/JHEP10(2010)085. — arXiv: 1008.4884 [hep-ph].
141. Renormalization Group Evolution of the Standard Model Dimension Six Operators III: Gauge Coupling Dependence and Phenomenology / R. Alonso [и др.] // JHEP. — 2014. — Т. 04. — С. 159. — DOI: 10.1007/JHEP04(2014)159. — arXiv: 1312.2014 [hep-ph].
142. Flavor-specific scalar mediators / B. Batell [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 98, № 5. — С. 055026. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.055026. — arXiv: 1712.10022 [hep-ph].
143. New Searches for Muonphilic Particles at Proton Beam Dump Spectrometers / D. Forbes [и др.]. — 2022. — Ноябрь. — arXiv: 2212.00033 [hep-ph].
144. *Chen C.-Y., Kozaczuk J., Zhong Y.-M.* Exploring leptophilic dark matter with NA64- μ // JHEP. — 2018. — Т. 10. — С. 154. — DOI: 10.1007/JHEP10(2018)154. — arXiv: 1807.03790 [hep-ph].
145. Probing Leptophilic Dark Sectors at Electron Beam-Dump Facilities / L. Marsicano [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 98, № 11. — С. 115022. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.115022. — arXiv: 1812.03829 [hep-ex].

146. Implications of LHC searches for Higgs–portal dark matter / A. Djouadi [и др.] // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 709. — С. 65–69. — DOI: 10.1016/j.physletb.2012.01.062. — arXiv: 1112.3299 [hep-ph].
147. *Lebedev O., Lee H. M., Mambrini Y.* Vector Higgs-portal dark matter and the invisible Higgs // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 707. — С. 570–576. — DOI: 10.1016/j.physletb.2012.01.029. — arXiv: 1111.4482 [hep-ph].
148. *Kaneta K., Lee H.-S., Yun S.* Dark photon relic dark matter production through the dark axion portal // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 11. — С. 115032. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.115032. — arXiv: 1704.07542 [hep-ph].
149. *Kaneta K., Lee H.-S., Yun S.* Portal Connecting Dark Photons and Axions // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 118, № 10. — С. 101802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.101802. — arXiv: 1611.01466 [hep-ph].
150. *Zhevlakov A. S., Kirpichnikov D. V., Lyubovitskij V. E.* Implication of the dark axion portal for the EDM of fermions and dark matter probing with NA64e, NA64 μ , LDMX, M3, and BaBar // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 106, № 3. — С. 035018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.035018. — arXiv: 2204.09978 [hep-ph].
151. *Dreiner H. K., Haber H. E., Martin S. P.* Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry // Phys. Rept. — 2010. — Т. 494. — С. 1–196. — DOI: 10.1016/j.physrep.2010.05.002. — arXiv: 0812.1594 [hep-ph].
152. *Nordstrom G.* On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields // Phys. Z. — 1914. — Т. 15. — С. 504–506. — arXiv: physics/0702221.
153. *Kaluza T.* Zum Unitätsproblem der Physik // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) — 1921. — Т. 1921. — С. 966–972. — DOI: 10.1142/S0218271818700017. — arXiv: 1803.08616 [physics.hist-ph].
154. *Klein O.* Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English) // Z. Phys. / под ред. J. C. Taylor. — 1926. — Т. 37. — С. 895–906. — DOI: 10.1007/BF01397481.

155. *Randall L., Sundrum R.* A Large mass hierarchy from a small extra dimension // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Т. 83. — С. 3370—3373. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.3370. — arXiv: hep-ph/9905221.
156. Cosmology of brane models with radion stabilization / С. Csaki [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Т. 62. — С. 045015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.62.045015. — arXiv: hep-ph/9911406.
157. *Fierz M., Pauli W.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 1939. — Т. 173. — С. 211—232. — DOI: 10.1098/rspa.1939.0140.
158. *Giudice G. F., Rattazzi R., Wells J. D.* Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders // *Nucl. Phys. B.* — 1999. — Т. 544. — С. 3—38. — DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00044-9. — arXiv: hep-ph/9811291.
159. *Степаньянц К.* Классическая теория поля. — ЛитРес, 2022. — ISBN 9785040048069. — URL: <https://books.google.ru/books?id=7MDfCwAAQBAJ>.
160. *Folgado M. G., Donini A., Rius N.* Gravity-mediated Scalar Dark Matter in Warped Extra-Dimensions. — 2019. — Июль. — DOI: 10.1007/JHEP01(2020)161. — arXiv: 1907.04340 [hep-ph]. — [Erratum: JHEP 02, 129 (2022)].
161. *Liu Y.-S., McKeen D., Miller G. A.* Validity of the Weizsäcker-Williams approximation and the analysis of beam dump experiments: Production of a new scalar boson // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Т. 95, № 3. — С. 036010. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.036010. — arXiv: 1609.06781 [hep-ph].
162. *Schwartz M. D.* Quantum Field Theory and the Standard Model. — Cambridge University Press, 03.2014. — ISBN 978-1-107-03473-0.
163. *Perdrisat C. F., Punjabi V., Vanderhaeghen M.* Nucleon Electromagnetic Form Factors // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 2007. — Т. 59. — С. 694—764. — DOI: 10.1016/j.pnpnp.2007.05.001. — arXiv: hep-ph/0612014.
164. *Hand L. N., Miller D. G., Wilson R.* Electric and Magnetic Formfactor of the Nucleon // *Rev. Mod. Phys.* — 1963. — Т. 35. — С. 335. — DOI: 10.1103/RevModPhys.35.335.

165. *Liu Y.-S., Miller G. A.* Validity of the Weizsäcker-Williams approximation and the analysis of beam dump experiments: Production of an axion, a dark photon, or a new axial-vector boson // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Т. 96, № 1. — С. 016004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.96.016004. — arXiv: 1705.01633 [hep-ph].
166. *Rekalo M. P., Tomasi-Gustafsson E.* Polarization effects in elastic electron proton scattering: Lecture notes. — 2002. — Февр. — arXiv: nucl-th/0202025.
167. *Hofstadter R.* Electron scattering and nuclear structure // *Rev. Mod. Phys.* — 1956. — Т. 28. — С. 214–254. — DOI: 10.1103/RevModPhys.28.214.
168. *Schiff L. I.* Energy-Angle Distribution of Thin Target Bremsstrahlung // *Phys. Rev.* — 1951. — Июль. — Т. 83, вып. 2. — С. 252–253. — DOI: 10.1103/PhysRev.83.252.
169. *Schiff L. I.* Interpretation of Electron Scattering Experiments // *Phys. Rev.* — 1953. — Т. 92. — С. 988–993. — DOI: 10.1103/PhysRev.93.1434. — [Erratum: *Phys.Rev.* 93, 1434–1434 (1954)].
170. Determining the nuclear form factor for detection of dark matter in the relativistic mean field theory / Y.-Z. Chen [и др.] // *Commun. Theor. Phys.* — 2011. — Т. 55. — С. 1059–1064. — DOI: 10.1088/0253-6102/55/6/21. — arXiv: 1101.3049 [hep-ph].
171. *Lewin J. D., Smith P. F.* Review of mathematics, numerical factors, and corrections for dark matter experiments based on elastic nuclear recoil // *Astropart. Phys.* — 1996. — Т. 6. — С. 87–112. — DOI: 10.1016/S0927-6505(96)00047-3.
172. *Freese K., Frieman J. A., Gould A.* Signal Modulation in Cold Dark Matter Detection // *Phys. Rev. D.* — 1988. — Т. 37. — С. 3388–3405. — DOI: 10.1103/PhysRevD.37.3388.
173. *Sick I.* Model-independent nuclear charge densities from elastic electron scattering // *Nucl. Phys. A.* — 1974. — Т. 218. — С. 509–541. — DOI: 10.1016/0375-9474(74)90039-6.

174. The determination of the nuclear ground state and transition charge density from measured electron scattering data / B. Dreher [и др.] // Nucl. Phys. A. — 1974. — Т. 235. — С. 219—248. — DOI: 10.1016/0375-9474(74)90189-4.
175. *Duda G., Kemper A., Gondolo P.* Model Independent Form Factors for Spin Independent Neutralino-Nucleon Scattering from Elastic Electron Scattering Data // JCAP. — 2007. — Т. 04. — С. 012. — DOI: 10.1088/1475-7516/2007/04/012. — arXiv: hep-ph/0608035.
176. *Klein S., Nystrand J.* Exclusive vector meson production in relativistic heavy ion collisions // Phys. Rev. C. — 1999. — Т. 60. — С. 014903. — DOI: 10.1103/PhysRevC.60.014903. — arXiv: hep-ph/9902259.
177. *Buckling E K. K.* Kinematics of elementary particles. — 1975.
178. *Davoudiasl H., Marcarelli R., Neil E. T.* Lepton-flavor-violating ALPs at the Electron-Ion Collider: a golden opportunity // JHEP. — 2023. — Т. 02. — С. 071. — DOI: 10.1007/JHEP02(2023)071. — arXiv: 2112.04513 [hep-ph].
179. *Weizsacker C. F. von.* Radiation emitted in collisions of very fast electrons // Z. Phys. — 1934. — Т. 88. — С. 612—625. — DOI: 10.1007/BF01333110.
180. *Williams E. J.* Nature of the high-energy particles of penetrating radiation and status of ionization and radiation formulae // Phys. Rev. — 1934. — Т. 45. — С. 729—730. — DOI: 10.1103/PhysRev.45.729.
181. *Fermi E.* On the Theory of the impact between atoms and electrically charged particles // Z. Phys. — 1924. — Т. 29. — С. 315—327. — DOI: 10.1007/BF03184853.
182. The Two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation / V. M. Budnev [и др.] // Phys. Rept. — 1975. — Т. 15. — С. 181—281. — DOI: 10.1016/0370-1573(75)90009-5.
183. The exact tree-level calculation of the dark photon production in high-energy electron scattering at the CERN SPS / S. N. Gninenko [и др.] // Phys. Lett. B. — 2018. — Т. 782. — С. 406—411. — DOI: 10.1016/j.physletb.2018.05.010. — arXiv: 1712.05706 [hep-ph].

184. Probing hidden sectors with a muon beam: Implication of spin-0 dark matter mediators for the muon $(g-2)$ anomaly and the validity of the Weiszäcker-Williams approach / H. Sieber [и др.] // Phys. Rev. D. — 2023. — Т. 108, № 5. — С. 056018. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.056018. — arXiv: 2305.09015 [hep-ph].
185. Review of Particle Physics / R. L. Workman [и др.] // PTEP. — 2022. — Т. 2022. — С. 083C01. — DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
186. *L'vov A. I.* About the Breit–Wigner Formula for Identical Particles // Phys. Atom. Nucl. — 2018. — Т. 81, № 6. — С. 748–749. — DOI: 10.1134/S1063778818050149.
187. *Buckley M. R., Feld D., Goncalves D.* Scalar Simplified Models for Dark Matter // Phys. Rev. D. — 2015. — Т. 91. — С. 015017. — DOI: 10.1103/PhysRevD.91.015017. — arXiv: 1410.6497 [hep-ph].
188. *Kang Y.-J., Lee H. M.* Lightning Gravity-Mediated Dark Matter // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Т. 80, № 7. — С. 602. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-8153-x. — arXiv: 2001.04868 [hep-ph].
189. Search for vector mediator of Dark Matter production in invisible decay mode / D. Banerjee [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 7. — С. 072002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.97.072002. — arXiv: 1710.00971 [hep-ex].
190. Search for a light Z' in the $L\mu$ - $L\tau$ scenario with the NA64-e experiment at CERN / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 106, № 3. — С. 032015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.032015. — arXiv: 2206.03101 [hep-ex].
191. High purity 100 GeV electron identification with synchrotron radiation / E. Depero [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2017. — Т. 866. — С. 196–201. — DOI: 10.1016/j.nima.2017.05.028. — arXiv: 1703.05993 [physics.ins-det].
192. Missing energy signature from invisible decays of dark photons at the CERN SPS / S. N. Gninenko [и др.] // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 94, № 9. — С. 095025. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.095025. — arXiv: 1604.08432 [hep-ph].

193. Search for a New B-L Z' Gauge Boson with the NA64 Experiment at CERN / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Т. 129, № 16. — C. 161801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.161801. — arXiv: 2207.09979 [hep-ex].
194. *Peso J. del, Ros E.* On the Energy Resolution of Electromagnetic Sampling Calorimeters // Nucl. Instrum. Meth. A. — 1989. — Т. 276. — C. 456. — DOI: 10.1016/0168-9002(89)90571-8.
195. *Grindhammer G., Peters S.* The Parameterized simulation of electromagnetic showers in homogeneous and sampling calorimeters // International Conference on Monte Carlo Simulation in High-Energy and Nuclear Physics - MC 93. — 02.1993. — arXiv: hep-ex/0001020.
196. Search for Light Dark Matter with NA64 at CERN / Y. M. Andreev [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2023. — Т. 131, № 16. — C. 161801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.131.161801. — arXiv: 2307.02404 [hep-ex].
197. Prospects in the search for a new light Z' boson with the NA64 μ experiment at the CERN SPS / H. Sieber [и др.] // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105, № 5. — C. 052006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.105.052006. — arXiv: 2110.15111 [hep-ex].
198. Shedding light on Dark Sectors with high-energy muons at the NA64 experiment at the CERN SPS / Y. M. Andreev [и др.]. — 2024. — Сент. — arXiv: 2409.10128 [hep-ex].
199. Exploration of the Muon $g - 2$ and Light Dark Matter explanations in NA64 with the CERN SPS high energy muon beam / Y. M. Andreev [и др.]. — 2024. — ЯНВ. — arXiv: 2401.01708 [hep-ex].
200. *Chen C.-Y., Pospelov M., Zhong Y.-M.* Muon Beam Experiments to Probe the Dark Sector // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 95, № 11. — C. 115005. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.115005. — arXiv: 1701.07437 [hep-ph].
201. *Mans J.* The LDMX Experiment // EPJ Web Conf. / под ред. М. Battaglieri [и др.]. — 2017. — Т. 142. — C. 01020. — DOI: 10.1051/epjconf/201714201020.
202. Light Dark Matter eXperiment (LDMX) / Т. Åkesson [и др.]. — 2018. — Авг. — arXiv: 1808.05219 [hep-ex].

203. Current Status and Future Prospects for the Light Dark Matter eXperiment / T. Åkesson [и др.] // Snowmass 2021. — 03.2022. — arXiv: 2203.08192 [hep-ex].
204. A High Efficiency Photon Veto for the Light Dark Matter eXperiment / T. Åkesson [и др.] // JHEP. — 2020. — Т. 04. — С. 003. — DOI: 10.1007/JHEP04(2020)003. — arXiv: 1912.05535 [physics.ins-det].
205. Search for Neutral Metastable Penetrating Particles Produced in the SLAC Beam Dump / J. D. Bjorken [и др.] // Phys. Rev. D. — 1988. — Т. 38. — С. 3375. — DOI: 10.1103/PhysRevD.38.3375.
206. Testing Light Dark Matter Coannihilation With Fixed-Target Experiments / E. Izaguirre [и др.] // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 5. — С. 055007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.96.055007. — arXiv: 1703.06881 [hep-ph].
207. *Batell B., Essig R., Surujon Z.* Strong Constraints on Sub-GeV Dark Sectors from SLAC Beam Dump E137 // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 113, № 17. — С. 171802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.171802. — arXiv: 1406.2698 [hep-ph].
208. *Izaguirre E., Krnjaic G., Shuve B.* Discovering Inelastic Thermal-Relic Dark Matter at Colliders // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 6. — С. 063523. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.063523. — arXiv: 1508.03050 [hep-ph].
209. Search for a Dark Photon in e^+e^- Collisions at BaBar / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 113, № 20. — С. 201801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.201801. — arXiv: 1406.2980 [hep-ex].
210. Search for a muonic dark force at BABAR / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 94, № 1. — С. 011102. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.011102. — arXiv: 1606.03501 [hep-ex].
211. Search for Invisible Decays of a Dark Photon Produced in e^+e^- Collisions at BaBar / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 13. — С. 131804. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.131804. — arXiv: 1702.03327 [hep-ex].

212. Search for a Dark Leptophilic Scalar in e^+e^- Collisions / J. P. Lees [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Т. 125, № 18. — С. 181801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.181801. — arXiv: 2005.01885 [hep-ex].
213. Fully Geant4 compatible package for the simulation of Dark Matter in fixed target experiments / M. Bondi [и др.] // Comput. Phys. Commun. — 2021. — Т. 269. — С. 108129. — DOI: 10.1016/j.cpc.2021.108129. — arXiv: 2101.12192 [hep-ph].
214. Development of the fully Geant4 compatible package for the simulation of Dark Matter in fixed target experiments / B. B. Oberhauser [и др.] // Comput. Phys. Commun. — 2024. — Т. 300. — С. 109199. — DOI: 10.1016/j.cpc.2024.109199. — arXiv: 2401.12573 [hep-ph].
215. *Inc. W. R. Mathematica, Version 13.1.* — URL: <https://www.wolfram.com/mathematica> ; Champaign, IL, 2022.
216. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* Implication of the Weizsacker-Williams approximation for the dark matter mediator production. — 2024. — Сент. — arXiv: 2409.12748 [hep-ph].
217. *Voronchikhin I. V., Kirpichnikov D. V.* The bremsstrahlung-like production of the massive spin-2 dark matter mediator. — 2024. — Дек. — arXiv: 2412.10150 [hep-ph].
218. *Bityukov S. I., Krasnikov N. V.* The Use of statistical methods for the search for new physics at the LHC. — 2011. — Июль. — arXiv: 1107.3974 [physics.data-an].
219. *Bethe H., Heitler W.* On the Stopping of fast particles and on the creation of positive electrons // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1934. — Т. 146. — С. 83—112. — DOI: 10.1098/rspa.1934.0140.
220. *Carlson J. F., Oppenheimer J. R.* On Multiplicative Showers // Phys. Rev. — 1937. — Т. 51. — С. 220—231. — DOI: 10.1103/PhysRev.51.220.
221. *Landau L. D.* The Cascade Theory of Electronic Showers // Proc. Roy. Soc. Lond. A / под ред. D. ter Haar. — 1938. — Т. 166. — DOI: 10.1016/b978-0-08-010586-4.50041-9.

222. *Tsai Y.-S., Whitis V.* THICK TARGET BREMSSTRAHLUNG AND TARGET CONSIDERATION FOR SECONDARY PARTICLE PRODUCTION BY ELECTRONS // *Phys. Rev.* — 1966. — T. 149. — C. 1248—1257. — DOI: 10.1103/PhysRev.149.1248.
223. GEANT4—a simulation toolkit / S. Agostinelli [и др.] // *Nucl. Instrum. Meth. A.* — 2003. — T. 506. — C. 250—303. — DOI: 10.1016/S0168-9002(03)01368-8.
224. *Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F.* FeynCalc 9.3: New features and improvements // *Comput. Phys. Commun.* — 2020. — T. 256. — C. 107478. — DOI: 10.1016/j.cpc.2020.107478. — arXiv: 2001.04407 [hep-ph].
225. *Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F.* New Developments in FeynCalc 9.0 // *Comput. Phys. Commun.* — 2016. — T. 207. — C. 432—444. — DOI: 10.1016/j.cpc.2016.06.008. — arXiv: 1601.01167 [hep-ph].